①

a) $2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow \boxed{\mathrm{dom} f = \mathbb{R}-\{-3\}}$

b) $x^2-6x+9=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm 0}{2}=3 \rightarrow \boxed{\mathrm{dom} f = \mathbb{R}-\{3\}}$$

c) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\ \nexists \rightarrow \boxed{\mathrm{dom} f=\mathbb{R}}$

d) $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \boxed{\mathrm{dom} f = \mathbb{R}-\{-1,+1\}}$

②

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{0}{3}=\boxed{0}$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(-x-2)}=\frac{1}{-4}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & -3 & 2 \\ & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & 0 & 4 \\ & & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

c) $$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{4+6+2}{4-4}=\frac{12}{-0}=\boxed{-\infty}$$

		-2		2	
$4-x^2$	$-$		$+$		$-$

d) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{1}{-1}=\boxed{-1}$$

③

$$f(x)=\frac{3x-x^2}{x^2-9}$$

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \rightarrow \mathrm{dom} f=\mathbb{R}-\{-3,+3\}$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\frac{-9-9}{9-9}=\frac{-18}{0}=\infty \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=-3}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{9-9}{9-9}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-x\cdot\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2} \rightarrow$$ No hay asíntota vertical

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=-1}$$

④

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3x-4}$$

$x^2+3x-4=0$; $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{-3\pm 5}{2}$ ↗ 1, ↘ -4 $\rightarrow \mathrm{dom} f=\mathbb{R}-\{1,-4\}$

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\frac{-5}{0}=\infty \quad \left|\quad \begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -4^-} f(x)=\frac{-5}{+0}=-\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -4^+} f(x)=\frac{-5}{-0}=+\infty\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Discontinuidad de salto Infinito en } x=-4 \rightarrow \text{Asíntota Vertical } x=-4}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)}=\frac{1}{5} \rightarrow \boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=1}$$

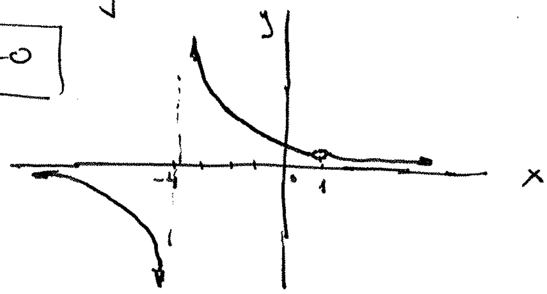
En los restantes valores de x, f será continua por ser una expresión racional no anulándose el denominador.

$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{1,-4\}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \boxed{0}$ Porque el grado del polinomio denominador es mayor que el grado del numerador.

$\boxed{f \text{ tendrá una asíntota horizontal } y=0}$

La gráfica sería algo así:



(5)

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \longrightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}-\{3\}}$

-4 es una función constante, por lo que f es continua en $(-\infty,-1)$

$3x-x^2$ " " " polinómica, " " " f " " " $(-1,2)$

$\frac{1}{x-3}$ " " " racional, " " " f " " " $(2,+\infty)-\{3\}$

Veamos qué sucede en $x=-1$, $x=2$, $x=3$:

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -4$$
$$f(-1) = -4$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -3-(-1)^2=-4$$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=-1}$

$\underline{x=2}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3\cdot 2-2^2 = 6-4=2$$
$$f(2) = 3\cdot 2 - 2^2 = 2$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2-3} = -1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=2}$

$\underline{x=3}$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3^- -3} = \frac{1}{-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{3^+ -3} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x=3}$

Es decir, una asíntota vertical $x=3$

b)

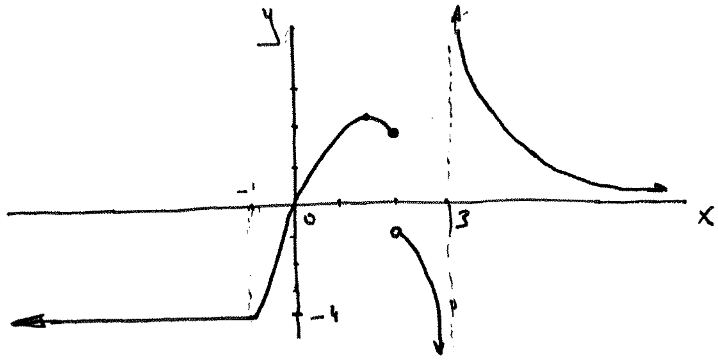
x	y
$-\infty$	-4
-1	-4
-1^+	-4
0	0
V $1'5$	$2'25$
2	2
2^+	-1
3^-	$-\infty$
3^+	$+\infty$
$+\infty$	0

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \longrightarrow \text{Asíntota Horizontal } y=0$$

$y=3x-x^2$

$$x_v = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2} = 1'5 \longrightarrow y_v = 3\cdot 1'5 - 1'5^2 = 2'25$$



(6) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1+a = 1+a = 3-a^2$

$a^2+a-2=0$

$a = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1\pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$

$\boxed{\text{f será continua en } x=1 \text{ para } a=1 \text{ ó } a=-2}$

(7) f es continua en $(-\infty, 0)$ por tener expresión polinómica
f " " " $(0,1)$ " " " " para cualesquiera 'a', 'b'
f " " " $(1,+\infty)$ " " " racional y no anularse el denominador en dicho intervalo, ya que $0 \notin (1,+\infty)$

Ajustemos la continuidad en $x=0$, $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow -1 = b = b \longrightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow a+b = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \longrightarrow a = 2-b = 2-(-1) = \boxed{3}$

(8) a) $y = \dfrac{-2x^2+7x-3}{x^3} \longrightarrow y' = \dfrac{(-4x+7)x^3-(-2x^2+7x-3)\cdot 3x^2}{x^6} =$

$= \dfrac{x^2\cdot[-4x^2+7x+6x^2-21x+9]}{x^6} = \boxed{\dfrac{2x^2-14x+9}{x^4}}$

b) $y = \dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2} \longrightarrow y' = \dfrac{(2x-1)\cdot(2x-1)^2-(x^2-x)\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4} =$

$= \dfrac{(2x-1)\cdot[\cancel{4x^2}\cancel{-4x}+1-\cancel{4x^2}+\cancel{4x}]}{(2x-1)^4} = \boxed{\dfrac{1}{(2x-1)^3}}$

c) $y = x\ln^3(1+2x) \longrightarrow y' = 1\cdot\ln^3(1+2x)+x\cdot 3\ln^2(1+2x)\cdot\dfrac{1}{1+2x}\cdot 2 =$

$= \boxed{\ln^2(1+2x)\left[\ln(1+2x)+\dfrac{6x}{1+2x}\right]}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2}} = (3x^2)^{-1/3} \longrightarrow y' = -\frac{1}{3}(3x^2)^{-1/3-1}\cdot 6x = -2x(3x^2)^{-4/3} = \boxed{\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(3x^2)^4}}}$

e) $y = x^2e^{-x} \longrightarrow y' = 2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = \boxed{xe^{-x}(2-x)}$

f) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}} \longrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}\cdot\dfrac{2(1-x)-2x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2-\cancel{2x}+\cancel{2x}}{2(1-x^2)\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}=\boxed{\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}}}$

9 $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x}$; $\text{dom} f = \mathbb{R}-\{1\}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{2}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{-0} = -\infty$

$\longrightarrow$ Salto Infinito en $x=1$
Asíntota Vertical $x=1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty \longrightarrow$ Cuanto más a la izquierda del gráfico más altos están los puntos

porque grado numerador > grado denominador

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = \dfrac{+\infty}{-\infty} = -\infty \longrightarrow$ Cuanto más a la derecha del gráfico más bajos están los puntos

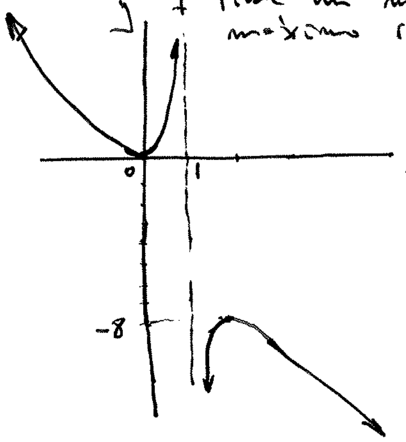
c) $f'(x) = \dfrac{4x(1-x)-2x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{4x-4x^2+2x^2}{(1-x)^2} = \dfrac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{4x-2x^2}{(1-x)^2}=0$; $4x-2x^2=0$; $2x(2-x)=0$ → $x=0$, $x=2$

	0		1		2	
f'	$-$		$+$	$+$		$-$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

f es creciente en $(0,1)\cup(1,2)$
f es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
f tiene un mínimo relativo en $x=0$ y un máximo relativo en $x=2$

	x	y
	$-\infty$	$+\infty$
MIN	0	0
	1^-	$+\infty$
	1^+	$-\infty$
MAX	2	-8
	$+\infty$	$-\infty$



10 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; $\text{dom} f=\mathbb{R}$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1}=1$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=1}$

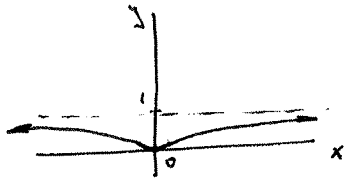
b) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+4)-x^2\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{\cancel{2x^3}+8x-\cancel{2x^3}}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}=0$; $8x=0$; $x=0$

		0	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

f es creciente en $(0,+\infty)$
f es decreciente en $(-\infty,0)$
f tiene un mínimo en $x=0$

x	y
$-\infty$	1
MIN 0	0
$+\infty$	1



(11) a) $x=8 \longrightarrow P(8) = 5$ € cada fotocopia $\Rightarrow 8\cdot 5 = \boxed{40 \text{ € en total}}$

b) $x=40 \longrightarrow P(40) = \dfrac{3\cdot 40+20}{40} = 3'5$ € cada fotocopia $\Rightarrow 40\cdot 3'5 = \boxed{140 \text{ € en total}}$

c) $P(x) = 3'1 \rightarrow 5 = 3'1 \Rightarrow$ Absurdo.

$\rightarrow 3'1 = \dfrac{3x+20}{x}$; $3'1x = 3x+20$; $0'1x = 20$; $\boxed{x = 200 \text{ fotocopias}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \dfrac{3}{1} = 3$. $\boxed{\text{Bajará el precio hasta los 3 €/fotocopia}}$

(12) a) $t+2=0$; $t=\cancel{-2}$ que no pertenece al intervalo del 2º trozo.

dom $f = [0,+\infty)$

$15-t$ es polinómica por lo que f es continua en $[0,5)$

$\dfrac{5t+45}{t+2}$ " racional y no se anula el denominador en su intervalo por lo que f es continua en $(5,+\infty)$

Veamos en $t=5$:

$\lim\limits_{t\to5^-} f(t) = 15-5 = 10$

$f(5) = 15-5 = 10$

$\lim\limits_{t\to5^+} f(t) = \dfrac{5\cdot5+45}{5+2} = 10$

$\rightarrow f$ es continua en $t=5$.

$\boxed{\text{Por lo tanto } f \text{ es continua en su dominio}}$

b) $f'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0<t<5 \\ -\dfrac{35}{(t+2)^2} & \text{si } t>5 \end{cases}$ $\quad\left(\dfrac{5t+45}{t+2}\right)' = \dfrac{5(t+2)-(5t+45)\cdot1}{(t+2)^2} = \dfrac{-35}{(t+2)^2}$

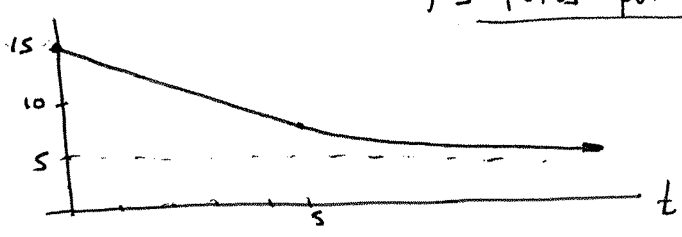
$f'(t)=0 \Rightarrow$ $-1=0$ Absurdo

$\dfrac{-35}{(t+2)^2} = 0$; $-35=0$ Absurdo

	0		5	
f'		$-$		$-$
f		$\searrow$		$\searrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es decreciente en } [0,\infty) \text{ por lo que el rendimiento de la máquina va empeorando con el paso del tiempo}}$

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{5}{1} = 5 \rightarrow$ $\boxed{\text{El número de fotografías por minuto es cada vez menor, pero no bajará de 5 fotos por minuto}}$



(13) a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 18x^2 + 81x - 300)$. $x \geq 0 \Rightarrow \text{dom} f = [0, +\infty)$

$f'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 36x + 81) = -x^2 + 12x - 27$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 12x - 27 = 0$; $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-108}}{-2} = \frac{-12 \pm 6}{-2} \nearrow 3 \searrow 9$

	0 — 3	3 — 9	9 —
f'	−	+	−
f	↘	↗	↘
		MIN. REL. (3)	MAX. REL. (9)

$x = 0 \rightarrow f(0) = 100$
$x = 9 \rightarrow f(9) = 100$

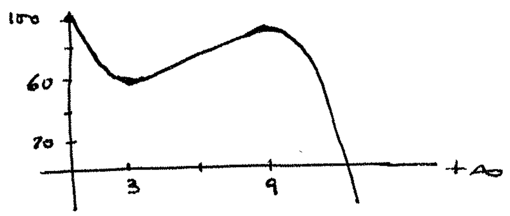
El máximo relativo está en $x=9$, pero el máximo absoluto está por concretar. Podría estar en $x=0$. Veamos:

Cuando se fundó, en el 2006, tenía 100 miembros, fue perdiendo socios durante tres años, pero remontó hasta enero de 2015 en que alcanzó de nuevo 100 socios. Desde entonces ha ido perdiendo miembros.

b) La tendencia del 2015 es decreciente.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, por lo que su tendencia es el quedarse sin socios.

	x	y
	0	100
MIN	3	64
MAX	9	100
	$+\infty$	$-\infty$



(14) $v(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 100$, $0 \leq t \leq 6$

a) $v'(t) = 6t^2 - 30t + 24$

$v'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0$; $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \nearrow 3 \searrow 2$

	0 — 2	2 — 3	3 — 6
v'	+	−	+
v	↗	↘	↗
		MAX. REL. (2)	MIN. REL. (3)

La velocidad aumentó en los dos primeros segundos, disminuyó durante el siguiente segundo para aumentar en los tres últimos.

b) Los extremos absolutos pueden estar en el comienzo o en el final del intervalo $[0, 6]$ o coincidir con los relativos. Comparemos:

$t=0 \rightarrow v(0) = 100$
$t=3 \rightarrow v(3) = 91$
| $91 < 100 \Rightarrow$ Mínimo Absoluto y relativo en $t=3$.

$t=2 \rightarrow v(2) = 104$
$t=6 \rightarrow v(6) = 136$
| $136 > 104 \Rightarrow$ Máximo Absoluto en $t=6$.
En $t=2$ el máximo es únicamente relativo.

c)