Límites y continuidad

7

ACTIVIDADES

1. Página 162

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2-1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2}{x^2-1}=1$$

2. Página 162

$$\left|\frac{3x}{x-5}-3\right|=\left|3\left(\frac{x}{x-5}-1\right)\right|=3\left|\frac{5}{x-5}\right|<\varepsilon\to\frac{15}{|x-5|}<\varepsilon\to 15<\varepsilon|x-5|\to|x-5|>\frac{15}{\varepsilon}\to x>\frac{15}{\varepsilon}+5$$

Para $\varepsilon=0{,}001$:

$$x_0=\frac{15}{0{,}001}+5=15005$$

Tomando $x = 15\,006$:

$$|f(15006)-3|\approx 0{,}00099<0{,}001$$

3. Página 163

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

4. Página 163

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x - x^2$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \cos x$

f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

5. Página 164

a) $2 + (+\infty) = +\infty$

b) $2 + (-\infty) = -\infty$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

6. Página 164

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

7. Página 165

a) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=-8+\infty=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x):g(x)]=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right):\left(\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=\frac{-8}{+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}f(x)}=\sqrt[3]{-8}=-2$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{g(x)}=\sqrt[4]{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=\sqrt[4]{+\infty}=+\infty$

8. Página 165

a) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)-\left(\lim_{x\to-\infty}g(x)\right)=-\infty-\frac{4}{9}=-\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)=-\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{f(x)}=\sqrt[4]{\lim_{x\to-\infty}f(x)}=\sqrt[4]{-\infty}$ (No existe en $\mathbb{R}$)

d) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}g(x)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

9. Página 166

a) $\lim_{x\to+\infty}x^5=(+\infty)^5=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}x^5=(-\infty)^5=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}x^{-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}=\frac{1}{+\infty}=0$

d) $\lim_{x\to-\infty}x^{-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=\frac{1}{-\infty}=0$

e) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim_{x\to+\infty}x}=+\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim_{x\to-\infty}x}=-\infty$

10. Página 166

a) $\lim_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}5^x=5^{-\infty}=\frac{1}{5^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}5^x=5^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}5^{\frac{1}{x}}=5^{\frac{1}{+\infty}}=5^0=1$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^x=\left(\sqrt{5}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\sqrt{5}\right)^0=1$

11. Página 167

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+7}{x+13}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{x^2+1}=\frac{-2}{1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{9+2x^2}=\frac{4}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=2$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-1\right)^2-x^2}{4-x^2}=\frac{1}{-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=-\lim_{x\to+\infty}x^2=-\infty$

12. Página 167

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+2}{5x-1}\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{5x}\right)^2=\dfrac{9}{25}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\dfrac{9}{25}\cdot(+\infty)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{2x^2+15}\right)^{-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+15}{x^2-2}\right)^3=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)^3=2^3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^6}{x^6}=8\cdot1=8$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2-3x}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2}{2x}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a>0\\ -\infty & \text{si } a<0\end{cases}$

Si $a=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2-3x}{2x-1}=-\dfrac{3}{2}$

d) Si $a\neq-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\dfrac{1}{-(a+2)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{a+2}$

Si $a=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x-(a+2)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x}=+\infty$

13. Página 168

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}=+\infty$

14. Página 168

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}=\dfrac{7}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}=\dfrac{1}{2}$

15. Página 169

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x-3}-\dfrac{3x^2-1}{1+3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x^3+2x+6x^2-(3x^3-9x^2-x+3)}{x+3x^2-3-9x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16x^2}{3x^2}\right)=\dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^3+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-(4x^3+x+1)}{\left(x+\sqrt{4x^3+x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^3}{\left(\sqrt{4x^3}\right)}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4x^2+x+1-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2-(x^2-2x)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\left(2\sqrt{x^2}\right)}=1$

16. Página 169

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\frac{a}{2}=1\to a=2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\frac{b}{4}=-\frac{1}{4}\to b=-1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\to c=3$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\to d>4$

17. Página 170

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x+2}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}-1\right)(x+2)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)}=e^2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{x+2}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}-1\right)(x+2)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2+4x}{x^2-1}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}\right)^{x-3}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}-1\right)(x-3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{2x+1}\right)(x-3)}=e^1=e$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}\right)^{2x+1}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-1\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-\frac{1}{2}\right)(2x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-23}{12x^2+10}\right)(2x+1)}=e^0=1$

18. Página 170

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2}{2-x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)}=e^0=1$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^3}{2-x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)}=e^1=e$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)}=e^0=1$

19. Página 171

a) $\lim_{x\to0^-}f(x)=1$

b) $\lim_{x\to0^+}f(x)=3$

20. Página 171

a) $\lim_{x\to-1^-}f(x)=0$

b) $\lim_{x\to-1^+}f(x)=2$

c) $\lim_{x\to3^-}f(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to3^+}f(x)=-2$

21. Página 172

a) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{2}{-1}=-2$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) $\lim_{x\to -2} f(x)=\frac{-2+2}{4-1}=0$

d) $\lim_{x\to \sqrt{2}} f(x)=\frac{\sqrt{2}+2}{1}=\sqrt{2}+2$

22. Página 172

a) $\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x)=1+1=2$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=1+\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=1+\infty=+\infty\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=1-\infty=-\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} (x+1)^{-1}=\frac{1}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} (1+tg(x))=1+0=1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

23. Página 173

a) $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+2x+1}$.

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+4x+4)}{(x+2)(x^2-4x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}=\frac{0}{16}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x)}{(x-2)}=\frac{2}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x^2-x)}{(x-2)}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x^2-x)}{(x-2)}=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}$.

e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-1}{x+1}=\frac{-1}{2}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{3}$

24. Página 173

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}\to\frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=\frac{1}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}\to \text{No existe.}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=-\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{1-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{0}{2} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}} = -\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^{1/2}} = -\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)} = -\lim_{x\to 3}(x-3)^{1/2} = 0$$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{6}}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} \to \text{No existe.}\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1+x)\left(1+\sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{4}$$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+1)(x-2)^{1/2} = 0$$

25. Página 174

$\nexists\, f(-2) = \dfrac{1}{0}$ → La función no es continua en $x = -2$.

$\nexists\, f(2) = \dfrac{5}{0}$ → La función no es continua en $x = 2$.

26. Página 174

Expresamos la función como una función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x \le -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x \le 2 \\ x+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-1) = 2\cdot 0 - 3 = -3 \to$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-x-4) = -3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(3x) = -3\end{array}\right\} \to \lim_{x\to -1} f(x) = -3$$

$f(-1) = -3 = \lim\limits_{x\to -1} f(x) \to$ La función es continua en $x = -1$.

$f(2) = 2\cdot 3 - 0 = 6 \to$ Existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3x = 6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x+4) = 6\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

$f(2) = 6 = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

27. Página 175

Si $x < 0 \to f(x) = 1 - x^2 \to f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \to f(x) = \sqrt{4x-1} \to f(x)$ no está definida en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Es continua en $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$.

Si $x > 2 \to f(x) = x + 1 \to f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

Si $x = 0 \to f(0) = 1 - 0 = 1 \to$ Existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x^2) = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x-1} \to \text{ No existe.}\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x).$$

La función no es continua en $x = 0$.

Si $x = 2 \to f(2) = 2 + 1 = 3 \to$ Existe f(2).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4x-1} = \sqrt{7}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x+1 = 3\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$.

28. Página 175

Si $x < 3 \to f(x) = x^2 - 4 \to f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$.

Si $x > 3 \to f(x) = \frac{x+m}{x} \to f(x)$ es continua en $(3, +\infty)$.

Si $x = 3 \to f(3) = 9 - 4 = 5 \to$ Existe $f(3)$.

$$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-4) = 5 \qquad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+m}{x} = 1 + \frac{m}{3}$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si:

$$f(3) = 5 = \lim\limits_{x\to 3} f(x) \to 5 = 1 + \frac{m}{3} \to m = 12$$

29. Página 176

$f(x)$ es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$; por lo tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es continua en $[-\pi, 0]$. $\qquad f(-\pi) = 1 - \pi - 1 = -\pi < 0 \qquad f(0) = 1 + 0 + 1 = 2 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, corta al eje de abscisas en $x = c$.

30. Página 176

$P(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio.

Si $a_n > 0$: $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} a_n x^n = -\infty < 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} a_n x^n = +\infty > 0$

Si $a_n < 0$: $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} a_n x^n = +\infty > 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} a_n x^n = -\infty < 0$

Por ser n impar.

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(c) = 0$, es decir, c es una solución de $P(x) = 0$.

31. Página 177

La función $f(x)$ es suma de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [0, 4] y, además:

$f(0) = 1$ y $f(4) = -1{,}41$

Por el teorema de los valores intermedios, la función $f(x)$ tomará en el intervalo (0, 4) todos los valores comprendidos entre 1 y $-1{,}41$, entre ellos el valor -1, es decir, existe $x \in (0, 4)$ tal que $f(c) = -1$.

32. Página 177

La función $f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$; por tanto, $f(x)$ es continua, por ejemplo, en [0,1; 1]. Entonces, por el teorema de Weierstrass, existe al menos un punto en ese intervalo donde la función alcanza su valor máximo absoluto y otro donde toma su valor mínimo absoluto.

SABER HACER

33. Página 178

$$x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)=x^2\left(\frac{2x+2}{x+2}-\frac{2x}{x+1}\right)=\frac{2x^2}{x^2+3x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3x+2}=2$$

34. Página 178

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\to(+\infty-\infty)\to \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2}=2\to a=4$$

35. Página 178

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}\to 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}-1\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^3-2}{2+x^4}\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3ax^6}{x^6}}=e^{3a}$$

$$e^{3a}=e^3\to a=1$$

36. Página 179

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{3x}}}{\dfrac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{3x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+7e^{-8x}}{2e^{-8x}-4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{-5x}}}{\dfrac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{-5x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{8x}+7}{2-4e^{8x}}=\frac{7}{2}$$

37. Página 179

$$\lim_{x\to -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}} = \lim_{x\to -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2}{5x+1}} = 2^{\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}^-} \dfrac{2x}{5x^2+x} = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}^-} \dfrac{2}{5x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}^+} \dfrac{2x}{5x^2+x} = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}^+} \dfrac{2}{5x+1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to -\frac{1}{5}} \frac{2x}{5x^2+x} \to \text{No existe } \lim_{x\to -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}}.$$

38. Página 179

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} = \lim_{x\to 5} \frac{5(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-5} = \lim_{x\to 5} 5\left(\sqrt{x-1}+2\right) = 20$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right] = -2$$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+2\right)}{-x-1} = \lim_{x\to -1} \left[-\left(\sqrt{3-x}+2\right)\right] = -4$$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{0}{-2} = 0$

39. Página 180

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = \frac{14-2a}{0}$$

Si $a > 7$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a < 7$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x+16} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a = 7$, entonces:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2-4x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(x^2+2x-3\right)}{(x-2)\left(x^2-2x-8\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8} = -\frac{5}{8}$$

40. Página 180

Si $x < 0 \to f(x) = ax^2 + b$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Si $0 \le x < 1 \to f(x) = x - a$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo (0, 1).

Si $x \ge 1 \to f(x) = \frac{a}{x} + b$

Es una función racional. No está definida en $x = 0$. Es continua en $(1, +\infty)$.

Para $x = 0 \to f(0) = -a$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax^2 + b) = b \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - a) = -a$

Para $x = 1 \to f(1) = a + b$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x - a) = 1 - a \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{a}{x} + b\right) = a + b$

Para $x = 0 \to f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to b = -a$

Para $x = 1 \to f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a + b = 1 - a$

$$\left.\begin{array}{l} b = -a \\ a + b = 1 - a \end{array}\right\} \to 0 = 1 - a \to a = 1, b = -1$$

41. Página 181

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en el intervalo $[0, \pi]$, además:

- $f(0) = 2 + 1 = 3$
- $f(\pi) = -2 + 1 = -1$

La función es continua en el intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos de ese intervalo; entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

42. Página 181

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en el intervalo [0, 1].
- $g(x)$ es continua en el intervalo $[-1, +\infty)$ y, por tanto, también en el intervalo [0, 1].

$f(0) = 1$; $f(1) = 3$ $\qquad$ $g(0) = 2$; $g(1) = 2\sqrt{2}$

$f(0) = 1 < g(0) = 2$ y $f(1) = 3 > g(1) = 2\sqrt{2}$, es decir, en $x = 0$, la función $f(x)$ está por debajo de la función $g(x)$, y en $x = 1$, la función $f(x)$ está por encima de $g(x)$.

Por el teorema de los valores intermedios (Darboux), la función $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$, y la función $g(x)$ toma todos los valores comprendidos entre los valores $g(0) = 2$ y $g(1) = 2\sqrt{2}$.

Entonces, las funciones se cortarán en algún punto del intervalo (0, 1).

43. Página 181

$$3^{-x+2}-4=1\rightarrow 3^{-x+2}-5=0\rightarrow g(x)=3^{-x+2}-5$$

Demostrar que $f(x)$ toma el valor 1 es equivalente a demostrar que la función $g(x)$ toma el valor 0.

La función $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; por tanto, también lo es, por ejemplo, en el intervalo cerrado [0, 2].

- $g(0)=4>0$
- $g(2)=-4<0$

La función $g(x)$ es continua en el intervalo [0, 2] y, además, toma valores de distinto signo en sus extremos; entonces, por el teorema de Bolzano, existe $x_0\in(0,2)$ tal que $g(x_0)=0$.

ACTIVIDADES FINALES

44. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

45. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}=0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x=0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{x^2}=+\infty$

46. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}=1$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2}=0$

47. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2}=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^2}=2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{2}=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+3}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{2}=-\infty$

48. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2}\right)}=2$$

49. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(0,7)^{3x+2}=(0,7)^{+\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-0,01x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-0,01x^2\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-7)^{2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)^{-x}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)^2-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x+4)=-\infty$

50. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\dfrac{6}{2}=3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2-6x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}=\dfrac{6}{2}=3$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-6x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^2+6x}{x^2+\sqrt{x^2-6x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=+\infty$

51. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-x^4}{\sqrt{x^2+3x}+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

52. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{x}}=e^3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3x-3}{x}\right)}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-3x}{x}}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3+3x}{x}}=e^3$

53. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+2}{2\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2\left(2\sqrt{x^2}\right)}=-1$$

54. Página 182

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3-5}-\sqrt{x^4-3x}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5+3x}{(x+4)\left(\sqrt{x^4+2x^3-5}+\sqrt{x^4-3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\left(2\sqrt{x^4}\right)}=1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=2$$

55. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-x^2+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2-2}-(x^2-3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-11}{\sqrt{x^4+3x^2-2}+(x^2-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$$

56. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}}{\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(2\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)}=2$$

57. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2-3x}-\frac{x^2+2x}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3-2x^3+6x^2}{(x^2-3x)(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2$$

58. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

59. Página 182

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-8}-\sqrt{x^2+mx+7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x-15}{\sqrt{x^2+3x-8}+\sqrt{x^2+mx+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-m)x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{3-m}{2}=-1\to m=5$$

60. Página 182

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4+mx^2-5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-mx^2+5}{2x^2+\sqrt{4x^4+mx^2-5}}=\frac{-m}{4}=2\to m=-8$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x+m\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-(3x-m)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+4x-(9x^2-6mx+m^2)}{\sqrt{9x^2+4x}+(3x-m)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4+6m)x}{6x}=\frac{4+6m}{6}=\frac{1}{2}\to m=-\frac{1}{6}$$

61. Página 182

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-6}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+2x}\right)(x-6)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-12}{1+2x}\right)}=e^{1}=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x+2}{x^2+3x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2}{2x^2}\right)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x}{1+2x^3}\right)^{\frac{x^2-3}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{1+2x^3}\right)\left(\frac{x^2-3}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{6x^3}\right)}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+4x}{4x+7}\right)^{\frac{x^3+1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{4x+7}\right)\left(\frac{x^3+1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^3}{4x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)}=e^{-\infty}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+6}{6x+3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6-6x}{6x+3x^2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2}{12x^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^4-2}{\left(2x^2-1\right)^2+1}\right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2}\right)\left(\frac{x^3-3x}{x+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^5}{4x^5}\right)}=e^{1}=e$

62. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{+3-mx}{mx+2x^2}\right)(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)}=\frac{1}{e}\to\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)=-1\to m=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+5x}\right)\left(\frac{x^2-2}{8+mx}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{5mx^2}\right)}=e^{\frac{1}{5m}}=\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{1}{5m}=\ln\left(\frac{7}{10}\right)\to m=\frac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

63. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+10}{3^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}+\frac{10}{3^{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{10}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x+10}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot 3}{3^x}=3$

64. Página 183

a) $f(x)=\begin{cases}-x-2-(-x+2) & \text{si } x<-2\\ x+2-(-x+2) & \text{si } -2\le x<2\\ x+2-(x-2) & \text{si } x\ge 2\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}-4 & \text{si } x<-2\\ 2x & \text{si } -2\le x<2\\ 4 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-4=-4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}4=4$

b) $f(x)=\begin{cases}x-(3-2x) & \text{si } x<\frac{3}{2}\\ x-(-3+2x) & \text{si } x\ge\frac{3}{2}\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}3x-3 & \text{si } x<\frac{3}{2}\\ -x+3 & \text{si } x\ge\frac{3}{2}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-3)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3)=-\infty$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x<-\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2}\le x<2 \\ \dfrac{2x+3}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-2}=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1<x<3 \\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-3}{1-x}\right)=1$

65. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-1$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=4$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=0$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

66. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to-3} g(x)=0{,}7$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to1} g(x)=-2{,}9$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to2} g(x)=0$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

67. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to1} 2^{\ln x}=2^{\ln 1}=2^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to e} 2^{\ln x}=2^{\ln e}=2^1=2$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} 2^{\ln x}=2^{\ln\frac{1}{e}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to2} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln 1}=3^0=1$

e) $\lim\limits_{x\to e+1} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln e}=3^1=3$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{e+1}{e}} 3^{\ln(x-1)}=3^{\ln\left(\frac{e+1-e}{e}\right)}=3^{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

68. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{4+1}{\sqrt{4-3}}=5$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{-4+1}{\sqrt{4-3}}=-3$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{6+1}{\sqrt{9-3}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$

69. Página 183

a) $\lim\limits_{x\to4}(\log_2(x-3)+1)=\log_2 1+1=0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to11}(\log_2(x-3)+1)=\log_2(8)+1=3+1=4$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{7}{2}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{13}{4}}(\log_2(x-3)+1)=\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right)+1=-2+1=-1$

70. Página 183

a) $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{\frac{-7}{4}}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\frac{4}{7}+2=\frac{10}{7}$

b) $\lim_{x\to 8}\left(\frac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\frac{1}{6}+\log_{\frac{1}{2}}8=\frac{1}{6}-3=-\frac{17}{6}$

71. Página 183

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{-18}{0}\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to -1}f(x).$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{6x-12}{x^2-3x-4}=\frac{12}{0}\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 4}f(x).$$

72. Página 183

a) $\lim_{x\to 5}(m(x)+n(x)+p(x))=+\infty$

b) $\lim_{x\to 5}(m(x)\cdot n(x)-p(x))=-\infty$

c) $\lim_{x\to 5}(m(x)\cdot p(x))=+\infty$

d) $\lim_{x\to 5}\frac{n(x)}{m(x)}=0$

e) $\lim_{x\to 5}\frac{m(x)}{n(x)}=\frac{4}{0}\to$ Indeterminación

f) $\lim_{x\to 5}(n(x)\cdot p(x))=0\cdot(+\infty)\to$ Indeterminación

g) $\lim_{x\to 5}\frac{p(x)}{m(x)}=+\infty$

h) $\lim_{x\to 5}\frac{n(x)}{p(x)}=0$

i) $\lim_{x\to 5}(m(x))^{n(x)}=1$

j) $\lim_{x\to 5}(m(x))^{p(x)}=+\infty$

k) $\lim_{x\to 5}(n(x))^{p(x)}=0$

l) $\lim_{x\to 5}(p(x))^{n(x)}=(+\infty)^0\to$ Indeterminación

73. Página 183

a) $\lim_{x\to -\infty}f(x)=1$ $\quad\lim_{x\to -2^-}f(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to -2^+}f(x)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to +\infty}f(x)=1$

b) $\lim_{x\to -\infty}g(x)=0$ $\quad\lim_{x\to -2^-}g(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to 1^-}g(x)=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty}g(x)=0$ $\quad\lim_{x\to -2^+}g(x)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to 1^+}g(x)=-\infty$

c) $\lim_{x\to -\infty}h(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to -2^-}h(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to -2^+}h(x)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to +\infty}h(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty}m(x)=-\infty$ $\quad\lim_{x\to 1^-}m(x)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to 1^+}m(x)=+\infty$ $\quad\lim_{x\to +\infty}m(x)=+\infty$

74. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ b) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$ c) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$

75. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

76. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{1}{2x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{2x-1} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-4x+1}.$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{6}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+3}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}.$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{(3x-5)(x+2)}{(3x-5)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{x+2}{3x-5} = \dfrac{\frac{11}{3}}{0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^-} \dfrac{x+2}{3x-5} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}^+} \dfrac{x+2}{3x-5} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25}.$

77. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x-2x^2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{-x(2x-1)} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{-x} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(2x+3)}=\dfrac{1}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+2}=-\dfrac{6}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{3x^2+x-10}{9x-15}=\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{(3x-5)(x+2)}{3(3x-5)}=\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{11}{9}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{x^3-2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{x^3(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{1-2x}=5$

78. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-3}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{-2}{0}=\infty\to \left.\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-2}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-2}{x}=-\infty\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x^2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-3x^2}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4-3x)}{x(3+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-3x}{3+x}=\dfrac{4}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-x}{4+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{4+2x}=-\dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^3-3}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^3-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^3-3}=\dfrac{4}{5}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)^2-x-5}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{-4}{0}=\infty\to$

$\left.\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=-\infty\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right).$

79. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{3(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)=4$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(2\sqrt{x}+2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)(1+\sqrt{x-2})}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x+3)(1+\sqrt{x-2})}=-\dfrac{1}{12}$

80. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2}=24$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+5}{8x-\sqrt{9x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(x+1)\left(8x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{55x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{55x^2}{55x^2}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-(x-4)}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{(x+4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=-\dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left[(1-x)\sqrt{x+1}\right]=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{3}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)}{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)\sqrt{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x}}=0$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right)=1$

81. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{-6}{-18}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\dfrac{12}{-4}=-3$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(2x^2-7x-3\right)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{19}{0}=\infty\to$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x+2)(x-3)}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe }\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)(x-3)(2x-1)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x+2}=1$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^3+x^2-8x-12}=2$

82. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3} = \dfrac{4}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{x^2+3-4x^4} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{(x-1)(x+1)\left(-4x^2-3\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+2x^2\right)}{-4x^2-3} = -\dfrac{4}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \dfrac{0}{\sqrt{3}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \dfrac{6}{\sqrt{7}-8} = \dfrac{6\left(\sqrt{7}+8\right)}{-57} = -\dfrac{2\sqrt{7}+16}{19}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{-2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2+3}-2x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{-2} = +\infty$

83. Página 184

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[6]{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} = \dfrac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} \to \text{No existe.} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = -\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+3\right) = 6$

84. Página 184

a) $\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=\infty \rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x-3}=(4)^{-1}=\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}=1^0=1$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x-2}{4x-3}\right)^{4x^2-1}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4x-3}\right)(4x^2-1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x-3}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x+3}{3x}\right)^{3x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{x+5}\right)^{x}=e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x+5}\right)(x)}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{x+5}}=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$

85. Página 184

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-2}{x+2}\right)^{-x^2+3}=3^{-\infty}=0$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+3x}\right)^{x^2+4}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2-3x}{x^2+3x}\right)(x^2+4)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}(-3x)}=e^{-\infty}=0$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3x^2-1}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^3}\right)}=e^0=1$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-3}{3+2x}\right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{3+2x}\right)\left(\frac{2x^2-1}{1+3x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-12x^2}{6x^2}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+x^2}{x^2-6x-2}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x+2}{x^2-6x-2}\right)\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^4}{x^4}\right)}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$

f) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{7x^2+1}{2+7x^2}}\right)^{x^2+3}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{7x^2+1}{2+7x^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2+7x^2}\right)\left(\frac{x^2+3}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{7x^3}\right)}=e^0=1$

86. Página 184

a) $\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}=e^{\lim_{x\to 0}\left[(\cos^2 x)-1\right]\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x)-1}{\operatorname{sen} x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}}=e^{\lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x)}=e^0=1$

b) $\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}(2x)\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}\right)}=e^2$

87. Página 184

Si $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+3}{x-3}\neq\infty\to$ $(x-3)$ divide a x^2-ax+3 $\to 3^2-3a+3=0\to a=\frac{12}{3}=4$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-1)=2$$

88. Página 185

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-ax+3}{x^2+1}=\frac{7+2a}{5}=5\to 2a=25-7\to a=9$$

89. Página 185

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1+2x}{x+4}\right)^{\frac{m}{3-x}}=e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\left(\frac{m}{3-x}\right)}=e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{-m}{x+4}\right)}=e^{\frac{-m}{7}}=e\to m=-7$

b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-2}{3x-4}\right)^{\frac{m}{x-2}}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{3x-4}\right)\left(\frac{m}{x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{m(x-2)(x-1)}{(3x-4)(x-2)}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{m(x-1)}{(3x-4)}}=e^{\frac{m}{2}}=e^2\to m=4$

90. Página 185

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-ax}-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-ax-2}{\left(\sqrt{x^2-ax}+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-ax}{2\sqrt{x^2}}=\frac{-a}{2}=3\to a=-6$$

91. Página 185

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{mx+6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(1-m)x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{mx+6}\right)}\neq\infty\to 2$ es raíz de $(1-m)x-4$.

$$(1-m)2-4=0\Rightarrow m=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x+6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{-x+6}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

92. Página 185

a) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x(\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^2=1$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}x=0$

93. Página 185

a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-x^2+1\right)=-3$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-x^2+1\right)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\sqrt{x+1}\right)=0\end{cases}\to \lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$

f) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-7)=2\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x+1}=2\end{cases}\to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

94. Página 185

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2^x+1\right)=1$

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2^x+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-3x+2)=2\end{cases}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2^x+1\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(-3x+2)=-1$

e) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2x}{x-1}=-4\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(-3x+2)=-4\end{cases}\to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=-4$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x}{x-1}=-2$

95. Página 185

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\dfrac{-3}{0}=\infty\to \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-4}{(x+1)(-x+2)}=-\infty\end{matrix}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{-(x+1)}=-\dfrac{4}{3}$;

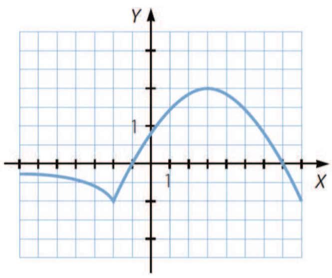
$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{-(x+1)}=-\dfrac{4}{3}$ → Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{4}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-\dfrac{5}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-4}{-x^2+x+2}=-1$

96. Página 185

Respuesta abierta, por ejemplo:



97. Página 185

a) $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

$f(2) = 4 = \lim_{x\to 2} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

b) No existe $f(0)$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0{,}5 \rightarrow$ Existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$; tiene una discontinuidad evitable.

$f(2) = 2{,}5 = \lim_{x\to 2} f(x)$

La función es continua en $x = 2$.

c) No existe f(1).

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$; tiene una discontinuidad de salto finito.

d) $f(-1) = 1 = \lim_{x\to -1} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = -1$.

$f(2) = 1{,}5$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}5 \rightarrow$ Existe $\lim_{x\to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim_{x\to 2} f(x) = 2{,}5$

La función no es continua en $x = 2$; tiene una discontinuidad evitable.

e) No existe $f(-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$; tiene una discontinuidad de salto infinito.

$f(2) = 3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$; tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$; tiene una discontinuidad de salto finito.

98. Página 185

a) La función es polinómica; por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$. Estudiamos la discontinuidad en los ceros del denominador, $x = 2$ y $x = 3$.

No existe $f(2)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$

La función no es continua en $x = 2$; tiene una discontinuidad de salto infinito.

No existe $f(3)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$

La función no es continua en $x = 3$; tiene una discontinuidad de salto infinito.

c) $x^2 - 4 \geq 0 \to (x+2)(x-2) \geq 0 \to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to (2+x)(2-x) \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo $[-2, 2]$.

e) No existe $f(0)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$.

g) $y = 2|x-1| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ → Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-2x) = 0;\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} 2|x-1| = 0 = y(0)$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

g) $y = |x-3| + |x+3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en $x = -3$ o $x = 3$.

En $x = -3$:

$\lim\limits_{x\to -3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^-} (-2x) = 6;\ \lim\limits_{x\to -3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to -3^+} 6 = 6$

$\lim\limits_{x\to -3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(-3)$ → La función es continua en $x = -3$.

En $x = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^-} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^-} (6) = 6;\ \lim\limits_{x\to 3^+} (|x-3| + |x+3|) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 3} (|x-3| + |x+3|) = 6 = y(3)$

La función es continua en $x = 3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

99. Página 185

a) Estudiamos la continuidad en $x = 2$, ya que la función es continua en el resto de puntos.

No existe $f(2)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier x real $\rightarrow$ La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Estudiamos la continuidad en $x = 1$, que es el único cero del denominador.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y $x = 3$, que anulan el denominador.

No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

No existe $f(3)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) Estudiamos la continuidad en $x = -3$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(-3)$. Además: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

No existe $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

f) Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

100. Página 185

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2-x}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)}$

El único punto donde $f(x)$ puede ser discontinua es $x = 2$:

No existe $f(2)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2}(-x-1)=-3$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

b) Si definimos $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{2-x} & \text{si } x\neq 2\\ -3 & \text{si } x=2\end{cases}$, $g(x)$ contiene a $f(x)$ y, además, es continua en $\mathbb{R}$.

101. Página 186

a) El dominio de la función es $[-5, 4)\cup(4, +\infty)$; $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{18-6\sqrt{x+5}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{6\left(3-\sqrt{x+5}\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-6(x-4)}{(x-4)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-6}{3+\sqrt{x+5}}=-1$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $g(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<-5\\ f(x) & \text{si } -5\leq x<4\\ -1 & \text{si } x=4\\ f(x) & \text{si } x>4\end{cases}$

102. Página 186

a) $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x^2-2x+1)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x+1}{4}=\frac{1}{4}$$

b) $g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x=0\end{cases}$

103. Página 186

$f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}$ $\rightarrow$ La función es continua en $\mathbb{R}-\{-2, -1\}$.

En $x = -2$: $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{-(x-2)}{x+1}=-4$

$f(x)$ es discontinua evitable en $x = -2$.

En $x = -1$: $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{4-x^2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=\frac{3}{0}=\infty\rightarrow\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{4-x^2}{(x+2)(x+1)}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No existe $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$.

$f(x)$ es discontinua de salto infinito en $x = -1$.

104. Página 186

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x=-2$. La primera es una recta y es continua, y la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{(2x-1)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2x-1)=-5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x=-2$ es evitable.

Así, la segunda función es: $g(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<-2\\ 2x-1 & \text{si } x>-2\end{cases}$

105. Página 186

a) En $x=-1$, la función $f(x)=-x$; por tanto, es continua.

En $x=0$, existe $f(0)=2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$.

En $x=3$, no existe $f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x+2)=5 \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}5=5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=3$.

b) En $x=-1$, existe $f(-1)=-3$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(5x+2)=-3 \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+6}{x^2}\right)=5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=-1$.

En $x=0$, no existe $f(0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+6}{x^2}=\frac{6}{0}=\infty \to \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x+6}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x+6}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

En $x=3$, existe $f(3)=1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+6}{x^2}=1 \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-2x-2\right)=1$$

$f(x)$ es continua en $x=3$.

106. Página 186

Existe $f(2)$: $f(2)=-\dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(2-x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{-2}{3}$$

$\lim_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{2}{3}=f(2)\to$ $f(x)$ es continua en $x=2$.

107. Página 186

Las tres funciones son polinómicas y, por tanto, continuas en su dominio.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$:

En $x = 0$, existe $f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \to$ $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$, existe $f(2) = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2 \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = 3$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

108. Página 186

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$f(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

109. Página 186

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$:

En $x = 0$, existe $f(0) = e^0 = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1) = -1 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$, existe $f(2) = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} e^x = e^2 \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{3-x} = 2$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

En $x = 3$, no existe $f(3)$.

$$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{3-x} = \frac{2}{0} \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{3-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{3-x} = -\infty \end{array}\right\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

110. Página 186

a) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=0$.

$f(0)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \to$ Es continua en $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}-x-5 & \text{si } x<-5\\ x+5 & \text{si } x\geq -5\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=-5$.

$f(-5)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -5} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -5} f(x)=f(-5) \to$ Es continua en $x=-5$.

c) $f(x)=\begin{cases}3-2x & \text{si } x\leq \dfrac{3}{2}\\ 2x-3 & \text{si } x> \dfrac{3}{2}\end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x=\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right) \to$ Es continua en $x=\dfrac{3}{2}$.

d) $x^2-x-6=0 \to x=-2;\ x=3 \to f(x)=\begin{cases}x^2-x-6 & \text{si } x\leq -2\\ -x^2+x+6 & \text{si } -2<x\leq 3\\ x^2-x-6 & \text{si } x>3\end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x=-2$ o en $x=3$.

$f(-2)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -2} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2) \to$ Es continua en $x=-2$.

$f(3)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \to$ Es continua en $x=3$.

e) $6-x^2=0 \to \begin{cases}x=\sqrt{6}\\ x=-\sqrt{6}\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}x^2-6 & \text{si } x\leq -\sqrt{6}\\ 6-x^2 & \text{si } -\sqrt{6}<x\leq \sqrt{6}\\ x^2-6 & \text{si } x>\sqrt{6}\end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x=-\sqrt{6}$ o en $x=\sqrt{6}$.

$f\left(-\sqrt{6}\right)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x)=f\left(-\sqrt{6}\right) \to$ La función es continua en $x=-\sqrt{6}$.

$f\left(\sqrt{6}\right)=0$ $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \sqrt{6}^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to \sqrt{6}^+} f(x)=0\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x)=0 \to \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x)=f\left(\sqrt{6}\right) \to$ La función es continua en $x=\sqrt{6}$.

111. Página 186

La función será continua en $x = 2$ si $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2} f(x) = -1$$

Entonces la función es continua en $x = 2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

112. Página 186

a) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$:

Existe $f(4) = 12$. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^2 - 4) = 12$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x + a) = 4 + a$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 4^-} f(x) = 12 = 4 + a = \lim_{x\to 4^+} f(x) \to a = 8$

b) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 1$:

Existe $f(1) = 3 - a$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 - ax) = 3 - a$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 + a\ln x) = 2$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \to a = 1$

c) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -2$.

Existe $f(-2) = 2$. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \sqrt{2 - x} = 2$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2 - 3x + a) = 10 + a$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to -2^-} f(x) = 2 = 10 + a = \lim_{x\to -2^+} f(x) \to a = -8$

d) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -1$.

Existe $f(-1) = -a$. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{a}{x} = -a$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + 1) = 2$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x\to -1^+} f(x) \to a = -2$

e) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 2$.

Existe $f(2) = 3a^2$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3a^x = 3a^2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{12}{x-1} = 12$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 2$

f) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$ o $x = 2$.

Existe $f(0) = 1$. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 1) = 1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + a^2) = a^2$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to a = \pm 1$

Existe $f(2) = 2a + 1$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x + a^2) = 2 + a^2$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax + 1) = 2a + 1$

$f(x)$ es continua $\to \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \to a = 1$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 1$.

g) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x=a$.

Existe $f(a)=2^a+1$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\left(2^x+1\right)=2^a+1$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} 5=5$

$f(x)$ es continua $\to \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=2^a+1=5=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\to a=2$

h) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x=0$.

Existe $f(0)=2+a$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2+a\cdot\cos x)=2+a$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^{-x}+6x-3\right)=-2$

$f(x)$ es continua $\to \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2+a=-2=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\to a=-4$

i) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x=4$.

Existe $f(4)=1$. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\cos(x-4)\right)=1$ $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 2^{x-2a}=2^{4-2a}$

$f(x)$ es continua $\to \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=1=2^{4-2a}=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)\to a=2$

113. Página 186

a) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x=0$ y $x=3$.

En $x=0$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Existe $f(0)=b$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+2x-1\right)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$

Por tanto, $b=-1$.

En $x=3$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Existe $f(3)=1$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=3a-1$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(1)=1$

Por tanto, $a=\dfrac{2}{3}$.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x=-1$ y $x=2$.

En $x=-1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

Existe $f(-1)=a-3$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(ax^2+3x\right)=a-3$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^3-a\right)=-1-a$

Por tanto, $a=1$.

En $x=2$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Existe $f(2)=8-a=7$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^3-a\right)=8-a=7$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(bx-3)=2b-3$

Por tanto, $b=5$.

114. Página 186

a) La función $\frac{2}{2-x}$ no es continua en $x = 2$, sean cuales sean los valores de a y b.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 1$.

En $x = -1$, la función será continua si: $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = -a + 3$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax+3) = -a+3$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (bx^2+5) = b+5$

Por tanto, $b = -a - 2$.

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = b + 5$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (bx^2+5) = b+5$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(2\sqrt{x+3}+a\right) = 4+a$

Por tanto, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

c) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x = \pi$.

En $x = 0$, la función será continua si: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = 3$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3+2x+3) = 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a\cdot \operatorname{sen} x + b) = b$

Por tanto, $b = 3$.

En $x = \pi$, la función será continua si: $\lim_{x\to \pi} f(x) = f(\pi)$

Existe $f(\pi) = b = 3$.

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} (a\cdot \operatorname{sen} x + b) = b = 3$ $\qquad$ $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \left((x-\pi)^2 + a\right) = a$

Por tanto, $a = 3$.

d) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -2$ y $x = 2$.

En $x = -2$, la función será continua si: $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$

Existe $f(-2) = -7$.

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (3x-1) = -7$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (ax^2+bx) = 4a-2b$

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 4a + 2b$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2+bx) = 4a+2b$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2^x-5) = -1$

Entonces: $\left.\begin{matrix} 4a-2b=-7 \\ 4a+2b=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow a=-1,\ b=\frac{3}{2}$

115. Página 187

a) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<\frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{si } \frac{1}{2}\leq x<3 \\ a^x-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{1}{2}$ y $x=3$.

En $x=\frac{1}{2}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

Existe $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}(1-2x)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}(-1+2x)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{1}{2}$.

En $x=3$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Existe $f(3)=a^3-3$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-1+2x)=5$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(a^x-3\right)=a^3-3$

Entonces, a = 2.

b) $f(x)=\begin{cases} 4-3x & \text{si } x<\frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3}\leq x<2 \\ a^x-x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{4}{3}$ y $x=2$.

En $x=\frac{4}{3}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} f(x)=f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{3}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^-}(4-3x)=0;$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+}(3x-4)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{4}{3}$.

En $x=2$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Existe $f(2)=a^2-2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-4)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(a^x-x\right)=a^2-2$

Entonces, $a=2$.

c) $f(x)=\begin{cases} 4-5x & \text{si } x<\frac{4}{5} \\ 5x-4 & \text{si } \frac{4}{5}\le x<1 \\ |a-2| & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, *f*(*x*) será continua si lo es en $x=\frac{4}{5}$ y $x=1$.

En $x=\frac{4}{5}$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} f(x)=f\left(\frac{4}{5}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{5}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}(4-5x)=0$ $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+}(5x-4)=0$

f(*x*) es continua en $x=\frac{4}{5}$.

En $x=1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Existe $f(1)=|a-2|$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(5x-4)=1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}|a-2|=|a-2|$

Entonces, $a=1$ o $a=3$.

d) Supongamos que $a\le 4$, entonces: $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x<a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, *f*(*x*) será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=a^2-6a+8$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(-x+4)=-a+4$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(x^2-6x+8\right)=a^2-6a+8$

$-a+4=a^2-6a+8\to a^2-5a+4=0\to a=4 \text{ o bien } a=1$

Supongamos que $a>4$, entonces: $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x<4 \\ x-4 & \text{si } 4\le x<a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a \end{cases}$

Cada una de las funciones es continua en su dominio.

f(*x*) es continua en $x=4$ porque proviene del valor absoluto; *f*(*x*) será continua si lo es en $x=a$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(x-4)=a-4$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(x^2-6x+8\right)=a^2-6a+8$

$a-4=a^2-6a+8\to a^2-7a+12=0\to a=3 \text{ o } a=4$, pero hemos supuesto que a es mayor que 4.

Se deduce que la función es continua para $a=1$ y $a=4$.

e) Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, *f*(*x*) será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=sen^2\, a$.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} sen^2(x)=sen^2 a$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(-cos^2(x)+x\right)=-cos^2(a)+a$

$sen^2 a=-cos^2(a)+a\to sen^2 a+cos^2 a=a\to a=1$

116. Página 187

a) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -1 < 0$ $f(3) = 749 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

b) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; por tanto, es continua en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -3 < 0$ $f(3) = \frac{15}{7} > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

c) La función $f(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$; por tanto, es continua en el intervalo [0, 3].

$f(0) = 3 > 0$ $f(3) = \ln 4 - 3 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

d) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -1 < 0$ $f(3) = sen\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) + 3 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

e) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, si es continua en $x = 1$:

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = 0$. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 2) = 0$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 1\right) = 0$

Entonces la función es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -2 < 0$ $f(3) = 8 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

f) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, si es continua en $x = 1$:

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = 0$. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^3 + x - 2\right) = 0$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(2x^2 - 2\right) = 0$

Entonces la función es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -2 < 0$ $f(3) = 16 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

g) La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, si es continua en $x = 1$:

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = 0$. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\log_2(x + 1) + x - 2) = 0$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0$

Entonces la función es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en el intervalo [0, 3].

$f(0) = -2 < 0$ $f(3) = 10 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

117. Página 187

La función $f(x)$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$; por tanto, también será continua, por ejemplo, en el intervalo $[1, e^2]$. $f(1) = -1 < 0$ $f(e^2) = e > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $a \in (1, e^2)$ tal que $f(a) = 0 \longrightarrow$ Existe un punto de coordenadas $(a, 0)$.

118. Página 187

La función $f(x)$ es continua en $[0, +\infty)$; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo $\left[\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right]$, de amplitud $\frac{1}{4}$: $f\left(\frac{11}{8}\right) = -0,28 < 0$ $f\left(\frac{13}{8}\right) = 0,37 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, corta al eje X en el punto $(c, 0)$.

119. Página 187

La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, de amplitud $\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{5}{2} < 0$ $f(3) = e - 2 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ tal que $f(c) = 0$.

120. Página 187

La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo $[-4, -2]$, de amplitud 2: $f(-4) = -7 < 0$ $f(-2) = 1 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-4, -2)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, c es raíz del polinomio.

121. Página 187

La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por tanto, también es continua en el intervalo $[-3, -2]$.

$f(-3) = -3 < 0$ $f(-2) = 2 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, c es raíz del polinomio.

Acotamos la solución: $f(-3) = -3 < 0$ $f(-2,5) = 0,63 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-3; -2,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, c es raíz del polinomio.

$f(-2,7) = -0,51 < 0$ $f(-2,5) = 0,63 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-2,7; -2,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, c es raíz del polinomio.

$f(-2,7) = -0,51 < 0$ $f(-2,6) = 0,1 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un $c \in (-2,7; -2,6)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, c es raíz del polinomio. Escogiendo cualquier número de este intervalo, obtendremos una aproximación de la raíz de la ecuación con un error menor que una décima.

122. Página 187

Consideramos la función $f(x)=2x^2-3x^4+3-x(\operatorname{sen}x+\cos x)-\cos x+\operatorname{sen}x$, que es continua en $\mathbb{R}$; por tanto, la función es continua, por ejemplo, en el intervalo $[-\pi, 0]$ y en el intervalo $[0, \pi]$, y además:

$f(-\pi) = -271{,}63 < 0$

$f(0) = 2 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_1 \in (-\pi, 0)$ tal que $f(c_1) = 0$; por tanto, c_1 es raíz de la ecuación.

$f(0) = 2 > 0$

$f(\pi) = -265{,}35 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_2 \in (0, \pi)$ tal que $f(c_2) = 0$; por tanto, c_2 es raíz de la ecuación.

123. Página 187

Consideramos la función $h(x)=\sqrt{x^2+1}-2+\log(x^4+2)$ que es continua en $\mathbb{R}$. Entonces, la función $h(x)$ es continua en los intervalos $[-2, -1]$ y $[1, 2]$, de amplitud 1. Además:

$h(-2) = 1{,}49 > 0$

$h(-1) = -0{,}11 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_1 \in (-2, -1)$ tal que $h(c_1) = 0$; por tanto, las funciones f y g se cortan en $x = c_1$.

$h(1) = -0{,}112 < 0$

$h(2) = 1{,}49 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $h(c_2) = 0$; por tanto, las funciones f y g se cortan en $x = c_2$.

124. Página 187

Consideramos la función $h(x)=3-\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^4+3x^2-x+1$, que es continua en $\mathbb{R}$. Entonces, la función $h(x)$ también es continua en los intervalos $\left[-\frac{9}{4},-\frac{7}{4}\right]$ y $\left[\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right]$, de amplitud $\frac{1}{2}$. Además:

$h\left(-\frac{9}{4}\right) = -8{,}95 < 0$ $\qquad$ $h\left(-\frac{7}{4}\right) = 2{,}2 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_1 \in \left(-\frac{9}{4},-\frac{7}{4}\right)$ tal que $h(c_1) = 0$; por tanto, las funciones f y g se cortan en $x = c_1$.

$h\left(\frac{7}{4}\right) = 1{,}76 > 0$ $\qquad$ $h\left(\frac{9}{4}\right) = -8{,}9 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c_2 \in \left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$ tal que $h(c_2) = 0$; por tanto, las funciones f y g se cortan en $x = c_2$.

125. Página 187

a) Consideramos la función $f(x) = x + 1 - e^{x-1}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado [2, 3]. Además:

$f(2) = 3 - e > 0$ $\qquad$ $f(3) = 4 - e^2 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(2) = 3 - e > 0$ $\qquad$ $f(2,5) = -0,98 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (2; 2,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(2) = 3 - e > 0$ $\qquad$ $f(2,2) = -0,12 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (2; 2,2)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, tiene un punto de corte en $x = c$. Escogiendo $x = 2,1$, obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje X con un error menor que una décima.

b) Consideramos la función $f(x) = x + 1 - x^3 - 3x$, que es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado [0, 1]. Además:

$f(0) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(1) = -2 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(0) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(0,5) = -0,12 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0; 0,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(0,3) = 0,37 > 0$ $\qquad$ $f(0,5) = -0,12 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,3; 0,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$. Escogiendo $x = 0,4$, obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje X con un error menor que una décima.

c) Consideramos la función $f(x) = x + 1 - \ln x - 3$, que es continua en $(0, +\infty)$ y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado [0,1; 1]. Además:

$f(0,1) = 0,4 > 0$ $\qquad$ $f(1) = -1 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1; 1)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(0,1) = 0,4 > 0$ $\qquad$ $f(0,5) = -0,81 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1; 0,5)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(0,1) = 0,4 > 0$ $\qquad$ $f(0,3) = -0,5 < 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1; 0,3)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$. Escogiendo $x = 0,2$, obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje X con un error menor que una décima.

d) Consideramos la función $f(x) = x + 1 - sen\ x$, que es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$. Además:

$f(-\pi) = -\pi + 1 < 0$ $\qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 + 1 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(-2) = -0,09 < 0$ $\qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 + 1 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$.

$f(-2) = -0,09 < 0$ $\qquad f(-1,8) = 0,17 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-2; -1,8)$ tal que $f(c) = 0$; por tanto, la función tiene un punto de corte en $x = c$. Escogiendo $x = -1,9$, obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje X con un error menor que una décima.

126. Página 187

Consideramos la función $h(x) = 2\,sen\,x + 3x - 1$, continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Además:

$h(0) = -1 < 0$ $\qquad h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{3\pi}{2} - 1 > 0$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $h(c) = 0$; por tanto, las funciones y g se cortan en $x = c$.

127. Página 187

Consideramos la función $h(x) = x\ sen\ x - \ln x$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(x)$ es continua en $(0, +\infty)$; por tanto, $h(x)$ es continua en $[2, 3]$.

$h(2) = 1,125 > 0$ $\qquad h(3) = -0,675 < 0$

Aplicamos el teorema de Bolzano → Existe $c \in (2, 3)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, la función se anula en algún punto del intervalo $(2, 3)$; por tanto, $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$.

128. Página 187

La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-6, +\infty]$ y, por tanto, también lo es en el intervalo $[-2, 3]$. Por otro lado, $f(-2) = 2$ y $f(3) = 3$. Entonces, por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores entre 2 y 3 en el intervalo $(-2, 3)$.

129. Página 187

La función $f(x)$ es continua en el conjunto $\mathbb{R} - \{2\}$; por tanto, es continua en el intervalo [3, 5]. Además, como $f(3) = 9$ y $f(5) = 5$, por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores entre 9 y 5, incluido el valor 6, en el intervalo (3, 5), que está contenido en el intervalo (1, 5).

130. Página 187

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; por tanto, también es continua en el intervalo [0, 1]. Además, como $f(0) = 0$ y $f(1) = 3$, por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores entre 0 y 3, incluido el 2, en el intervalo (0, 1).

Aproximamos su valor:

$f(0{,}5) = 0{,}96$ y $f(1) = 3$

$f(0{,}75) = 1{,}82$ y $f(1) = 3$

$f(0{,}75) = 1{,}82$ y $f(0{,}8) = 2{,}03$

$f(0{,}78) = 1{,}95$ y $f(0{,}8) = 2{,}03$

Como la función también es continua en el intervalo [0,78; 0,8], tomará el valor 2 en algún $x \in (0{,}78; 0{,}8)$. Eligiendo $x = 0{,}79$, conseguimos una aproximación de ese número con un error menor que una centésima.

131. Página 187

La función $f(x)$ será continua en el intervalo [0, 5] si es continua en $x = 1$:

Existe $f(1) = 2$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\sqrt{x}+1\right) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\ln x + 2) = 2$$

Entonces, la función es continua en $x = 1$ y, por tanto, es continua en el intervalo [0, 5] y, por el teorema de Weierstrass, la función $f(x)$ alcanza en [0, 5] su máximo y su mínimo absolutos.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 188

No, el ejemplo anterior se trata de un caso concreto, son términos de una serie geométrica con razón $\frac{1}{2}$, por eso la suma de sus términos es un valor finito.

Si elegimos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, su suma no es un valor finito:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \ldots = +\infty$

2. Página 188

Sí, si trabajamos con un recorrido de cualquier distancia $d > 0$, las distancias recorridas en cada zancada serían los términos de la siguiente sucesión:

$$\left\{a_1 = \frac{d}{2}, a_2 = \frac{d}{4}, a_3 = \frac{d}{8}, a_4 = \frac{d}{16}, \ldots, a_n = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right\} \to \text{Serie geométrica con } r = \frac{1}{2}.$$

3. Página 188

Se trata de un límite cuando *n* tiende a infinito.

4. Página 188

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tal y como se ha estudiado en cursos anteriores, podemos sumar los infinitos términos de una serie geométrica usando la siguiente fórmula, si $0 < r < 1$:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = d$$