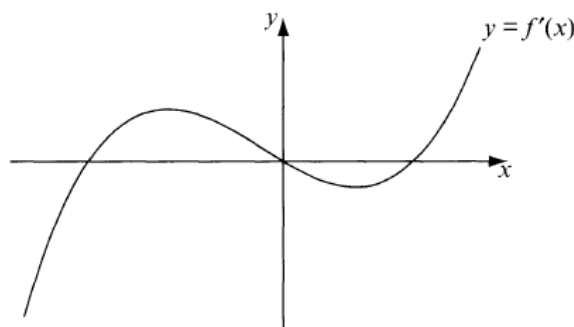


Funciones Derivables en exámenes BI-NS

Mayo 00

The diagram shows the graph of $y = f'(x)$.Indicate, and label clearly, **on the graph**

- (a) the points where $y = f(x)$ has minimum points;
- (b) the points where $y = f(x)$ has maximum points;
- (c) the points where $y = f(x)$ has points of inflexion.

Mayo 00

Let $f(x) = \ln |x^5 - 3x^2|$, $-0.5 < x < 2$, $x \neq a$, $x \neq b$; (a , b are values of x for which $f(x)$ is not defined).

- (a) (i) Sketch the graph of $f(x)$, indicating on your sketch the number of zeros of $f(x)$. Show also the position of any asymptotes.
- (ii) Find all the zeros of $f(x)$, (that is, solve $f(x) = 0$).
- (b) Find the **exact** values of a and b .
- (c) Find $f'(x)$, and indicate clearly where $f'(x)$ is not defined.
- (d) Find the **exact** value of the x -coordinate of the local maximum of $f(x)$, for $0 < x < 1.5$. (You may assume that there is no point of inflexion.)

Mayo 00

Let $f: x \mapsto e^{\sin x}$.

- (a) Find $f'(x)$.

There is a point of inflexion on the graph of f , for $0 < x < 1$.

- (b) Write down, but do not solve, an equation in terms of x , that would allow you to find the value of x at this point of inflexion.

Nov 00

For the function $f: x \mapsto x^2 \ln x$, $x > 0$, find the function f' , the derivative of f with respect to x .

Nov 00

For the function $f: x \mapsto \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$, find the possible values of $\sin x$ for which $f'(x) = 0$

Mayo 01

Using mathematical induction, prove that $\frac{d^n}{dx^n} (\cos x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, for all positive integer values of n .

Mayo 01

The function f is given by $f: x \mapsto e^{(1+\sin \pi x)}$, $x \geq 0$.

(a) Find $f'(x)$.

Let x_n be the value of x where the $(n+1)^{\text{th}}$ maximum or minimum point occurs, $n \in \mathbb{N}$. (i.e. x_0 is the value of x where the first maximum or minimum occurs, x_1 is the value of x where the second maximum or minimum occurs, etc).

(b) Find x_n in terms of n .

Nov 01

Consider the function $y = \tan x - 8 \sin x$.

(a) Find $\frac{dy}{dx}$.

(b) Find the value of $\cos x$ for which $\frac{dy}{dx} = 0$.

Mayo 02

La función f se define como

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

(a) (i) Halle una expresión de $f'(x)$, simplificando su respuesta.

(ii) Las tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos A y B son paralelas al eje de las x . Halle las coordenadas de A y de B.

(b) (i) Trace de forma aproximada la gráfica de $y = f'(x)$.

(ii) Halle el valor de las coordenadas según x de los tres puntos de inflexión de la gráfica de f .

(c) Halle el recorrido de

(i) f ;

(ii) la función compuesta $f \circ f$.

Nov 02

Halle la coordenada x del punto de inflexión de la gráfica de $y = xe^x$, $-3 \leq x \leq 1$

Nov 02

Halle las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $y = \frac{x^2 - 5x - 4}{x^2 - 5x + 4}$

Mayo 03

La función f está definida por $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, para $x > 0$.

(a) (i) Demuestre que

$$f'(x) = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

(ii) Obtenga una expresión de $f''(x)$. Simplifique su respuesta en la medida de lo posible.

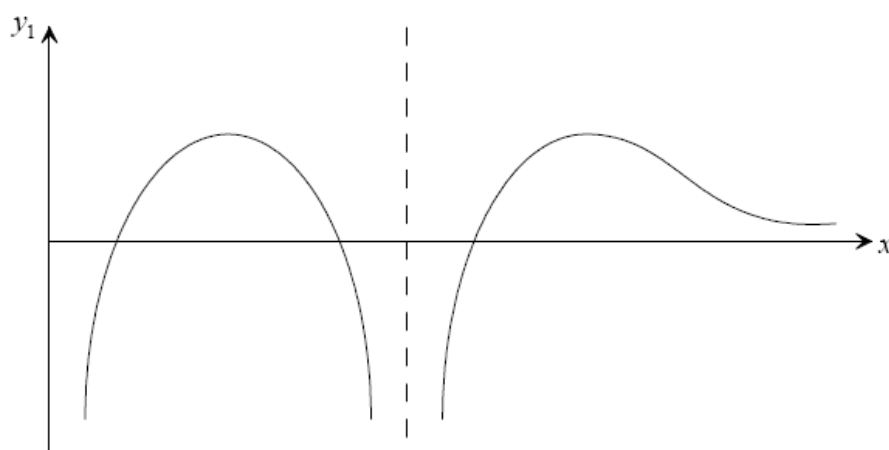
(b) (i) Halle el valor **exacto** de x que satisface la ecuación $f'(x) = 0$.

(ii) Demuestre que para este valor se obtiene un máximo de $f(x)$.

(c) Halle las abscisas de los dos puntos de inflexión de la gráfica de f .

Mayo 03

El diagrama a continuación muestra la curva $y_1 = f(x)$.



En los ejes a continuación, trace la gráfica de $y_2 = |f'(x)|$.



Nov 03

La ecuación de una curva es $f(x) = \frac{a}{b + e^{-cx}}$, $a \neq 0$, $b > 0$, $c > 0$.

(a) Compruebe que $f''(x) = \frac{ac^2 e^{-cx} (e^{-cx} - b)}{(b + e^{-cx})^3}$.

(b) Halle las coordenadas del punto de la curva donde $f''(x) = 0$.

(c) Compruebe que el anterior es un punto de inflexión.

Nov 03

Sea $y = e^{3x} \sin(\pi x)$.

(a) Halle $\frac{dy}{dx}$.

(b) Halle el menor valor positivo de x para el cual $\frac{dy}{dx} = 0$.

Nov 03

Considere la ecuación $2xy^2 = x^2y + 3$.

(a) Halle y cuando $x = 1$ e $y < 0$.

(b) Halle $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 1$ e $y < 0$.

Nov 03

Dada la función $f(t) = 3 \sec^2 t + 5t$

- (a) halle $f'(t)$;
- (b) halle los valores **exactos** de
 - (i) $f(\pi)$;
 - (ii) $f'(\pi)$.

Mayo 04

The function f is defined by $f: x \mapsto 3^{x^2}$.Find the solution of the equation $f'(x) = 2$

Mayo 04

La función f viene definida por $f: x \mapsto 3^x$ Resuelva la ecuación $f''(x) = 2$.

Nov 04

Si $y = \ln(2x-1)$, halle $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Mayo 05

La función f está definida por $f(x) = e^{px}(x+1)$, con $p \in \mathbb{R}$.

- (a) (i) Compruebe que $f'(x) = e^{px}(p(x+1) + 1)$.
- (ii) Sea $f^{(n)}(x)$ la derivada $f(x)$ respecto de x , n veces. Demuestre por inducción matemática que

$$f^{(n)}(x) = p^{n-1} e^{px} (p(x+1) + n), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

- (b) Cuando $p = \sqrt{3}$ la curva de f presenta un mínimo y un punto de inflexión. Halle el valor **exacto** de la abscisa, x , de

- (i) el mínimo;
- (ii) el punto de inflexión.

Mayo 05

A function f is defined by $f(x) = ax^3 + bx^2 + 30x + c$ where a , b and c are constants. The graph of f has a maximum at $(1, 7)$ and a point of inflexion when $x = 3$. Find the value of a , of b and of c .

Mayo 05

Consider the function $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 4}$

- (a) Find $f'(x)$.
- (b) Find $f''(x)$.

Mayo 05

Sea $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 5}{x + 2}$, $x \neq -2$

- (a) Halle $f'(x)$.
- (b) Resuelva $f'(x) > 2$.

Mayo 05

La función f viene dada por $f(x) = \frac{x^5 + 2}{x}$, $x \neq 0$. La gráfica de f tiene un punto de inflexión en P.

Halle las coordenadas de P.

Nov 05

- (a) Escriba el término en x^r del desarrollo de $(x+h)^n$, donde $0 \leq r \leq n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.
- (b) A partir de lo anterior, derive x^n , $n \in \mathbb{Z}^+$, aplicando la definición de derivada.
- (c) Comenzando del resultado $x^n \times x^{-n} = 1$, deduzca la derivada de x^{-n} , $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nov 05

Given that the maximum value of $\frac{1}{4\sin\theta + 3\cos\theta + k}$ is 2, for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, find the value of k .

Nov 05

Let f be a cubic polynomial function. Given that $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, $f(1) = f'(1)$ and $f''(-1) = 6$, find $f(x)$.

Nov 05

The curve $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ has a local maximum point at P and a local minimum point at Q. Determine the equation of the straight line passing through P and Q, in the form $ax + by + c = 0$, where $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Mayo 06

Given that $3^{x+y} = x^3 + 3y$, find $\frac{dy}{dx}$

Mayo 06

Let $f(x) = \cos^3(4x+1)$, $0 \leq x \leq 1$.

- (a) Find $f'(x)$.
- (b) Find the **exact** values of the three roots of $f'(x) = 0$.

Muestra
06/08

The function f is defined on the domain $x \geq 1$ by $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (a) (i) Show, by considering the first and second derivatives of f , that there is one maximum point on the graph of f .
- (ii) State the **exact** coordinates of this point.
- (iii) The graph of f has a point of inflexion at P. Find the x -coordinate of P.

Nov 06

The function f is defined by $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $x \geq 1$.

- (a) Find $f'(x)$ and $f''(x)$, simplifying your answers.
- (b) (i) Find the **exact** value of the x -coordinate of the maximum point and justify that this is a maximum.
- (ii) Solve $f''(x) = 0$, and show that at this value of x , there is a point of inflexion on the graph of f .
- (iii) Sketch the graph of f , indicating the maximum point and the point of inflexion.

Mayo 07 The following table shows the values of two functions f and g and their first derivatives when $x=1$ and $x=0$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	4	1	-4	5
1	-2	3	-1	2

- (a) Find the derivative of $\frac{3f(x)}{g(x)-1}$ when $x=0$.
- (b) Find the derivative of $f(g(x)+2x)$ when $x=1$.

Mayo 07 Given that $e^{xy} - y^2 \ln x = e$ for $x \geq 1$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(1, 1)$

Mayo 07 Let $y = x \arcsin x$, $x \in]-1, 1[$. Show that $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Mayo 07 La función f se define como: $f(x) = \frac{2x}{x^2+6}$ para $x \geq b$, y donde $b \in \mathbb{R}$.

- (a) Compruebe que $f'(x) = \frac{12-2x^2}{(x^2+6)^2}$.
- (b) A partir de lo anterior, halle el menor valor **exacto** de b para el cual existe la función inversa f^{-1} . Justifique su respuesta.

Nov 07 Given that $y = e^{-x^2}$ find

- (a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$;
- (b) the exact values of the x -coordinates of the points of inflexion on the graph of $y = e^{-x^2}$, justifying that they are points of inflexion.

Mayo 08 Consider the curve with equation $f(x) = e^{-2x^2}$ for $x < 0$.

Find the coordinates of the point of inflexion and justify that it is a point of inflexion.

Mayo 08 If $f(x) = x - 3x^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$,

- (a) find the x -coordinate of the point P where $f'(x) = 0$;
- (b) determine whether P is a maximum or minimum point.

Mayo 08

A family of cubic functions is defined as $f_k(x) = k^2x^3 - kx^2 + x$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Express in terms of k

(i) $f'_k(x)$ and $f''_k(x)$;

(ii) the coordinates of the points of inflexion P_k on the graphs of f_k .

(b) Show that all P_k lie on a straight line and state its equation.

(c) Show that for all values of k , the tangents to the graphs of f_k at P_k are parallel, and find the equation of the tangent lines.

Mayo 08

The function f is defined by $f(x) = xe^{2x}$.

It can be shown that $f^{(n)}(x) = (2^n x + n2^{n-1})e^{2x}$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$, where $f^{(n)}(x)$ represents the n^{th} derivative of $f(x)$.

(a) By considering $f^{(n)}(x)$ for $n=1$ and $n=2$, show that there is one minimum point P on the graph of f , and find the coordinates of P.

(b) Show that f has a point of inflexion Q at $x = -1$.

(c) Determine the intervals on the domain of f where f is

(i) concave up;

(ii) concave down.

(d) Sketch f , clearly showing any intercepts, asymptotes and the points P and Q.

(e) Use mathematical induction to prove that $f^{(n)}(x) = (2^n x + n2^{n-1})e^{2x}$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$, where $f^{(n)}(x)$ represents the n^{th} derivative of $f(x)$.

Muestra
08

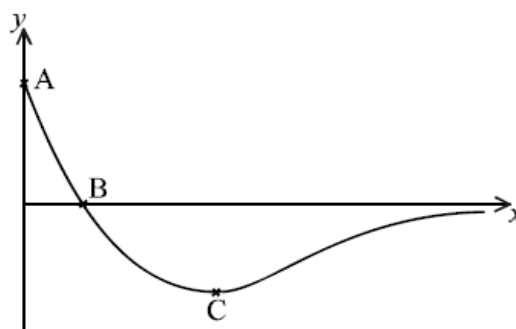
The function f is defined on the domain $x \geq 0$ by $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

(a) Find the maximum value of $f(x)$, and justify that it is a maximum.

(b) Find the x coordinates of the points of inflexion on the graph of f .

Muestra
08

- (a) Find the root of the equation $e^{2-2x} = 2e^{-x}$ giving the answer as a logarithm.
- (b) The curve $y = e^{2-2x} - 2e^{-x}$ has a minimum point. Find the coordinates of this minimum.
- (c) The curve $y = e^{2-2x} - 2e^{-x}$ is shown below.



Write down the coordinates of the points A, B and C.

- (d) Hence state the set of values of k for which the equation $e^{2-2x} - 2e^{-x} = k$ has two distinct positive roots.

Muestra
08

It is given that

$$f(x) = \frac{18(x-1)}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{18(2-x)}{x^3}, \quad \text{and} \quad f''(x) = \frac{36(x-3)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

- (a) Find
- the zero(s) of $f(x)$;
 - the equations of the asymptotes;
 - the coordinates of the local maximum and justify it is a maximum;
 - the interval(s) where $f(x)$ is concave up.
- (b) Hence sketch the graph of $y = f(x)$.

Nov 08

If $y = \ln\left(\frac{1}{3}(1 + e^{-2x})\right)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(e^{-y} - 3)$.

Nov 08

- (a) Use the derivatives of $\sin x$ and $\cos x$ to show that the derivative of $\tan x$ is $\sec^2 x$.
- (b) Hence by using $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, show that the derivative of $\arctan x$ is $\frac{1}{1+x^2}$.

Nov 08

- (a) Sketch the curve $f(x) = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- (b) Hence sketch on a separate diagram the graph of $g(x) = \csc 2x$, $0 \leq x \leq \pi$, clearly stating the coordinates of any local maximum or minimum points and the equations of any asymptotes.
- (c) Show that $\tan x + \cot x \equiv 2 \csc 2x$.
- (d) Hence or otherwise, find the coordinates of the local maximum and local minimum points on the graph of $y = \tan 2x + \cot 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- (e) Find the solution of the equation $\csc 2x = 1.5 \tan x - 0.5$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

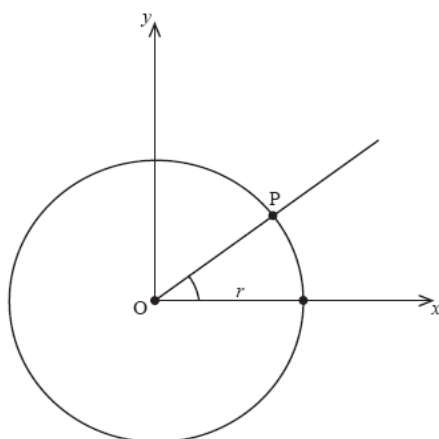
Mayo 09

Una función está definida por $f(x) = k\sqrt{x}$ con $k > 0$ y $x \geq 0$.

- (a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$.
- (b) Compruebe que f es una función inyectiva.
- (c) Halle la función inversa, $f^{-1}(x)$, e indique su dominio.
- (d) Si las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f^{-1}(x)$ se cortan en el punto $(4, 4)$, halle el valor de k .
- (e) Considere las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f^{-1}(x)$, utilizando el valor de k que obtuvo en el apartado (d).
- (i) Halle el área delimitada por las dos gráficas.
- (ii) La recta $x = c$ corta las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f^{-1}(x)$ en los puntos P y Q, respectivamente. Sabiendo que la tangente a $y = f(x)$ en el punto P es paralela a la tangente a $y = f^{-1}(x)$ en el punto Q, halle el valor de c .

M09 TZ1
P2#9

The diagram below shows a circle with centre at the origin O and radius $r > 0$.



A point $P(x, y)$, ($x > 0$, $y > 0$) is moving round the circumference of the circle.

Let $m = \tan\left(\arcsin \frac{y}{r}\right)$.

- (a) Given that $\frac{dy}{dt} = 0.001r$, show that $\frac{dm}{dt} = \left(\frac{r}{10\sqrt{r^2 - y^2}}\right)^3$.
- (b) State the geometrical meaning of $\frac{dm}{dt}$.

M09 TZ1
P2#3

Let $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ and $g(x) = \sqrt{x+1}$, $x > -1$.

Find the set of values of x for which $f'(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

N09
P2#10

Consider the function f , defined by $f(x) = x - a\sqrt{x}$, where $x \geq 0$, $a \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Find in terms of a
 - (i) the zeros of f ;
 - (ii) the values of x for which f is decreasing;
 - (iii) the values of x for which f is increasing;
 - (iv) the range of f .

- (b) State the concavity of the graph of f .

M10 TZ1
P1#11

Consider $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$.

- (a) Find the equations of all asymptotes of the graph of f .
- (b) Find the coordinates of the points where the graph of f meets the x and y axes.
- (c) Find the coordinates of
 - (i) the maximum point and justify your answer;
 - (ii) the minimum point and justify your answer.
- (d) Sketch the graph of f , clearly showing all the features found above.
- (e) **Hence**, write down the number of points of inflexion of the graph of f .

M10 TZ2
P1#7

The function f is defined by $f(x) = e^{x^2 - 2x - 1.5}$.

- (a) Find $f'(x)$.
- (b) You are given that $y = \frac{f(x)}{x-1}$ has a local minimum at $x = a$, $a > 1$. Find the value of a .

Nov10
P1#12

(b) Considere la función

$$f(x) = A \sin(ax) + B \sin(bx), \quad A, a, B, b, x \in \mathbb{R}.$$

Utilice la inducción matemática para demostrar que la $(2n)$ -ésima derivada de f viene dada por

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n (Aa^{2n} \sin(ax) + Bb^{2n} \sin(bx)), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

N10
P1#12

Una partícula P se mueve en línea recta. El desplazamiento de P con relación al origen viene dado por:

$$s = 2 \sin(\pi t) + \sin(2\pi t), \quad t \geq 0,$$

donde t representa el tiempo, en segundos, y el desplazamiento se mide en centímetros.

- (i) Escriba el período de la función s .
- (ii) Halle expresiones para la velocidad, v , y la aceleración, a , de P.
- (iii) Determine todas las soluciones de la ecuación $v = 0$ para $0 \leq t \leq 4$.

Mayo 11
TZ1
P1#12

Consider the function $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $0 < x < e^2$.

- (a) (i) Solve the equation $f'(x) = 0$.
- (ii) Hence show the graph of f has a local maximum.
- (iii) Write down the range of the function f .
- (b) Show that there is a point of inflexion on the graph and determine its coordinates.
- (c) Sketch the graph of $y = f(x)$, indicating clearly the asymptote, x -intercept and the local maximum.
- (d) Now consider the functions $g(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ and $h(x) = \frac{\ln|x|}{|x|}$, where $0 < |x| < e^2$.
 - (i) Sketch the graph of $y = g(x)$.
 - (ii) Write down the range of g .
 - (iii) Find the values of x such that $h(x) > g(x)$.

Mayo 11
TZ1
P2#22

Consider the function $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Find the equation of the straight line passing through the maximum and minimum points of the graph $y = f(x)$.

(b) Show that the point of inflexion of the graph $y = f(x)$ lies on this straight line.

Nov 11
P1#6

Given that $y = \frac{1}{1-x}$, use mathematical induction to prove that $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Mayo 12
TZ2
P1#8

Sea $x^3 y = a \operatorname{sen} nx$. Utilizando la derivación implícita, compruebe que:

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x^2 \frac{dy}{dx} + (n^2 x^2 + 6)xy = 0.$$

Mayo 12
TZ2
P1#10

La función f , definida en el dominio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x) = e^{-x} \cos x$.

(a) Indique los dos ceros de f .

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f .

Mayo 12
TZ2
P1#13

(a) Utilizando la definición de derivada, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$, compruebe

que la derivada de $\frac{1}{2x+1}$ es $\frac{-2}{(2x+1)^2}$.

Mayo 12
TZ2
P1#13

(b) Demuestre mediante inducción matemática que la derivada n -ésima de $(2x+1)^{-1}$ es $(-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

Mayo 12
TZ1
P1#12

Let $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$, $0 < x < 1$.

(a) Show that $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{3}{2}}$ and deduce that f is an increasing function.

(b) Show that the curve $y = f(x)$ has one point of inflexion, and find its coordinates.

Mayo 12
TZ1
P2#11

The function $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ is defined for $0 < x < 2\pi$.

(a) Write down the coordinates of the minimum point on the graph of f .

(b) The points $P(p, 3)$ and $Q(q, 3)$, $q > p$, lie on the graph of $y = f(x)$. Find p and q .

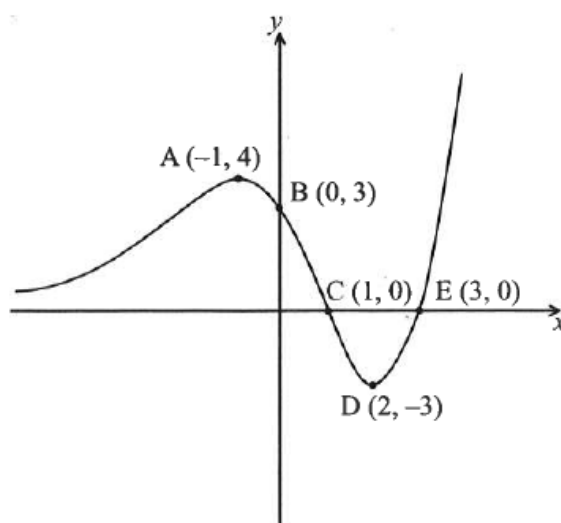
(c) Find the coordinates of the point, on $y = f(x)$, where the gradient of the graph is 3.

(d) Find the coordinates of the point of intersection of the normals to the graph at the points P and Q .

Mayo 12
TZ1
P2#1
Mayo 12
TZ2
P1#7

Given that the graph of $y = x^3 - 6x^2 + kx - 4$ has exactly one point at which the gradient is zero, find the value of k .

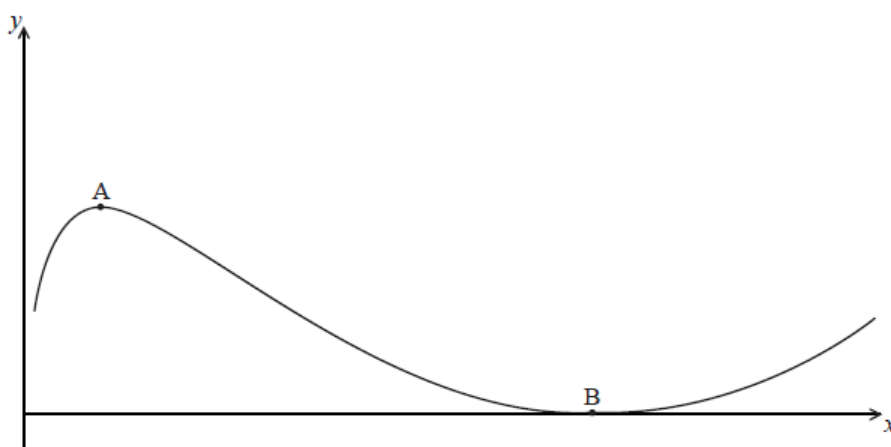
A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$, donde A es un máximo local y D es un mínimo local.



- (a) Sobre los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente la gráfica de $y = \frac{1}{f(x)}$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A, B y D, rotulándolos A' , B' y D' respectivamente, y las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.
- (b) Sobre los siguientes ejes de coordenadas, aproxímadamente la gráfica de la función derivada $y = f'(x)$, mostrando claramente las coordenadas de las imágenes de los puntos A y D, y rotulándolos A'' y D'' respectivamente.

Nov 12
TZ1
P1#4

The diagram shows the graph of the function defined by $y = x(\ln x)^2$ for $x > 0$.



The function has a local maximum at the point A and a local minimum at the point B.

- (a) Find the coordinates of the points A and B.
- (b) Given that the graph of the function has exactly one point of inflexion, find its coordinates.

Nov 12
TZ1
P2#6 A particle moves along a straight line so that after t seconds its displacement s , in metres, satisfies the equation $s^2 + s - 2t = 0$. Find, in terms of s , expressions for its velocity and its acceleration.

Mayo 13
TZ2
P1#8 La curva C está definida de manera implícita por la ecuación $\frac{x^2}{y} - 2x = \ln y$ para $y > 0$.

(a) Expresa $\frac{dy}{dx}$ en función de x y de y .

(b) Halle el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto de C en el cual $y = 1$ y $x > 0$.

Nov 13
TZ1
P1#5 Una curva tiene por ecuación $x^3y^2 + x^3 - y^3 + 9y = 0$. Halle las coordenadas de los tres puntos de la curva donde $\frac{dy}{dx} = 0$.

Nov 13
TZ1
P1#10abc La función f viene dada por $f(x) = xe^{-x}$ ($x \geq 0$).

(a) (i) Halle una expresión para $f'(x)$.

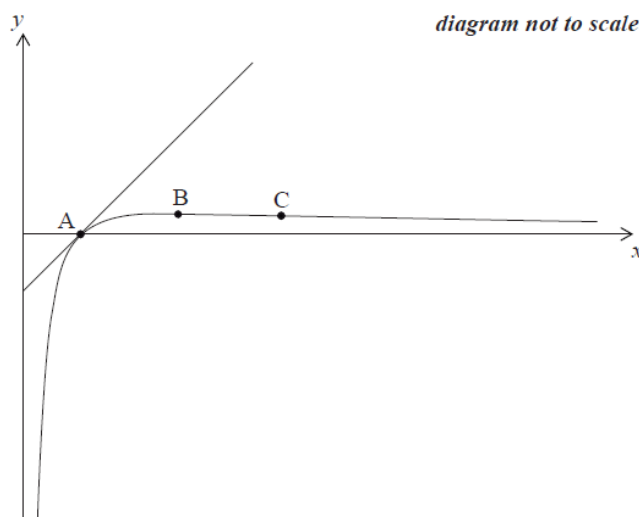
(ii) A partir de lo anterior, determine las coordenadas de A, el punto donde $f'(x) = 0$.

(b) Halle una expresión para $f''(x)$ y, a partir de lo anterior, compruebe que el punto A es un máximo.

(c) Halle las coordenadas de B, el punto de inflexión.

M14 TZ1
P1#11 Consider the function $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

The sketch below shows the graph of $y = f(x)$ and its tangent at a point A.



(a) Show that $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

(b) Find the coordinates of B, at which the curve reaches its maximum value.

(c) Find the coordinates of C, the point of inflexion on the curve.

The graph of $y = f(x)$ crosses the x -axis at the point A.

(d) Find the equation of the tangent to the graph of f at the point A.

M14 TZ1
P1#8

A body is moving in a straight line. When it is s metres from a fixed point O on the line its velocity, v , is given by $v = -\frac{1}{s^2}$, $s > 0$.

Find the acceleration of the body when it is 50 cm from O.

M14 TZ1
P1#9

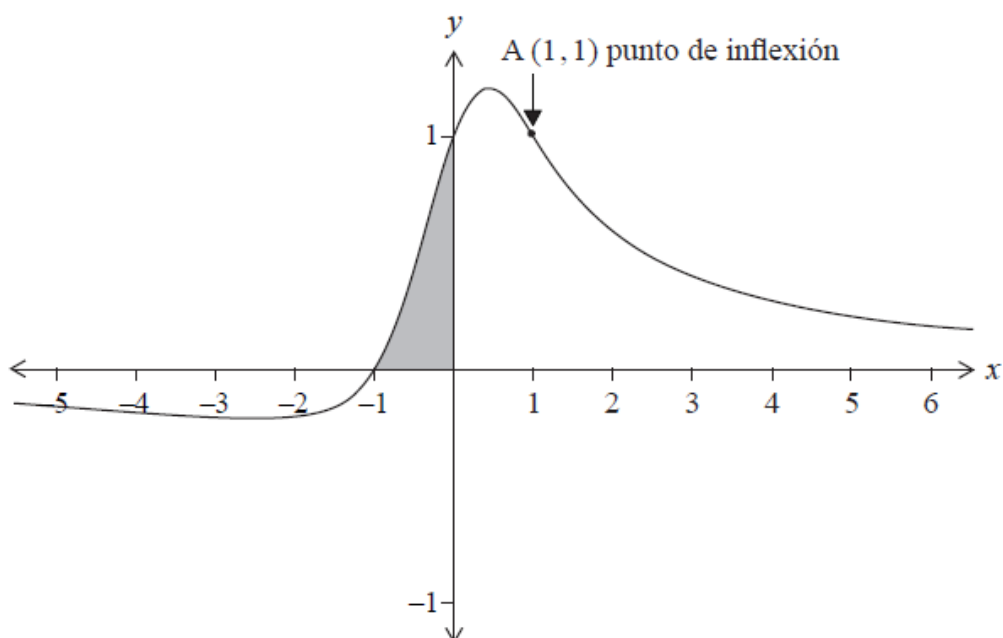
A curve has equation $\arctan x^2 + \arctan y^2 = \frac{\pi}{4}$.

(a) Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of x and y .

(b) Find the gradient of the curve at the point where $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $y < 0$.

M14 TZ2
P1#13abcd

A continuación se muestra el gráfico de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.



(a) Halle $f'(x)$.

(b) A partir de lo anterior, halle las coordenadas x de los puntos en los que la pendiente del gráfico de f es igual a cero.

(c) Halle $f''(x)$, expresando la respuesta de la forma $\frac{p(x)}{(x^2+1)^3}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

El punto $(1, 1)$ es un punto de inflexión. Hay otros dos puntos de inflexión.

(d) Halle las coordenadas x de los otros dos puntos de inflexión.

Nov 14
P1#7Considere dos funciones f y g y sus derivadas f' y g' .La siguiente tabla muestra los valores de las dos funciones y de sus derivadas en $x=1, 2$ y 3 .

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	1
$f'(x)$	1	4	2
$g(x)$	2	1	4
$g'(x)$	4	2	3

Sabiendo que $p(x) = f(x)g(x)$ y $h(x) = g \circ f(x)$, halle

(a) $p'(3)$;

(b) $h'(2)$.

Nov 14
P2#10Considere el triángulo PQR, donde $\hat{QPR} = 30^\circ$, $PQ = (x+2)$ cm y $PR = (5-x)^2$ cm, donde $-2 < x < 5$.

(a) Muestre que el área del triángulo, A cm², viene dada por $A = \frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 5x + 50)$.

(b) (i) Indique $\frac{dA}{dx}$.

(ii) Verifique que $\frac{dA}{dx} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$.

(c) (i) Halle $\frac{d^2A}{dx^2}$ y, a partir de lo anterior, justifique que el área máxima del triángulo PQR se obtiene cuando $x = \frac{1}{3}$.

(ii) Indique el área máxima del triángulo PQR.

(iii) Halle QR cuando el área del triángulo PQR alcanza su valor máximo.

M15 TZ1
P1#4

(a) Expand $(x+h)^3$.

(b) Hence find the derivative of $f(x) = x^3$ from first principles.

M15 TZ1
P1#11Let $y(x) = xe^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Find $\frac{dy}{dx}$.
- (b) Prove by induction that $\frac{d^n y}{dx^n} = n3^{n-1}e^{3x} + x3^n e^{3x}$ for $n \in \mathbb{Z}^+$.
- (c) Find the coordinates of any local maximum and minimum points on the graph of $y(x)$. Justify whether any such point is a maximum or a minimum.
- (d) Find the coordinates of any points of inflexion on the graph of $y(x)$. Justify whether any such point is a point of inflexion.
- (e) Hence sketch the graph of $y(x)$, indicating clearly the points found in parts (c) and (d) and any intercepts with the axes.

M15 TZ2
P1#4Considere la función definida mediante $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- (a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ es una función decreciente.

En la curva $y = f(x)$ hay un punto de inflexión, P.

- (b) Halle las coordenadas de P.

Nov 15
P1#8

- (a) Show that $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$.

- (b) Consider $f(x) = \sin(ax)$ where a is a constant. Prove by mathematical induction that $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$ where $n \in \mathbb{Z}^+$ and $f^{(n)}(x)$ represents the n^{th} derivative of $f(x)$.

Nov 15
P1#12_{abcde}Consider the function defined by $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ on the domain $-1 \leq x \leq 1$.

- (a) Show that f is an odd function.
- (b) Find $f'(x)$.
- (c) Hence find the x -coordinates of any local maximum or minimum points.
- (d) Find the range of f .
- (e) Sketch the graph of $y = f(x)$ indicating clearly the coordinates of the x -intercepts and any local maximum or minimum points.

M15 TZ2
P1#4

La función f viene dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Hayley formula la siguiente conjetura: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(x_2) + f'(x_1)}{2}$, $x_1 \neq x_2$.

Muestre que la conjetura de Hayley es correcta.

M16 TZ1
P1#9

A curve is given by the equation $y = \sin(\pi \cos x)$.

Find the coordinates of all the points on the curve for which $\frac{dy}{dx} = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.

M16 TZ1
P2#11

Let $f(x) = x^4 + 0.2x^3 - 5.8x^2 - x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Find the solutions of $f(x) > 0$.
- (b) For the curve $y = f(x)$.
 - (i) Find the coordinates of both local minimum points.
 - (ii) Find the x -coordinates of the points of inflexion.

The domain of f is now restricted to $[0, a]$.

- (c) (i) Write down the largest value of a for which f has an inverse. Give your answer correct to 3 significant figures.
- (ii) For this value of a sketch the graphs of $y = f(x)$ and $y = f^{-1}(x)$ on the same set of axes, showing clearly the coordinates of the end points of each curve.
- (iii) Solve $f^{-1}(x) = 1$.

Let $g(x) = 2 \sin(x - 1) - 3$, $-\frac{\pi}{2} + 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

- (d) (i) Find an expression for $g^{-1}(x)$, stating the domain.
- (ii) Solve $(f^{-1} \circ g)(x) < 1$.

N16
P1#11

Sea $y = e^x \sin x$.

(a) Halle una expresión para $\frac{dy}{dx}$.

(b) Muestre que $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x$.

Considere la función f , definida mediante $f(x) = e^x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$.

(d) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f .

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de f , indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes.

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x .

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como $\kappa = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$.

(g) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local.

(h) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico.

N16
P2#5

Considere la función f definida mediante $f(x) = 3x \arccos(x)$, donde $-1 \leq x \leq 1$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de f indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes y las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales que haya.

(b) Indique el recorrido de f .

(c) Resuelva la inecuación $|3x \arccos(x)| > 1$.

N16

P2#10

Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2-e^x}{2e^x-1}$, $x \in D$.

- (a) Determine D , el mayor dominio posible de f .
- (b) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones.
- (c) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{(2e^x-1)^2}$.
- (d) Utilice las respuestas dadas en los apartados (b) y (c) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio.
- (e) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.
- (f) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes. Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y .