Ejemplo 18

¿Cuántos equipos diferentes de cuatro personas se pueden formar a partir de un grupo de siete si no hay ninguna restricción? ¿Y si el equipo debe incluir siempre a Fernando?

Sin restricciones: $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35$ equipos diferentes.

Incluyendo a Fernando: $C_{6,3} = \binom{6}{3} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ equipos diferentes.

8.8. Propiedades de los números combinatorios

Hemos definido $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ $\quad (m \geq n)$.

Una forma sencilla de calcular los números combinatorios es mediante el llamado *triángulo de Pascal o Tartaglia*:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Observando el triángulo de Pascal podemos deducir las siguientes propiedades de los números combinatorios:

- Todas las filas empiezan y acaban en 1: $\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$.
- $\binom{m}{1} = m$
- Todas las filas son simétricas: $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$. Por ejemplo: $\binom{16}{4} = \binom{16}{12}$; $\binom{100}{97} = \binom{100}{3}$
- Cada número se obtiene sumando los dos que hay encima (excepto los extremos que son 1): $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$. Por ejemplo: $\binom{15}{8} + \binom{15}{9} = \binom{16}{9}$

8.9. Teorema del binomio de Newton

Un polinomio de dos términos recibe el nombre de *binomio*. Vamos a calcular las potencias sucesivas del binomio $(a+b)$, y a partir de ahí, deduciremos una fórmula general para la potencia enésima $(a+b)^n$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) = \\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+ba^3+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\quad \dots
\end{aligned}
$$

Se observan los siguientes patrones en los términos de cada potencia:

- ☞ los exponentes de a van decreciendo de uno en uno desde n hasta 0.
- ☞ los exponentes de b van creciendo de uno en uno desde 0 hasta n.
- ☞ la suma de los exponentes de cada término es siempre igual a n.
- ☞ los coeficientes de la potencia enésima se corresponden con los elementos de la fila enésima del triángulo de Pascal.

Generalizando los resultados obtenidos tenemos que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

fórmula conocida con el nombre de *binomio de Newton*.

Utilizando la notación de sumatorio: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

Ejemplo 19

1. $(1+x)^6 = \binom{6}{0}\cdot 1^6 + \binom{6}{1}\cdot 1^5\cdot x + \binom{6}{2}\cdot 1^4\cdot x^2 + \binom{6}{3}\cdot 1^3\cdot x^3 + \binom{6}{4}\cdot 1^2\cdot x^4 + \binom{6}{5}\cdot 1\cdot x^5 + \binom{6}{6}\cdot x^6 =$

   $= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

2. $(4x-3)^3 = \binom{3}{0}(4x)^3(-3)^0 + \binom{3}{1}(4x)^2(-3)^1 + \binom{3}{2}(4x)(-3)^2 + \binom{3}{3}(4x)^0(-3)^3 =$

   $= 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27$

3. $\left(2x-\frac{2}{x}\right)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2\left(-\frac{2}{x}\right)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0\left(-\frac{2}{x}\right)^3 =$

   $= 8x^3 - 24x + \frac{24}{x} - \frac{8}{x^3}$

En muchos ejercicios no es imprescindible conocer el desarrollo completo del binomio de Newton, ya que sólo interesa conocer el término que ocupa un cierto lugar, o el término de cierto grado.

Así, el término que ocupa el lugar $k+1$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ será: $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Ejemplo 20

1. El quinto término del desarrollo de $(2+x)^{20}$ será:

   $T_5 = \binom{20}{4} \cdot 2^{16} \cdot x^4 = 4845 \cdot 2^{16} x^4 = 317\,521\,920 x^4$

2. El término en x^4 del desarrollo de $(5x-9)^7$ será:

   $\binom{7}{3}(5x)^4(-9)^3 = 35 \cdot 625x^4 \cdot (-729) = -15\,946\,875x^4$

3. El término en x^6 del desarrollo de $(3x^2-6)^7$ será:

   $\binom{7}{4}(3x^2)^3(-6)^4 = 35 \cdot 27x^6 \cdot 1296 = 1\,224\,720x^6$