Cálculo Integral en exámenes BI-NS (extracto)

Integrales en exámenes BI

Mayo 00

Find the values of $a > 0$, such that $\int_a^{a^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0.22$

Mayo 01

Let $f(t) = t^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{2t^{\frac{5}{3}}}\right)$. Find $\int f(t)\,dt$.

Nov 02

Halle $\int (\theta\cos\theta - \theta)\,d\theta$

Mayo 03

Por medio de la sustitución $y = 2 - x$, o de alguna otra manera, halle $\int \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 dx$

Mayo 03

La función f de dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se define como $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x$.

Esta función puede también expresarse de la forma $R\cos(x-\alpha)$ donde $R > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(a) Halle el valor **exacto** de R y de α.

(b) (i) Halle el recorrido de la función f.

(ii) Diga, dando la razón para ello, si existe o no la función inversa de f.

(c) Halle el valor **exacto** de x que satisface la ecuación $f(x) = \sqrt{2}$.

(d) Utilizando el resultado de que $\int \sec x\,dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$, donde C es una constante, demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$.

Mayo 04

Halle $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Mayo 04

(a) Find $\int_0^m \frac{dx}{x^2+4}$, giving your answer in terms of m.

(b) Given that $\int_0^m \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}$, calculate the value of m.

Mayo 04

Find $\int x^2 e^x\,dx$.

Nov 04

Utilizando la sustitución $2x = \text{sen}\,\theta$, o de cualquier otro modo, halle $\int \left(\sqrt{1-4x^2}\right)dx$.

Mayo 05

Let $f(x) = \frac{x^2+3x+12}{x(x+2)^2}$. Find $\int f(x)\,dx$.

Nov 05

(a) Dado que $\dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} \equiv \dfrac{a}{(1+x)} + \dfrac{bx+c}{(1+x^2)}$, calcule el valor de a, de b y de c.

(b) (i) A partir de lo anterior, halle $I = \int \dfrac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

(ii) Si $I = \dfrac{\pi}{4}$ cuando $x=1$, calcule el valor de la constante de integración. Exprese su respuesta en la forma $p + q \ln r$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Mayo 06

Find $\int e^{2x} \sin x \, \mathrm{d}x$

Mayo 07

Halle $\int_0^{\ln 3} \dfrac{e^x}{e^{2x}+9} \mathrm{d}x$, expresando su respuesta en forma **exacta**.

Mayo 07

Let $f(x) = x \ln x - x$, $x > 0$.

(a) Find $f'(x)$.

(b) Using integration by parts find $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$.

Nov 07

Find $\int_0^a \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $0 < a < 1$.

Mayo 08

Show that $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{24}$

Mayo 08

By using an appropriate substitution find

$$\int \frac{\tan(\ln y)}{y} \mathrm{d}y, \quad y > 0$$

Muestra 08

Find $\int_1^e \dfrac{(\ln x)^3}{x} \mathrm{d}x$

Muestra 08

Find the value of the integral $\int_0^4 \left| x^2 - 4 \right| \mathrm{d}x$

Muestra 08

Find $\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} \, \mathrm{d}x$ using the substitution $x = 2\sin\theta$

Muestra 08

Find $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \mathrm{d}x$

Muestra 06/08

The function f' is given by $f'(x) = 2\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(a) Write down $f''(x)$.

(b) Given that $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, find $f(x)$.

Muestra 06/08

Use the substitution $u = x + 2$ to find $\int \frac{x^3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Nov 08

Calculate the exact value of $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$

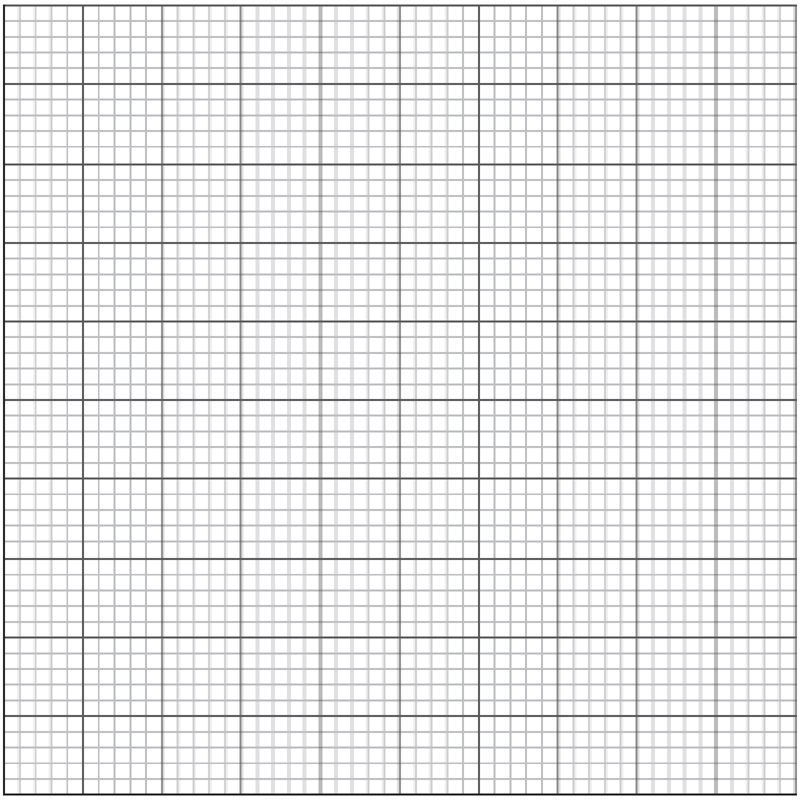
Mayo 09

(a) Compruebe que $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+3} = \frac{5x+11}{x^2+4x+3}$.

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de k tal que $\int_0^2 \frac{5x+11}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = \ln k$

Mayo 09

(a) Let $a > 0$. Draw the graph of $y = \left| x - \frac{a}{2} \right|$ for $-a \le x \le a$ on the grid below.



(b) Find k such that $\int_{-a}^{0} \left| x - \frac{a}{2} \right| \mathrm{d}x = k \int_0^a \left| x - \frac{a}{2} \right| \mathrm{d}x$.

Mayo 09

(a) Integrate $\int \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

(b) Given that $\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}$ and $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, find the value of a

Mayo 11 TZ2 P2#13

Using integration by parts, show that $\int \mathrm{e}^{2x} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$.

Áreas en exámenes BI

Mayo 00

Calculate the area bounded by the graph of $y = x \sin(x^2)$ and the x-axis, between $x = 0$ and the smallest positive x-intercept.

Mayo 01

Let $f(x) = x \cos 3x$.

(a) Use integration by parts to show that

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c.$$

(b) Use your answer to part (a) to calculate the **exact** area enclosed by $f(x)$ and the x-axis in each of the following cases. **Give your answers in terms of π.**

(i) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{3\pi}{6}$

(ii) $\frac{3\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$

(iii) $\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$.

(c) Given that the above areas are the first three terms of an arithmetic sequence, find an expression for the total area enclosed by $f(x)$ and the x-axis for $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{(2n+1)\pi}{6}$, where $n \in \mathbb{Z}^+$. **Give your answers in terms of n and π.**

Nov 04

Halle el área total de las dos regiones encerradas por la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ y la recta $y = x + 3$.

Nov 06

The region enclosed by the curves $y^2 = kx$ and $x^2 = ky$, where $k > 0$, is denoted by R. Given that the area of R is 12, find the value of k.

Mayo 08

Find the area between the curves $y = 2 + x - x^2$ and $y = 2 - 3x + x^2$

Muestra 08

(a) Sketch the curves $y = x^2$ and $y = |x|$.

(b) Find the sum of the areas of the regions enclosed by the curves $y = x^2$ and $y = |x|$.

Mayo 12 TZ2 P1#10

La función f, definida en el dominio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x) = e^{-x}\cos x$.

(a) Indique los dos ceros de f.

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

(c) Se denomina A a la región delimitada por la gráfica, el eje x y el eje y, mientras que se denomina B a la región delimitada por la gráfica y el eje x.

Compruebe que la razón entre el área de A y el área de B es igual a $\dfrac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)}{e^{\pi} + 1}$

Volúmenes en exámenes BI

Nov 06

The function f is defined by $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$, $x \geq 1$.

(a) Find $f'(x)$ and $f''(x)$, simplifying your answers.

(b) (i) Find the **exact** value of the x-coordinate of the maximum point and justify that this is a maximum.

(ii) Solve $f''(x) = 0$, and show that at this value of x, there is a point of inflexion on the graph of f.

(iii) Sketch the graph of f, indicating the maximum point and the point of inflexion.

The region enclosed by the x-axis, the graph of f and the line $x = 3$ is denoted by R.

(c) Find the volume of the solid of revolution obtained when R is rotated through $360°$ about the x-axis.

(d) Show that the area of R is $\dfrac{1}{18}(4 - \ln 3)$.

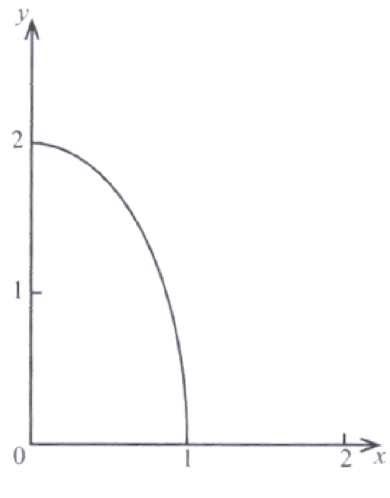
Mayo 07

La gráfica de $y = \text{sen}(3x)$ para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ se rota 2π radianes alrededor del eje x.

Halle el volumen **exacto** del sólido de revolución así generado.

Mayo 09

Considere la parte de la curva $4x^2 + y^2 = 4$ que se muestra en la siguiente figura.



(a) Halle una expresión para $\dfrac{dy}{dx}$ en función de x y de y

(b) Halle la pendiente de la tangente en el punto $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(c) Se rota esta curva 2π radianes alrededor del eje x, formándose así un cuenco.
Calcule el volumen de este cuenco.

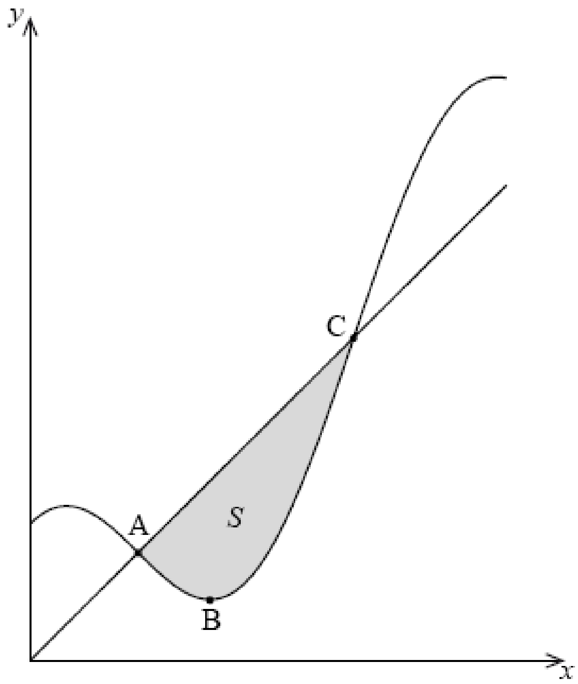
Mayo 08

The region bounded by the curve $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ and the lines $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$ is rotated through 2π radians about the x-axis.

Find the volume of the solid generated.

Mayo 09

Let f be a function defined by $f(x) = x + 2\cos x$, $x \in [0, 2\pi]$. The diagram below shows a region S bound by the graph of f and the line $y = x$.



A and C are the points of intersection of the line $y = x$ and the graph of f, and B is the minimum point of f.

(a) If A, B and C have x-coordinates $a\dfrac{\pi}{2}$, $b\dfrac{\pi}{6}$ and $c\dfrac{\pi}{2}$, where $a, b, c \in \mathbb{N}$, find the values of a, b and c.

(b) Find the range of f.

(c) Find the equation of the normal to the graph of f at the point C, giving your answer in the form $y = px + q$.

(d) The region S is rotated through 2π about the x-axis to generate a solid.

(i) Write down an integral that represents the volume V of this solid.

(ii) Show that $V = 6\pi^2$.

Mayo 10
TZ1
P1#8

The region enclosed between the curves $y = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$ and $y = \mathrm{e}\sqrt{x}$ is rotated through 2π about the x-axis. Find the volume of the solid obtained.

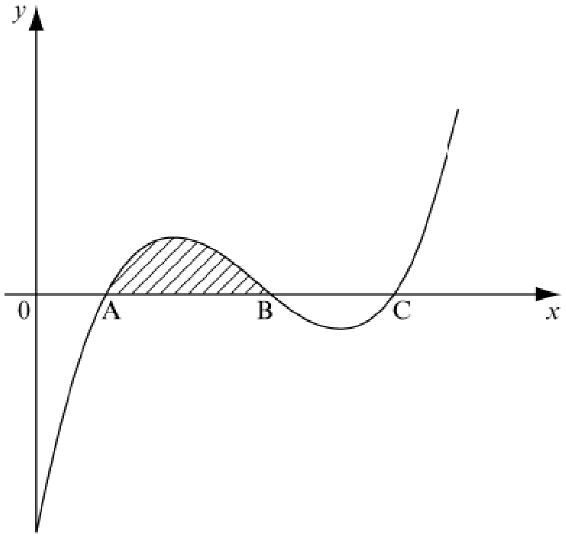
Cálculo Integral con uso de calculadora gráfica en exámenes BI

Nov 01

Find the area enclosed by the curves $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ and $y = e^{\frac{x}{3}}$, given that $-3 \le x \le 3$

Mayo 02

En la figura siguiente se muestra parte de la curva $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$. La curva cruza el eje de las x en los puntos A , B y C .



(a) Halle el valor de la coordenada x de A .

(b) Halle el valor de la coordenada x de B .

(c) Halle el área de la región sombreada.

Mayo 06

Let $f(x) = 2^{0.5x}$ and $g(x) = 3^{-0.5x} + \dfrac{5}{3}$. Let R be the region completely enclosed by the graphs of f and g, and the y-axis. Find the area of R.

Mayo 01

Let $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, $\pi \le x \le 3\pi$. Find the area enclosed by the graph of f and the x-axis.

Nov 02

(a) En los mismos ejes, trace los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, donde

$f(x) = 4 - (1-x)^2$, para $-2 \le x \le 4$,

$g(x) = \ln(x+3) - 2$, para $-3 \le x \le 5$.

(b) (i) Escriba la ecuación de toda asíntota vertical.

(ii) Escriba las intersecciones de $g(x)$ con el eje x y con el eje y.

(c) Halle los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

(d) Sea A la región en la cual $f(x) \ge g(x)$ y $x \ge 0$.

(i) Sombree, en la gráfica, la región A.

(ii) Escriba una integral que represente el área sombreada A.

(iii) Evalúe esta integral.

(e) Halle, en la región A, la distancia vertical máxima entre $f(x)$ y $g(x)$.

Mayo 03

Calcule el área encerrada por las curvas $y = \ln x$ e $y = e^x - e$, $x > 0$

Mayo 04

Sea $f(x) = x\cos x$, para $0 \le x \le \pi$. La curva de $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = b$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$ indicando las posiciones aproximadas de a y b.

(b) Halle el valor de

(i) a;

(ii) b.

(c) Utilizando la integración por partes halle una expresión para $\int x\cos x \, dx$.

(d) A partir de lo anterior halle el valor **exacto** del área encerrada por la curva y el eje x, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Mayo 05

Find the area of the region enclosed by the graphs of $f(x) = 4 - x^2$ and $g(x) = (x+1)\cos x$.

Nov 08

The function f is defined by $f(x) = x\sqrt{9-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$.

(a) Write down the largest possible domain, for each of the two terms of the function, f, and hence state the largest possible domain, D, for f.

(b) Find the volume generated when the region bounded by the curve $y = f(x)$, the x-axis, the y-axis and the line $x = 2.8$ is rotated through 2π radians about the x-axis.

(c) Find $f'(x)$ in simplified form.

(d) **Hence** show that $\int_{-p}^{p} \frac{11-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2p\sqrt{9-p^2} + 4\arcsin\left(\frac{p}{3}\right)$, where $p \in D$.

(e) Find the value of p which maximises the value of the integral in (d).

Nov 11
P2#1

Consider the graph of $y = x + \sin(x-3)$, $-\pi \le x \le \pi$.

(a) Sketch the graph, clearly labelling the x and y intercepts with their values.

(b) Find the area of the region bounded by the graph and the x and y axes.

Distribuciones continuas de Probabilidad en exámenes BI

Mayo 04

Let $f(x)$ be the probability density function for a random variable X, where

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{for } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Show that $k = \dfrac{3}{8}$.

(b) Calculate

(i) $\mathrm{E}(X)$;

(ii) the median of X.

Nov 04

Una variable aleatoria continua X tiene un función densidad de probabilidad dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= k(2x - x^2), && \text{para } 0 \le x \le 2 \\ f(x) &= 0, && \text{para el resto.} \end{aligned}$$

(a) Halle el valor de k.

(b) Halle $\mathrm{P}(0,25 \le x \le 0,5)$.

Mayo 06

The time, T minutes, required by candidates to answer a question in a mathematics examination has probability density function

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{72}(12t - t^2 - 20), & \text{for } 4 \le t \le 10 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Find

(i) μ, the expected value of T;

(ii) σ^2, the variance of T.

(b) A candidate is chosen at random. Find the probability that the time taken by this candidate to answer the question lies in the interval $[\mu - \sigma, \mu]$.

Mayo 07

La función densidad de probabilidad f de una variable aleatoria continua X viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(x^2+4)}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) Indiquez la moda de X.

(b) Halle el valor **exacto** de $\mathrm{E}(X)$.

Trayectorias de Móviles en exámenes BI

Mayo 02

Se lanza una partícula según una trayectoria rectilínea. Pasados t segundos, su velocidad v en metros por segundo esta dada por $v = \dfrac{1}{2+t^2}$.

(a) Halle la distancia recorrida durante el primer segundo.

(b) Halle una expresión de la aceleración en el instante t.

Mayo 06

Particle A moves in a straight line, starting from O_A, such that its velocity in metres per second for $0 \le t \le 9$ is given by

$$v_A = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2}.$$

Particle B moves in a straight line, starting from O_B, such that its velocity in metres per second for $0 \le t \le 9$ is given by

$$v_B = e^{0.2t}.$$

(a) Find the maximum value of v_A, justifying that it is a maximum.

(b) Find the acceleration of B when $t = 4$.

The displacements of A and B from O_A and O_B respectively, at time t are s_A metres and s_B metres. When $t = 0$, $s_A = 0$, and $s_B = 5$.

(c) Find an expression for s_A and for s_B, giving your answers in terms of t.

(d) (i) Sketch the curves of s_A and s_B on the same diagram.

(ii) Find the values of t at which $s_A = s_B$.

Mayo 07

Una partícula se mueve en línea recta. Transcurrido un tiempo t segundos, su desplazamiento respecto a un punto fijo O es igual a s metros, y su velocidad v en metros por segundo viene dada por la expresión $v = 3t^2 - 4t + 2$, con $t \ge 0$. Cuando $t = 0$, $s = -3$. Halle el valor de t para el cual la partícula se encuentra en O.

Mayo 11 TZ2 P2#3

A skydiver jumps from a stationary balloon at a height of 2000 m above the ground. Her velocity, v m s^{-1}, t seconds after jumping, is given by $v = 50(1 - e^{-0.2t})$.

(a) Find her acceleration 10 seconds after jumping.

(b) How far above the ground is she 10 seconds after jumping?

Mayo 13 TZ2 P2#10

La aceleración de un coche es igual a $\dfrac{1}{40}(60 - v)$ m s^{-2}, siendo v su velocidad en v m s^{-1}. Sabiendo que el coche parte de la posición de reposo, halle la velocidad del coche al cabo de 30 segundos.