Funciones Integrables en exámenes BI-NS

Mayo 00

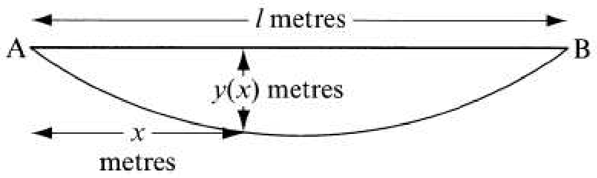
Find the values of $a > 0$, such that $\int_a^{a^2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0.22$

Mayo 00

Calculate the area bounded by the graph of $y = x\sin(x^2)$ and the x-axis, between $x = 0$ and the smallest positive x-intercept.

Nov 00

A uniform rod of length l metres is placed with its ends on two supports A, B at the same horizontal level.



If $y(x)$ metres is the amount of sag (*ie* the distance below [AB]) at a distance x metres from support A, then it is known that

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{125l^3}(x^2 - lx).$$

(a) (i) Let $z = \frac{1}{125l^3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2}\right) + \frac{1}{1500}$. Show that $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{125l^3}(x^2 - lx)$.

(ii) Given that $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = z$ and $w(0) = 0$, find $w(x)$.

(iii) Show that w satisfies $\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{125l^3}(x^2 - lx)$, and that $w(l) = w(0) = 0$.

(b) Find the sag at the centre of a rod of length 2.4 metres.

Nov 00

(a) Let $y = \frac{a + b\sin x}{b + a\sin x}$, where $0 < a < b$.

(i) Show that $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(b^2 - a^2)\cos x}{(b + a\sin x)^2}$.

(ii) Find the maximum and minimum values of y.

(iii) Show that the graph of $y = \frac{a + b\sin x}{b + a\sin x}$, $0 < a < b$ cannot have a vertical asymptote.

(b) For the graph of $y = \frac{4 + 5\sin x}{5 + 4\sin x}$ for $0 \le x \le 2\pi$,

(i) write down the y-intercept;

(ii) find the x-intercepts m and n, (where $m < n$) correct to four significant figures;

(iii) sketch the graph.

(c) The area enclosed by the graph of $y = \frac{4 + 5\sin x}{5 + 4\sin x}$ and the x-axis from $x = 0$ to $x = n$ is denoted by A. Write down, but do **not** evaluate, an expression for the area A.

Mayo 01

Let $f(x) = x\cos 3x$.

(a) Use integration by parts to show that

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c.$$

(b) Use your answer to part (a) to calculate the **exact** area enclosed by $f(x)$ and the x-axis in each of the following cases. **Give your answers in terms of π.**

(i) $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{3\pi}{6}$

(ii) $\frac{3\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$

(iii) $\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$.

(c) Given that the above areas are the first three terms of an arithmetic sequence, find an expression for the total area enclosed by $f(x)$ and the x-axis for $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{(2n+1)\pi}{6}$, where $n \in \mathbb{Z}^+$. **Give your answers in terms of n and π.**

Mayo 01

Let $f(t) = t^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{2t^{\frac{5}{3}}}\right)$. Find $\int f(t)\,dt$.

Mayo 01

Let $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $\pi \le x \le 3\pi$. Find the area enclosed by the graph of f and the x-axis.

Nov 01

Find the area enclosed by the curves $y = \frac{2}{1+x^2}$ and $y = e^{\frac{x}{3}}$, given that $-3 \le x \le 3$

Mayo 02

(a) Utilice la integración por partes para hallar $\int x^2 \ln x\,dx$

(b) Evalúe $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$.

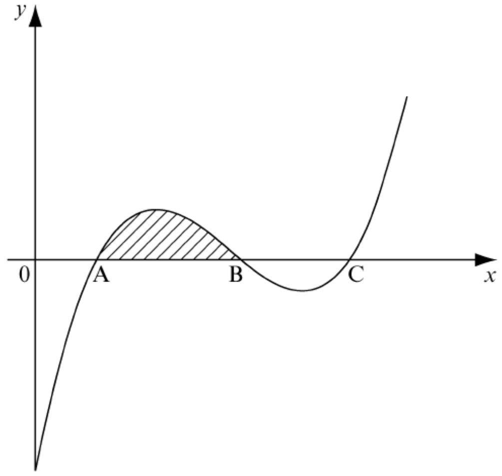
Mayo 02

En la figura siguiente se muestra parte de la curva $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$. La curva cruza el eje de las x en los puntos A , B y C .

(a) Halle el valor de la coordenada x de A .

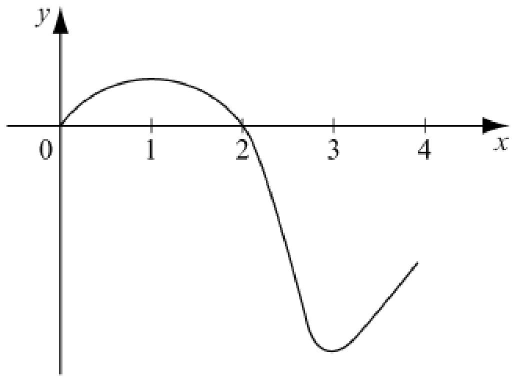
(b) Halle el valor de la coordenada x de B .

(c) Halle el área de la región sombreada.

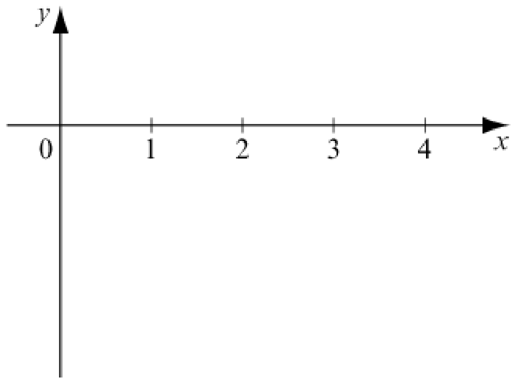


Mayo 02

En el diagrama que sigue se muestra la gráfica de $y_1 = f(x)$, $0 \le x \le 4$.



En los ejes a continuación, trace la gráfica de $y_2 = \int_0^x f(t)\,dt$, y marque claramente los puntos de inflexión.



Nov 02

Halle $\int (\theta \cos\theta - \theta)\,d\theta$

Nov 02

(a) En los mismos ejes, trace los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, donde

$$f(x) = 4 - (1-x)^2, \text{ para } -2 \le x \le 4,$$

$$g(x) = \ln(x+3) - 2, \text{ para } -3 \le x \le 5 .$$

(b) (i) Escriba la ecuación de toda asíntota vertical.

(ii) Escriba las intersecciones de $g(x)$ con el eje x y con el eje y.

(c) Halle los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

(d) Sea A la región en la cual $f(x) \ge g(x)$ y $x \ge 0$.

(i) Sombree, en la gráfica, la región A.

(ii) Escriba una integral que represente el área sombreada A.

(iii) Evalúe esta integral.

(e) Halle, en la región A, la distancia vertical máxima entre $f(x)$ y $g(x)$.

Mayo 03

Por medio de la sustitución $y = 2 - x$, o de alguna otra manera, halle $\int \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 \mathrm{d}x$

Mayo 03

La función f de dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se define como $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$.

Esta función puede también expresarse de la forma $R\cos(x - \alpha)$ donde $R > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(a) Halle el valor **exacto** de R y de α.

(b) (i) Halle el recorrido de la función f.

(ii) Diga, dando la razón para ello, si existe o no la función inversa de f.

(c) Halle el valor **exacto** de x que satisface la ecuación $f(x) = \sqrt{2}$.

(d) Utilizando el resultado de que $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$, donde C es una constante, demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$.

Mayo 03

Calcule el área encerrada por las curvas $y = \ln x$ e $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$, $x > 0$

Mayo 04

Halle $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

Mayo 04

(a) Halle $\int_0^m \frac{\mathrm{d}x}{2x+3}$, expresando la respuesta en función de m.

(b) Suponiendo que $\int_0^m \frac{\mathrm{d}x}{2x+3} = 1$, calcule el valor de m.

Mayo 04

Sea $f(x) = x\cos x$, para $0 \le x \le \pi$. La curva de $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = b$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(x)$ indicando las posiciones aproximadas de a y b.

(b) Halle el valor de

(i) a;

(ii) b.

(c) Utilizando la integración por partes halle una expresión para $\int x\cos x \, \mathrm{d}x$.

(d) A partir de lo anterior halle el valor **exacto** del área encerrada por la curva y el eje x, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Mayo 04

(a) Find $\int_0^m \frac{dx}{x^2+4}$, giving your answer in terms of m.

(b) Given that $\int_0^m \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}$, calculate the value of m.

Mayo 04

Find $\int x^2 e^x dx$.

Nov 04

Halle el área total de las dos regiones encerradas por la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ y la recta $y = x + 3$.

Nov 04

Utilizando la sustitución $2x = \operatorname{sen}\theta$, o de cualquier otro modo, halle $\int \left(\sqrt{1-4x^2}\right) dx$.

Mayo 05

Find the area of the region enclosed by the graphs of $f(x) = 4 - x^2$ and $g(x) = (x+1)\cos x$.

Mayo 05

Let $f(x) = \frac{x^2+3x+12}{x(x+2)^2}$. Find $\int f(x)\, dx$.

Nov 05

(a) Dado que $\frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} \equiv \frac{a}{(1+x)} + \frac{bx+c}{(1+x^2)}$, calcule el valor de a, de b y de c.

(b) (i) A partir de lo anterior, halle $I = \int \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} dx$.

(ii) Si $I = \frac{\pi}{4}$ cuando $x = 1$, calcule el valor de la constante de integración. Exprese su respuesta en la forma $p + q \ln r$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Nov 05

Find $\int e^x \cos x\, dx$.

Mayo 06

Let $f(x) = 2^{0.5x}$ and $g(x) = 3^{-0.5x} + \frac{5}{3}$. Let R be the region completely enclosed by the graphs of f and g, and the y-axis. Find the area of R.

Mayo 06

Find $\int e^{2x} \sin x\, dx$

Nov 06

The function f is defined by $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $x \geq 1$.

(a) Find $f'(x)$ and $f''(x)$, simplifying your answers.

(b) (i) Find the **exact** value of the x-coordinate of the maximum point and justify that this is a maximum.

(ii) Solve $f''(x) = 0$, and show that at this value of x, there is a point of inflexion on the graph of f.

(iii) Sketch the graph of f, indicating the maximum point and the point of inflexion.

The region enclosed by the x-axis, the graph of f and the line $x = 3$ is denoted by R.

(c) Find the volume of the solid of revolution obtained when R is rotated through 360° about the x-axis.

(d) Show that the area of R is $\frac{1}{18}(4 - \ln 3)$.

Nov 06

The region enclosed by the curves $y^2 = kx$ and $x^2 = ky$, where $k > 0$, is denoted by R. Given that the area of R is 12, find the value of k.

Mayo 07

La gráfica de $y = \operatorname{sen}(3x)$ para $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ se rota 2π radianes alrededor del eje x.

Halle el volumen **exacto** del sólido de revolución así generado.

Mayo 07

Halle $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$, expresando su respuesta en forma **exacta**.

Mayo 07

Let $f(x) = x\ln x - x$, $x > 0$.

(a) Find $f'(x)$.

(b) Using integration by parts find $\int (\ln x)^2\,dx$.

Mayo 07

The function f is defined as $f(x) = \sin x \ln x$ for $x \in [0.5, 3.5]$.

(a) Write down the x-intercepts.

(b) The area above the x-axis is A and the **total** area below the x-axis is B. If $A = kB$, find k.

Mayo 07

(a) Using the formula for $\cos(A+B)$ prove that $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$.

(b) Hence, find $\int \cos^2 x\,dx$.

Let $f(x) = 4\cos x$ and $g(x) = \sec x$ for $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Let R be the region enclosed by the two functions.

(c) Find the **exact** values of the x-coordinates of the points of intersection.

(d) Sketch the functions f and g and clearly shade the region R.

The region R is rotated through 2π about the x-axis to generate a solid.

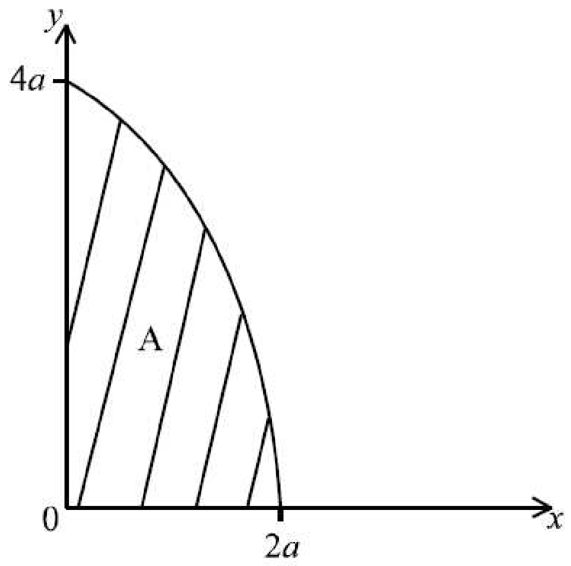
(e) (i) Write down an integral which represents the volume of this solid.

(ii) Hence find the **exact** value of the volume.

Nov 07

Find $\int_0^a \arcsin x\,dx$, $0 < a < 1$.

Nov 07 El siguiente diagrama muestra la región sombreada A, delimitada por los ejes y por una parte de la curva $y^2 = 8a(2a - x)$, $a > 0$. Halle, en función de a, el volumen del sólido que se genera rotando A 360° alrededor del eje x.



Mayo 08 Find the area between the curves $y = 2 + x - x^2$ and $y = 2 - 3x + x^2$

Mayo 08 The region bounded by the curve $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ and the lines $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$ is rotated through 2π radians about the x-axis.

Find the volume of the solid generated.

Mayo 08 Show that $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{24}$

Mayo 08 By using an appropriate substitution find

$$\int \frac{\tan(\ln y)}{y} \, \mathrm{d}y, \; y > 0$$

Muestra 08

(a) Sketch the curves $y = x^2$ and $y = |x|$.

(b) Find the sum of the areas of the regions enclosed by the curves $y = x^2$ and $y = |x|$.

Muestra 08 Find $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{(\ln x)^3}{x} \mathrm{d}x$

Muestra 08 Find the value of the integral $\int_0^4 \left| x^2 - 4 \right| \mathrm{d}x$

Muestra 08 Find $\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x$ using the substitution $x = 2\sin\theta$

Muestra 08

Find $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \mathrm{d}x$

Muestra 06/08

The function f is defined on the domain $x \geq 1$ by $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(a) (i) Show, by considering the first and second derivatives of f, that there is one maximum point on the graph of f.

(ii) State the **exact** coordinates of this point.

(iii) The graph of f has a point of inflexion at P. Find the x-coordinate of P.

Let R be the region enclosed by the graph of f, the x-axis and the line $x = 5$.

(b) Find the **exact** value of the area of R.

Muestra 08

The function f is defined on the domain $x \geq 0$ by $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

(a) Find the maximum value of $f(x)$, and justify that it is a maximum.

(b) Find the x coordinates of the points of inflexion on the graph of f.

(c) Evaluate $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Muestra 06/08

The function f' is given by $f'(x) = 2\sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Write down $f''(x)$.

(b) Given that $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, find $f(x)$.

Muestra 06/08

Use the substitution $u = x + 2$ to find $\int \frac{x^3}{(x+2)^2} \mathrm{d}x$.

Nov 08

Calculate the exact value of $\int_1^e x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

Nov 08

The function f is defined by $f(x) = x\sqrt{9-x^2} + 2\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

(a) Write down the largest possible domain, for each of the two terms of the function, f, and hence state the largest possible domain, D, for f.

(b) Find the volume generated when the region bounded by the curve $y = f(x)$, the x-axis, the y-axis and the line $x = 2.8$ is rotated through 2π radians about the x-axis.

(c) Find $f'(x)$ in simplified form.

(d) **Hence** show that $\displaystyle\int_{-p}^{p} \frac{11-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 2p\sqrt{9-p^2} + 4\arcsin\left(\frac{p}{3}\right)$, where $p \in D$.

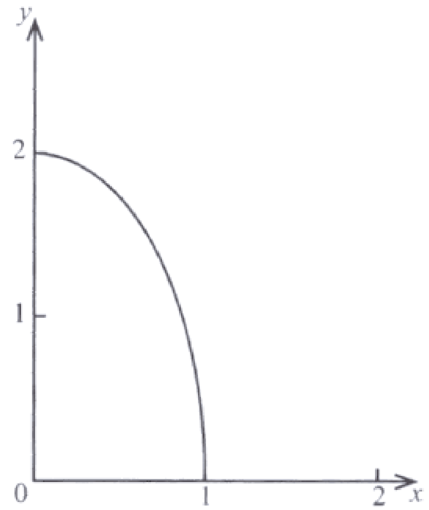
(e) Find the value of p which maximises the value of the integral in (d).

Mayo 09

(a) Compruebe que $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{5x+11}{x^2+4x+3}$.

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de k tal que $\displaystyle\int_0^2 \frac{5x+11}{x^2+4x+3}\,dx = \ln k$

Mayo 09 Considere la parte de la curva $4x^2 + y^2 = 4$ que se muestra en la siguiente figura.



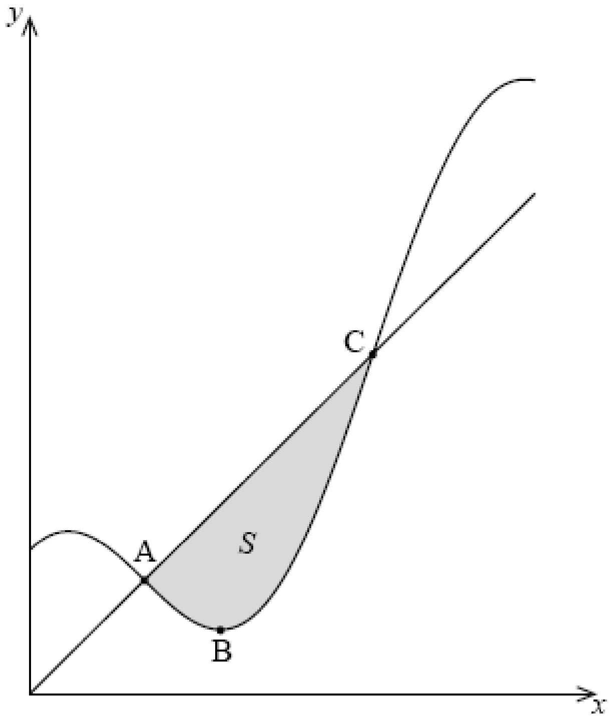
(a) Halle una expresión para $\dfrac{dy}{dx}$ en función de x y de y

(b) Halle la pendiente de la tangente en el punto $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(c) Se rota esta curva 2π radianes alrededor del eje x, formándose así un cuenco. Calcule el volumen de este cuenco.

Mayo 09

Let f be a function defined by $f(x) = x + 2\cos x$, $x \in [0, 2\pi]$. The diagram below shows a region S bound by the graph of f and the line $y = x$.



A and C are the points of intersection of the line $y = x$ and the graph of f, and B is the minimum point of f.

(a) If A, B and C have x-coordinates $a\dfrac{\pi}{2}$, $b\dfrac{\pi}{6}$ and $c\dfrac{\pi}{2}$, where $a, b, c \in \mathbb{N}$, find the values of a, b and c.

(b) Find the range of f.

(c) Find the equation of the normal to the graph of f at the point C, giving your answer in the form $y = px + q$.

(d) The region S is rotated through 2π about the x-axis to generate a solid.

(i) Write down an integral that represents the volume V of this solid.

(ii) Show that $V = 6\pi^2$.

Mayo 09

(a) Integrate $\displaystyle\int \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

(b) Given that $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}$ and $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$, find the value of a

Mayo 09

El número complejo z se define como $z = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(a) Enuncie el teorema de de Moivre.

(b) Compruebe que $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(n\theta)$.

(c) Utilice el teorema del binomio para desarrollar $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^5$, dando la respuesta de forma simplificada.

(d) A partir de lo anterior, compruebe que $16\,\mathrm{sen}^5\theta = \mathrm{sen}\,5\theta - 5\,\mathrm{sen}\,3\theta + 10\,\mathrm{sen}\,\theta$.

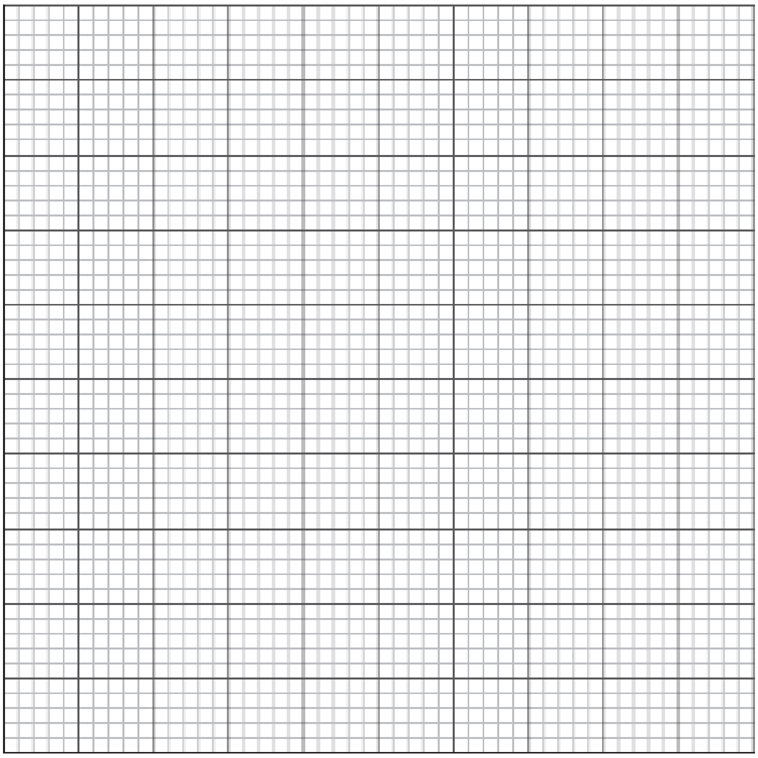
(e) Verifique que el resultado obtenido en el apartado (d) es válido para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(f) Halle $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^5\theta \, \mathrm{d}\theta$.

(g) A partir de lo anterior, con referencia a gráficas de funciones circulares, halle $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, \mathrm{d}\theta$, y explique el razonamiento seguido.

Mayo 09

(a) Let $a > 0$. Draw the graph of $y = \left| x - \dfrac{a}{2} \right|$ for $-a \le x \le a$ on the grid below.



(b) Find k such that $\int_{-a}^{0} \left| x - \dfrac{a}{2} \right| \mathrm{d}x = k \int_0^a \left| x - \dfrac{a}{2} \right| \mathrm{d}x$.

Nov 09 P1#7

(a) Calculate $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\tan x}} \mathrm{d}x$.

(b) Find $\int \tan^3 x \, \mathrm{d}x$.

Nov 09 P1#10

A drinking glass is modelled by rotating the graph of $y = \mathrm{e}^x$ about the y-axis, for $1 \le y \le 5$. Find the volume of the glass.

Mayo 10 TZ1 P1#8

The region enclosed between the curves $y = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$ and $y = \mathrm{e}\sqrt{x}$ is rotated through 2π about the x-axis. Find the volume of the solid obtained.

Mayo 10 TZ1 P1#9

(a) Given that $\alpha > 1$, use the substitution $u = \frac{1}{x}$ to show that

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u .$$

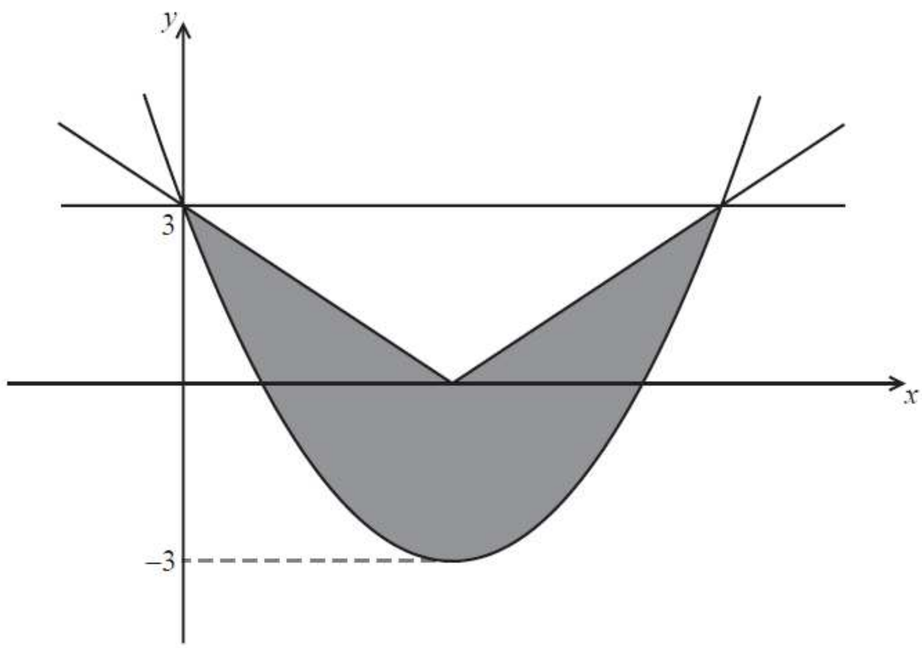
(b) **Hence** show that $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$.

Mayo 10 TZ2 P1#9

Find the value of $\int_0^1 t \ln(t+1) \, \mathrm{d}t$.

Mayo 10 TZ1 P2#10

The diagram below shows the graphs of $y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right|$, $y = 3$ and a quadratic function, that all intersect in the same two points.



Given that the minimum value of the quadratic function is -3, find an expression for the area of the shaded region in the form $\int_0^t (ax^2 + bx + c) \, \mathrm{d}x$, where the constants a, b, c and t are to be determined. (Note: The integral does not need to be evaluated.)

Nov 10 P1#13

Considere la curva $y = xe^x$ y la recta $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

(a) Sea $k = 0$.

(i) Compruebe que la curva y la recta se cortan una vez.

(ii) Halle el ángulo que forman la tangente a la curva y la recta, en el punto de intersección.

(b) Sea $k = 1$. Compruebe que la recta es una tangente a la curva.

(c) (i) Halle los valores de k para los cuales la curva $y = xe^x$ y la recta $y = kx$ se cortan en dos puntos distintos.

(ii) Escriba las coordenadas de los puntos de intersección.

(iii) Escriba una integral que represente el área de la región A delimitada por la curva y la recta.

(iv) **A partir de lo anterior**, sabiendo que $0 < k < 1$, compruebe que $A < 1$.

Nov 10 P2#13

Sea $f(x) = \dfrac{a + be^x}{ae^x + b}$, donde $0 < b < a$.

(a) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{(b^2 - a^2)e^x}{(ae^x + b)^2}$.

(b) **A partir de lo anterior**, justifique por qué la gráfica de f no tiene ningún máximo ni ningún mínimo local.

(c) Sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión, halle sus coordenadas.

(d) Compruebe que la gráfica de f tiene exactamente dos asíntotas.

(e) Sean $a = 4$ y $b = 1$. Considere la región R delimitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje y, y la recta que tiene por ecuación $y = \dfrac{1}{2}$.

Halle el volumen V del sólido que se obtiene cuando R se gira 2π alrededor del eje x.

Mayo 11 TZ1 P1#7

Find the area enclosed by the curve $y = \arctan x$, the x-axis and the line $x = \sqrt{3}$.

Mayo 11
TZ2
P1#13

(i) Sketch the graphs of $y = \sin x$ and $y = \sin 2x$, on the same set of axes, for $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(ii) Find the x-coordinates of the points of intersection of the graphs in the domain $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(iii) Find the area enclosed by the graphs.

Mayo 11
TZ2
P1#13

Find the value of $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\mathrm{d}x$ using the substitution $x = 4\sin^2\theta$.

Mayo 11
TZ2
P1#13

The increasing function f satisfies $f(0) = 0$ and $f(a) = b$, where $a > 0$ and $b > 0$.

(i) By reference to a sketch, show that $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = ab - \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) **Hence** find the value of $\int_0^2 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$.

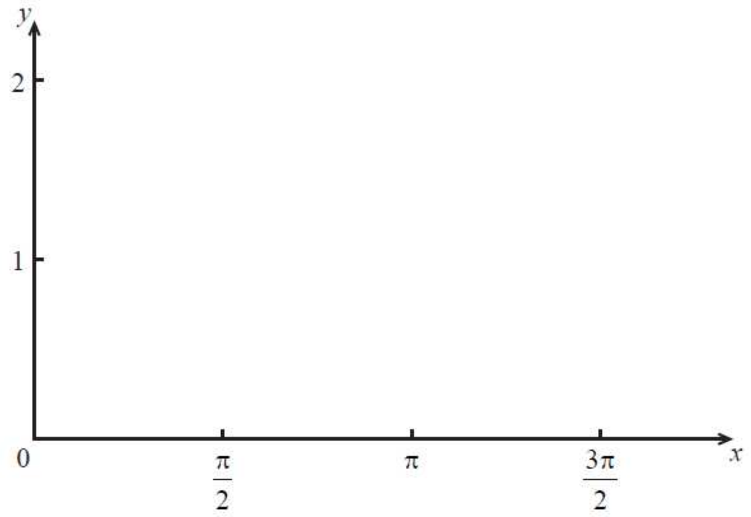
Mayo 11
TZ2
P2#13

Using integration by parts, show that $\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$.

Nov 11
P1#4

Given that $f(x) = 1 + \sin x$, $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$,

(a) sketch the graph of f;

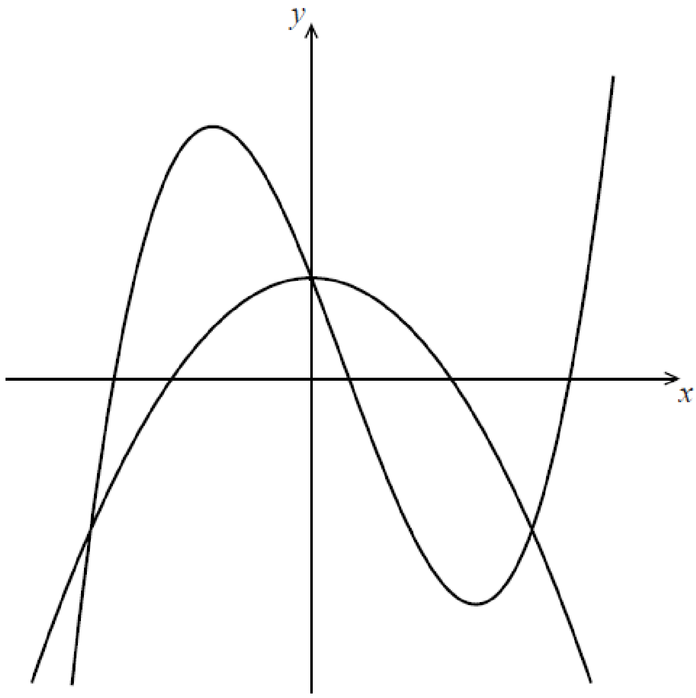


(b) show that $(f(x))^2 = \frac{3}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$;

(c) find the volume of the solid formed when the graph of f is rotated through 2π radians about the x-axis.

Nov 11 P1#7

The graphs of $f(x)=-x^2+2$ and $g(x)=x^3-x^2-bx+2$, $b>0$, intersect and create two closed regions. Show that these two regions have equal areas.



Nov 11 P2#1

Consider the graph of $y=x+\sin(x-3)$, $-\pi\le x\le\pi$.

(a) Sketch the graph, clearly labelling the x and y intercepts with their values.

(b) Find the area of the region bounded by the graph and the x and y axes.

Mayo 12 TZ2 P1#10

La función f, definida en el dominio $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, viene dada por $f(x)=e^{-x}\cos x$.

(a) Indique los dos ceros de f.

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

(c) Se denomina A a la región delimitada por la gráfica, el eje x y el eje y, mientras que se denomina B a la región delimitada por la gráfica y el eje x.

Compruebe que la razón entre el área de A y el área de B es igual a $\dfrac{e^{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)}{e^{\pi}+1}$

Mayo 12 TZ1 P1#12

Let $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, $0<x<1$.

(a) Show that $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ and deduce that f is an increasing function.

(b) Show that the curve $y=f(x)$ has one point of inflexion, and find its coordinates.

(c) Use the substitution $x=\sin^2\theta$ to show that $\int f(x)\mathrm{d}x=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+c$.

Mayo 12 TZ1 P1#6

The graph below shows the two curves $y=\frac{1}{x}$ and $y=\frac{k}{x}$, where $k>1$.

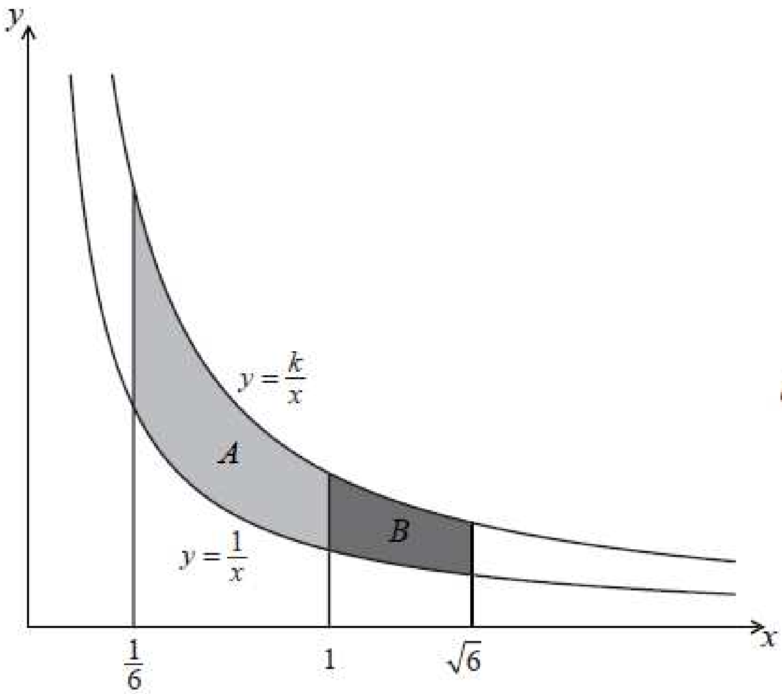


diagram not to scale

(a) Find the area of region A in terms of k.

(b) Find the area of region B in terms of k.

(c) Find the ratio of the area of region A to the area of region B.

Mayo 12 TZ1 P2#8

A cone has height h and base radius r. Deduce the formula for the volume of this cone by rotating the triangular region, enclosed by the line $y=h-\frac{h}{r}x$ and the coordinate axes, through 2π about the y-axis.

Nov 12 P2#8

By using the substitution $x=\sin t$, find $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Nov 12 P2#9

Find the area of the region enclosed by the curves $y=x^3$ and $x=y^2-3$.

Mayo 12 TZ1 P1#10

(a) Find all values of x for $0.1\le x\le 1$ such that $\sin(\pi x^{-1})=0$.

(b) Find $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \pi x^{-2}\sin(\pi x^{-1})\,dx$, showing that it takes different integer values when n is even and when n is odd.

(c) Evaluate $\int_{0.1}^{1}\left|\pi x^{-2}\sin(\pi x^{-1})\right|dx$.

Mayo 13 TZ1 P1#12

(a) Express $4x^2-4x+5$ in the form $a(x-h)^2+k$ where $a, h, k \in \mathbb{Q}$.

(b) The graph of $y=x^2$ is transformed onto the graph of $y=4x^2-4x+5$. Describe a sequence of transformations that does this, making the order of transformations clear.

The function f is defined by $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-4x+5}$.

(c) Sketch the graph of $y=f(x)$.

(d) Find the range of f.

(e) By using a suitable substitution show that $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\int \dfrac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u$.

(f) Prove that $\int_1^{3.5}\dfrac{1}{4x^2-4x+5}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{16}$.

Mayo 13 TZ2 P1#1

Halle el valor exacto de $\int_1^2\left((x-2)^2+\dfrac{1}{x}+\operatorname{sen}\pi x\right)\mathrm{d}x$.

Mayo 13 TZ1 P2#4

Find the volume of the solid formed when the region bounded by the graph of $y=\sin(x-1)$, and the lines $y=0$ and $y=1$ is rotated by 2π about the y-axis.

Mayo 13 TZ2 P2#4

(a) Halle $\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$.

(b) Determine el valor de m, sabiendo que $\int_0^m x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=0{,}5$, donde $m>0$.

Nov 13 P2#10

Utilizando la sustitución $x=2\operatorname{tg}u$, compruebe que $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\frac{-\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$

Nov 13 P1#10

La función f viene dada por $f(x) = xe^{-x}$ $(x \geq 0)$.

(a) (i) Halle una expresión para $f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, determine las coordenadas de A, el punto donde $f'(x) = 0$.

(b) Halle una expresión para $f''(x)$ y, a partir de lo anterior, compruebe que el punto A es un máximo.

(c) Halle las coordenadas de B, el punto de inflexión.

(d) La gráfica de la función g se obtiene a partir de la gráfica de f mediante un estiramiento de razón 2 en la dirección del eje x.

(i) Escriba una expresión para $g(x)$.

(ii) Indique las coordenadas de C, el máximo de g.

(iii) Determine las coordenadas x de D y E, los dos puntos donde $f(x) = g(x)$.

(e) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$ y la de $y = g(x)$ sobre los mismos ejes de coordenadas, mostrando claramente los puntos A, B, C, D y E.

(f) Halle un valor exacto para el área de la región delimitada por la curva $y = g(x)$, el eje x y la recta $x = 1$.

Nov 13 P2#13

Una función f viene dada por $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Explique por qué no existe la función inversa f^{-1}.

(ii) Compruebe que la ecuación de la normal a la curva en el punto P, donde $x = \ln 3$, viene dada por $9x + 12y - 9\ln 3 - 20 = 0$.

(iii) Halle las coordenadas x de los puntos Q y R pertenecientes a la curva, tales que las tangentes en Q y R pasan por $(0, 0)$.

(b) Ahora el dominio de f queda restringido a $x \geq 0$.

(i) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$.

(ii) Halle el volumen generado cuando la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 5$ se rota un ángulo de 2π radianes al-rededor del eje y.

Muestra 14 P1#11

(a) Find the value of the integral $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

(b) Find the value of the integral $\int_0^{0.5} \arcsin x\,dx$.

(c) Using the substitution $t = \tan\theta$, find the value of the integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{3\cos^2\theta + \sin^2\theta}.$$

Mayo 14 TZ1 P1#5

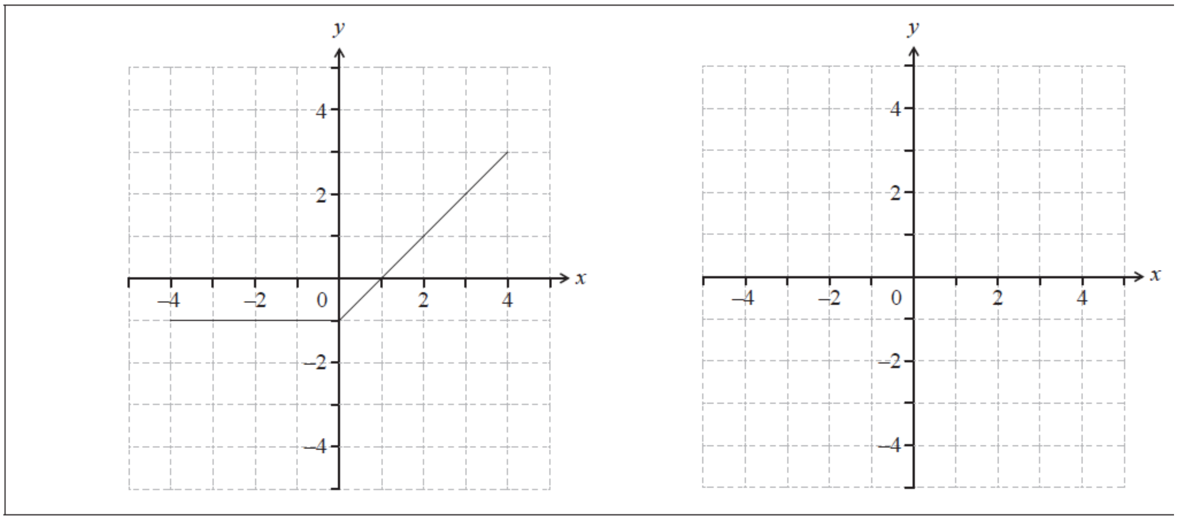
(a) Use the identity $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ to prove that $\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $0 \le x \le \pi$.

(b) Find a similar expression for $\sin\frac{1}{2}x$, $0 \le x \le \pi$.

(c) Hence find the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}\right) dx$.

Mayo 14 TZ1 P1#6

The first set of axes below shows the graph of $y = f(x)$ for $-4 \le x \le 4$.



Let $g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$ for $-4 \le x \le 4$.

(a) State the value of x at which $g(x)$ is a minimum.

(b) On the second set of axes, sketch the graph of $y = g(x)$.

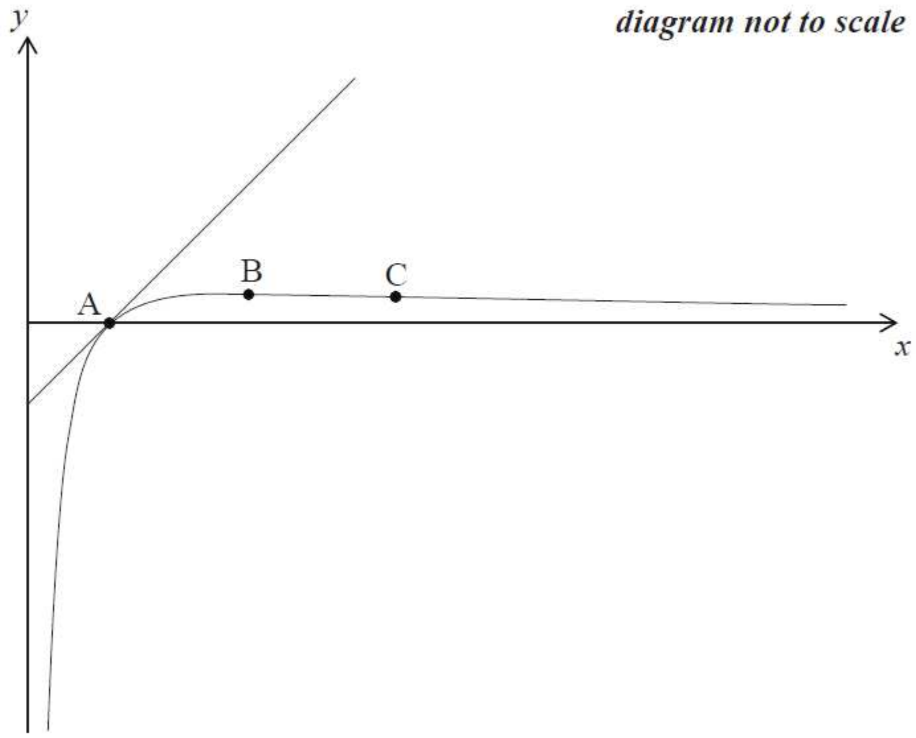
Mayo 14 TZ2 P1#10

Utilice la sustitución $x = a\sec\theta$ para mostrar que $\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{24a^3}\left(3\sqrt{3} + \pi - 6\right)$.

Mayo 14
TZ1
P1#11

Consider the function $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$.

The sketch below shows the graph of $y=f(x)$ and its tangent at a point A.



(a) Show that $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(b) Find the coordinates of B, at which the curve reaches its maximum value.

(c) Find the coordinates of C, the point of inflexion on the curve.

The graph of $y=f(x)$ crosses the x-axis at the point A.

(d) Find the equation of the tangent to the graph of f at the point A.

(e) Find the area enclosed by the curve $y=f(x)$, the tangent at A, and the line $x=\mathrm{e}$.

Mayo 14
TZ1
P2#6

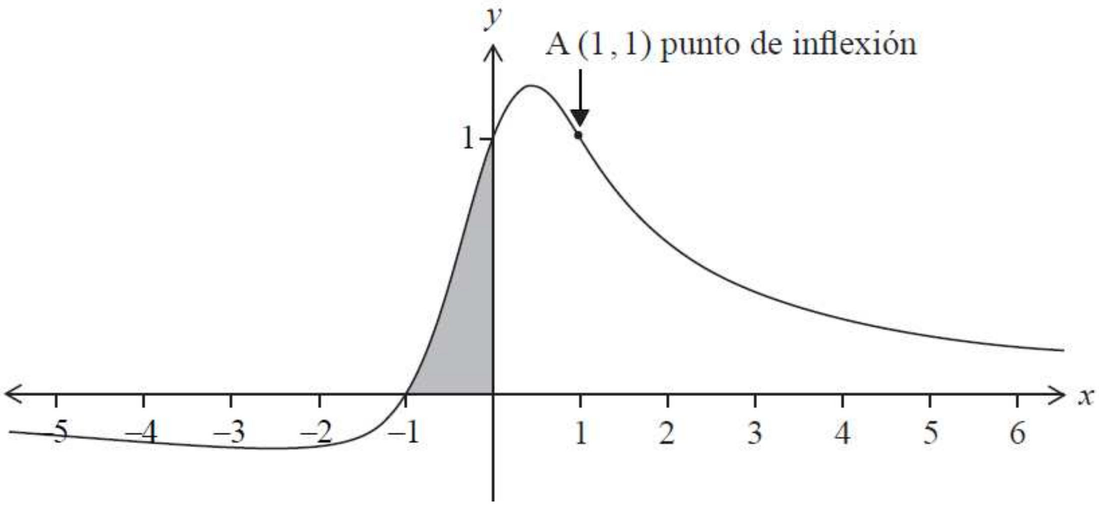
Let $f(x)=x(x+2)^6$.

(a) Solve the inequality $f(x)>x$.

(b) Find $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mayo 14
TZ2
P1#13e

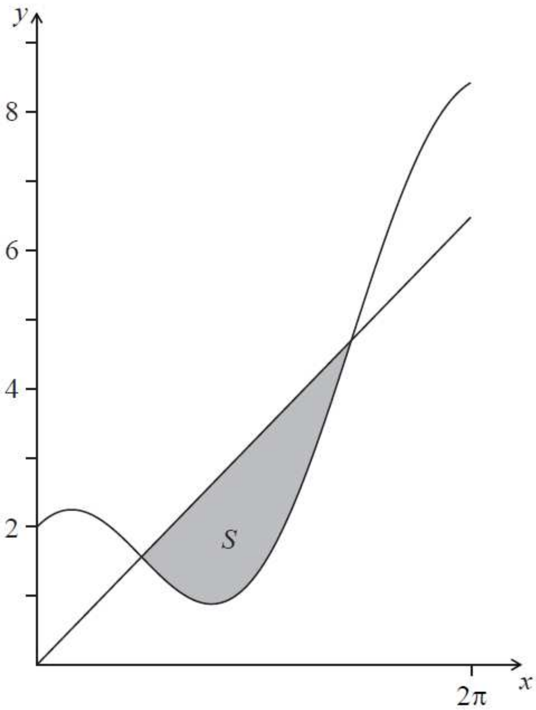
A continuación se muestra el gráfico de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.



(e) Halle el área de la región sombreada. Exprese la respuesta de la forma $\dfrac{\pi}{a}-\ln\sqrt{b}$, donde a y b son enteros.

Mayo 14
TZ1
P2#5

The shaded region S is enclosed between the curve $y=x+2\cos x$, for $0\le x\le 2\pi$, and the line $y=x$, as shown in the diagram below.



(a) Find the coordinates of the points where the line meets the curve.

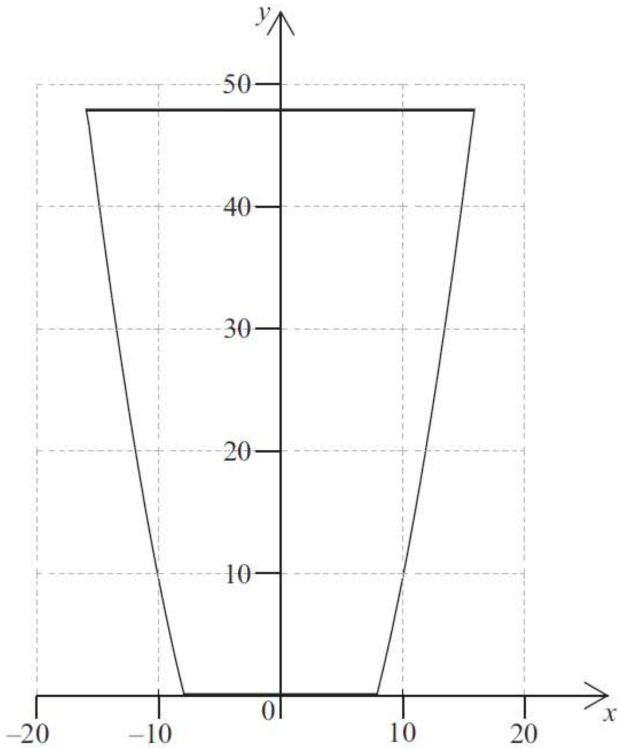
The region S is rotated by 2π about the x-axis to generate a solid.

(b) (i) Write down an integral that represents the volume V of the solid.

(ii) Find the volume V.

Nov 14 P2#13

En la siguiente figura se muestra la sección transversal vertical de un contenedor.



Los lados curvos de dicha sección transversal vienen dados por la ecuación $y = 0{,}25x^2 - 16$. Las secciones transversales horizontales son circulares. El contenedor tiene una altura de 48 cm.

(a) Si el contenedor se llena de agua hasta una altura de h cm, muestre que el volumen del agua, V cm³, viene dado por $V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$.

El contenedor, que inicialmente está lleno de agua, empieza a gotear a través de un pequeño agujero a una razón que viene dada por $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$, donde t se mide en segundos.

(b) (i) Muestre que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$.

(ii) Indique $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}h}$ y, a partir de lo anterior, muestre que $t = \frac{-4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}h$.

(iii) Halle el tiempo que tarda en vaciarse el contenedor, aproximado al número entero de minutos más próximo. (60 segundos = 1 minuto)

Una vez que está vacío, se vuelve a echar agua en el contenedor a una razón de $8{,}5\,\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$.

Simultáneamente, el contenedor sigue goteando a una razón de $\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}\text{cm}^3\,\text{s}^{-1}$.

(c) Utilizando un gráfico aproximado apropiado, determine la altura a la que acaba estabilizándose el nivel del agua en el contenedor.

Nov 14 P1#6

Utilizando la sustitución $u = 1+\sqrt{x}$, halle $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Nov 14 P1#11cde

La función g viene dada por $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
El gráfico de $y = g(x)$ corta al eje x en el punto Q.

(c) Muestre que la ecuación de la tangente T al gráfico de $y = g(x)$ en el punto Q es $y = x-1$.

Una región R está delimitada por el gráfico de $y = g(x)$, la tangente T y la recta $x = e$.

(d) Halle el área de la región R.

(e) (i) Muestre que $g(x) \le x-1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Sustituyendo x por $\frac{1}{x}$ en el apartado (e)(i), muestre que $\frac{x-1}{x} \le g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Nov 14 P1#13b

Muestre que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

A partir de lo anterior, halle el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\,dx$.

Mayo 15 TZ1 P1#3

(a) Find $\int (1+\tan^2 x)\,dx$.

(b) Find $\int \sin^2 x\,dx$.

Mayo 15 TZ1 P1#6

A function f is defined by $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \ne \frac{1}{2}$.

(a) Find an expression for $f^{-1}(x)$.

(b) Given that $f(x)$ can be written in the form $f(x) = A + \frac{B}{2x-1}$, find the values of the constants A and B.

(c) Hence, write down $\int \frac{3x-2}{2x-1}\,dx$.

Mayo 15 TZ1 P1#8

By using the substitution $u = e^x + 3$, find $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 6e^x + 13}\,dx$

Mayo 15 TZ2 P1#5

Muestre que $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$

Mayo 15 TZ2 P1#8

Utilizando la sustitución $t = \tan x$, halle $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

Exprese la respuesta de la forma $m \arctan(n \tan x) + c$, donde m y n son constantes que deberá determinar.

Mayo 15 TZ2 P1#11abd

Considere las funciones $f(x)=\tan x,\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1},\ x\in\mathbb{R},\ x\ne 1$.

(a) Halle una expresión para $g\circ f(x)$; indique cuál es su dominio.

(b) A partir de lo anterior, muestre que $g\circ f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$.

(d) Muestre que el área delimitada por el gráfico de $y=g\circ f(x)$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{6}$ es $\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Mayo 15 TZ1 P2#1

The region R is enclosed by the graph of $y=e^{-x^2}$, the x-axis and the lines $x=-1$ and $x=1$. Find the volume of the solid of revolution that is formed when R is rotated through 2π about the x-axis.

Mayo 15 TZ2 P2#6b

La región delimitada por el gráfico de $y=\ln(5x+10)$, el eje x y las rectas $x=e$ y $x=2e$, se rota 2π radianes alrededor del eje x. Halle el volumen así generado.

Nov 15 P1#2

Using integration by parts find $\int x\sin x\,dx$

Nov 15 P1#5

Use the substitution $u=\ln x$ to find the value of $\int_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$

Nov 15 P1#12

Consider the function defined by $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ on the domain $-1\le x\le 1$.

(a) Show that f is an odd function.

(b) Find $f'(x)$.

(c) Hence find the x-coordinates of any local maximum or minimum points.

(d) Find the range of f.

(e) Sketch the graph of $y=f(x)$ indicating clearly the coordinates of the x-intercepts and any local maximum or minimum points.

(f) Find the area of the region enclosed by the graph of $y=f(x)$ and the x-axis for $x\ge 0$.

(g) Show that $\int_{-1}^{1}\left|x\sqrt{1-x^2}\right|dx>\left|\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx\right|$.

Nov 15 P2#5

A function is defined by $f(x)=x^2+2,\ x\ge 0$. A region R is enclosed by $y=f(x)$, the y-axis and the line $y=4$.

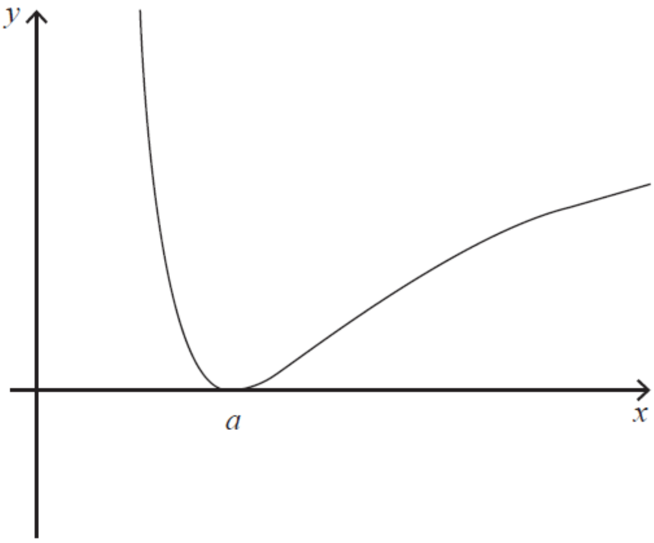
(a) (i) Express the area of the region R as an integral with respect to y.

(ii) Determine the area of R, giving your answer correct to four significant figures.

(b) Find the exact volume generated when the region R is rotated through 2π radians about the y-axis.

Mayo 16
TZ1
P1#13

The following diagram shows the graph of $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, $x > 0$.



(a) Given that the curve passes through the point $(a, 0)$, state the value of a.

The region R is enclosed by the curve, the x-axis and the line $x = \mathrm{e}$.

(b) Use the substitution $u = \ln x$ to find the area of the region R.

Let $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) (i) Find the value of I_0.

(ii) Prove that $I_n = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + nI_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(iii) Hence find the value of I_1.

(d) Find the volume of the solid formed when the region R is rotated through 2π about the x-axis.

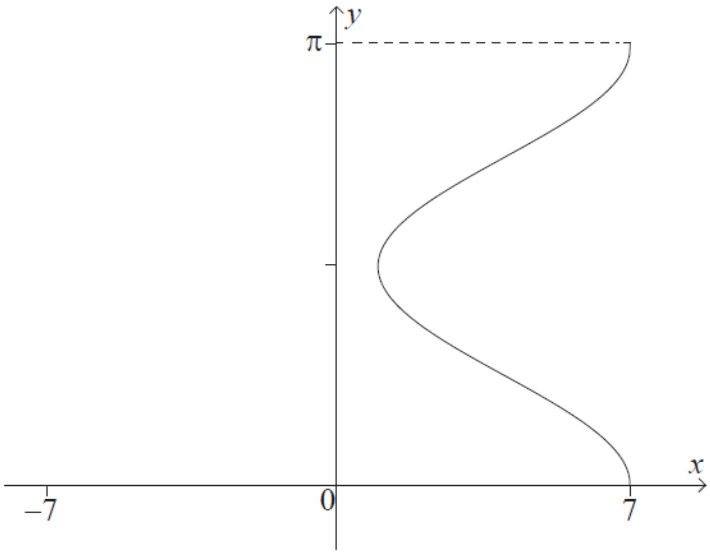
Mayo 16
TZ2
P1#3

(a) Muestre que $\operatorname{cotan} \alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

(b) A partir de lo anterior, halle $\displaystyle\int_{\tan\alpha}^{\operatorname{cotan}\alpha} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Mayo 16
TZ2
P1#11

El siguiente gráfico muestra la relación $x = 3\cos 2y + 4$, $0 \le y \le \pi$.



La curva se rota $360°$ alrededor del eje y para así generar el volumen de revolución.

(a) Calcule el valor del volumen generado.

Se fabrica un contenedor que tiene esta forma, con una base sólida de $14\,\text{cm}$ de diámetro. El contenedor se va llenando de agua a razón de $2\,\text{cm}^3\,\text{min}^{-1}$. En el tiempo *t* minutos, la profundidad del agua es igual a $h\,\text{cm}$, $0 \le h \le \pi$, y el volumen del agua en el contendor es $V\text{cm}^3$.

(b) (i) Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \pi(3\cos 2h + 4)^2$, halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

(ii) Halle el valor de $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ cuando $h = \frac{\pi}{4}$.

(c) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$.

(ii) Halle los valores de h para los cuales $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

(iii) Haciendo referencia explícita a la forma del contenedor, interprete $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ en los valores de h que ha hallado en el apartado (c)(ii).

Mayo 16 TZ2 P1#12

Las funciones f y g se definen mediante

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

(a) (i) Muestre que $\dfrac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 3}$.

(ii) Utilice la sustitución $u = e^x$ para hallar $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)} dx$. Dé la respuesta en la forma $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $h(x) = nf(x) + g(x)$ donde $n \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

(b) (i) Resuelva la ecuación $h(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}^+$, formando para ello una ecuación cuadrática en e^x.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que la ecuación $h(x) = k$ tiene dos soluciones reales siempre que se cumpla que $k > \sqrt{n^2 - 1}$ y $k \in \mathbb{R}^+$.

Sea $t(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

(c) (i) Muestre que $t'(x) = \dfrac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $t'(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

Nov 16 P2#10

Let the function f be defined by $f(x) = \dfrac{2 - e^x}{2e^x - 1}$, $x \in D$.

(a) Determine D, the largest possible domain of f.

(b) Show that the graph of f has three asymptotes and state their equations.

(c) Show that $f'(x) = -\dfrac{3e^x}{(2e^x - 1)^2}$.

(d) Use your answers from parts (b) and (c) to justify that f has an inverse and state its domain.

(e) Find an expression for $f^{-1}(x)$.

(f) Consider the region R enclosed by the graph of $y = f(x)$ and the axes.
Find the volume of the solid obtained when R is rotated through 2π about the y-axis.