Geometría Analítica del Espacio en exámenes BI-NS

Mayo 00 P1#8

Find a vector that is normal to the plane containing the lines L_1 and L_2, whose equations are:

$$L_1: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} + \lambda(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$$
$$L_2: \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} + \mu(\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$$

Mayo 00 P1#10

The plane $6x - 2y + z = 11$ contains the line $x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{l}$. Find l.

Mayo 00 P1#15

Find the coordinates of the point which is nearest to the origin on the line

$$L: x = 1 - \lambda,\ y = 2 - 3\lambda,\ z = 2.$$

Nov 00

(c) Find the coordinates of the point of intersection of the planes $x + 2y + 3z = 5$, $2x - y + 2z = 7$ and $3x - 3y + 2z = 10$.

(a) If $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, show that

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}.$$

(b) Let $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}$ where λ and μ are scalars. Show that $\boldsymbol{w}$ is perpendicular to the line of intersection of the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $2x - y + 2z = 7$ for all values of λ and μ.

Mayo 01

Find the equation of the line of intersection of the two planes $-4x + y + z = -2$ and $3x - y + 2z = -1$.

Mayo 01

Find an equation of the plane containing the two lines

$$x - 1 = \frac{1-y}{2} = z - 2 \text{ and } \frac{x+1}{3} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+2}{5}$$

Nov 01 P1#15

Point A(3, 0, –2) lies on the line $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k} + \lambda(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$, where λ is a real parameter. Find the coordinates of **one** point which is 6 units from A, and on the line.

Nov 01 P2#1

(b) Find the vector $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) \times (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$.

(c) If $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ where m, n are scalars, and $\boldsymbol{u} \neq 0$, show that $\boldsymbol{v}$ is perpendicular to $\boldsymbol{u}$ for all m and n.

(d) The line l lies in the plane $3x - y + z = 6$, passes through the point $(1, -1, 2)$ and is perpendicular to $\boldsymbol{v}$. Find the equation of l.

Mayo 02 P1#8

Las ecuaciones vectoriales de las rectas L_1 y L_2 son

$$L_1: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} + \lambda(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k});$$
$$L_2: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} + \mu(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}).$$

Las dos rectas se cortan en el punto P. Halle el vector de posición de P.

Mayo 02 P2#1

Los puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas:

$$A : (1,\ 3,\ 1) \quad B : (1,\ 2,\ 4) \quad C : (2,\ 3,\ 6) \quad D : (5,\ -2,\ 1)\ .$$

(a) (i) Calcule el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, exprese su respuesta en función de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

(ii) Halle el área del triángulo ABC .

Llamamos Π al plano que contiene los puntos A, B y C, y L a la recta que pasa por D y es perpendicular a Π. El punto de intersección de L y Π es P .

(b) (i) Halle la ecuación cartesiana de Π .

(ii) Halle la ecuación cartesiana de L .

(c) Halle las coordenadas de P .

(d) Halle la distancia perpendicular de D a Π .

Nov 02 P1#10

Halle una ecuación de la recta de intersección de los siguientes dos planos.

$$x + 2y - 3z = 2$$
$$2x + 3y - 5z = 3$$

Nov 02 P2#4

Sean los puntos $A(1, 3, -17)$ y $B(6, -7, 8)$ que yacen sobre la recta l.

(a) Halle una ecuación de la recta l, dando su respuesta en forma paramétrica.

(b) El punto P está sobre l y es tal que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a l.
Halle las coordenadas de P.

Mayo 03

El punto A es el pie de la perpendicular trazada desde el punto $(1, 1, 9)$ al plano $2x + y - z = 6$. Halle las coordenadas de A.

Nov 03

Halle el ángulo formado por el plano $3x - 2y + 4z = 12$ y el eje z. Dé su respuesta al grado más próximo.

Nov 03

La recta L pasa por el punto $A(2, 5, -1)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x + y + z - 1 = 0$.

(a) Halle la ecuación cartesiana de la recta L.

(b) Halle el punto de intersección de la recta L y el plano.

(c) Halle las coordenadas del punto simétrico de A respecto al plano.

(d) Calcule la distancia del punto $B(2, 0, 6)$ a la recta L.

Mayo 04

La recta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} + \mu(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$ y el plano $2x - y + z + 2 = 0$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

Mayo 04

The line $x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ and the plane $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) = 1$ intersect at the point P. Find the coordinates of P.

Mayo 04

(a) Considere dos vectores unitarios $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en un espacio tridimensional. Demuestre que el vector $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ biseca al ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Considere los puntos $A(2, 5, 4)$, $B(1, 3, 2)$ y $C(5, 5, 6)$. La recta l pasa por B y biseca al ángulo ABC.

(b) Halle la ecuación de l.

(c) La recta l corta a (AC) en el punto D. Halle las coordenadas de D.

Mayo 04

(a) The point $P(1, 2, 11)$ lies in the plane π_1. The vector $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ is perpendicular to π_1. Find the Cartesian equation of π_1.

(b) The plane π_2 has equation $x + 3y - z = -4$.

(i) Show that the point P also lies in the plane π_2.

(ii) Find a vector equation of the line of intersection of π_1 and π_2.

(c) Find the acute angle between π_1 and π_2.

Nov 04

La ecuación de una recta l_1 es $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-9}{-2}$.

(a) Sea M un punto de l_1 con parámetro μ. Exprese las coordenadas de M en función de μ.

(b) La recta l_2 es paralela a l_1 y pasa por $P(4, 0, -3)$.

(i) Escriba una ecuación para l_2.

(ii) Exprese $\overrightarrow{PM}$ en función de μ.

(c) El vector $\overrightarrow{PM}$ es perpendicular a l_1.

(i) Halle el valor de μ.

(ii) Halle la distancia entre l_1 y l_2.

(d) El plano π_1 contiene a l_1 y a l_2. Halle una ecuación de π_1, expresando la respuesta en la forma $Ax + By + Cz = D$.

(e) El plano π_2 tiene por ecuación $x - 5y - z = -11$. Compruebe que l_1 es la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

Nov 04

Considere los cuatro puntos $A(1, 4, -1)$, $B(2, 5, -2)$, $C(5, 6, 3)$ y $D(8, 8, 4)$. Halle el punto de intersección entre las rectas (AB) y (CD).

Nov 04

(a) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al origen O y los dos puntos $A(1,1,1)$ y $B(2,-1,3)$.

(b) Halle la distancia desde el punto $C(10, 5, 1)$ al plano OAB.

Mayo 05

The line $\frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{5-z}{3}$ and the plane $2x - y + 3z = 10$ intersect at the point P. Find the coordinates of P.

Mayo 05

(a) Sea π_1 el plano de ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Sea π_2 el plano de ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Compruebe que $\lambda = \mu$ para los puntos comunes a π_1 y π_2.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle una ecuación vectorial de la recta de intersección entre π_1 y π_2.

(b) El plano π_3 contiene a la recta $\frac{2-x}{3} = \frac{y}{-4} = z+1$ y es perpendicular a $3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Halle la ecuación cartesiana de π_3.

(c) Halle la intersección entre π_1, π_2 y π_3.

Mayo 05

A plane π_1 has equation $\boldsymbol{r} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 15$.

(a) A point P $(p, -p, p)$ lies on plane π_1 and Q is the point where the plane π_1 meets the y-axis.

(i) Find the coordinates of P and of Q.

(ii) Show that $\overrightarrow{PQ}$ is parallel to the vector $\boldsymbol{u}$, where $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

(b) Another plane π_2 intersects π_1 in the line (PQ). The point T $(1, 0, -1)$ lies on π_2.

(i) Find the equation of π_2, giving your answer in the form $Ax + By + Cz = D$.

(ii) Find the angle between π_1 and π_2.

Nov 05

The line $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{2}$ is reflected in the plane $x+y+z=1$. Calculate the angle between the line and its reflection. Give your answer in **radians**.

Nov 05

El plano π contiene la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{6}$ y el punto $(1, -2, 3)$.

(a) Compruebe que la ecuación de π es $6x+2y-3z=-7$.

(b) Calcule la distancia del plano π al origen.

Muestra 06 = 08

(a) Write down the inverse of the matrix

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) **Hence,** find the point of intersection of the three planes.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= 2 \\ x - 5y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

(c) A fourth plane with equation $x+y+z=d$ passes through the point of intersection. Find the value of d.

Muestra 06 = 08

The line L is given by the parametric equations $x=1-\lambda$, $y=2-3\lambda$, $z=2$. Find the coordinates of the point on L which is nearest to the origin.

Mayo 06

Let A be the point $(2, -1, 0)$, B the point $(3, 0, 1)$ and C the point $(1, m, 2)$, where $m \in \mathbb{Z}$, $m<0$.

(a) (i) Find the scalar product $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

(ii) Hence, given that $A\hat{B}C = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$, show that $m=-1$.

(b) Determine the Cartesian equation of the plane ABC.

(c) Find the area of triangle ABC.

(d) (i) The line L is perpendicular to plane ABC and passes through A. Find a vector equation of L.

(ii) The point $D(6, -7, 2)$ lies on L. Find the volume of the pyramid ABCD.

Nov 06

The lines L_1 and L_2 have parametric equations

$$L_1: x=1+2\lambda\ ,\ y=1+3\lambda\ ,\ z=1-\lambda$$
$$L_2: x=2-\mu\ ,\ y=3+4\mu\ ,\ z=4+2\mu$$

Find the angle between L_1 and L_2.

Nov 06

Let P be the point $(1, 0, -2)$ and Π be the plane $x+y-2z+3=0$. Let P' be the reflection of P in the plane Π. Find the coordinates of the point P'.

Nov 06

(a) The line l_1 passes through the point $\mathrm{A}(0, 1, 2)$ and is perpendicular to the plane $x-4y-3z=0$. Find the Cartesian equations of l_1.

(b) The line l_2 is parallel to l_1 and passes through the point $\mathrm{P}(3, -8, -11)$. Find the vector equation of the line l_2.

(c) (i) The point Q is on the line l_1 such that $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ is perpendicular to l_1 and l_2. Find the coordinates of Q.

(ii) Hence find the distance between l_1 and l_2.

Mayo 07

Two planes π_1 and π_2 are represented by the equations

$$\pi_1:\ r = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2:\ 2x-y-2z=4.$$

(a) (i) Find $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Show that the equation of π_1 can be written as $x-2y+2z=11$.

(b) Show that π_1 is perpendicular to π_2.

(c) The line l_1 is the line of intersection of π_1 and π_2.
Find the vector equation of l_1, giving the answer in parametric form.

(d) The line l_2 is parallel to **both** π_1 and π_2, and passes through $\mathrm{P}(3, -5, -1)$.
Find an equation for l_2 in Cartesian form.

(e) Let Q be the foot of the perpendicular from P to the plane π_2.

(i) Find the coordinates of Q.

(ii) Find PQ.

Mayo 07

Halle el coseno del ángulo θ que forman los planos π_1 y π_2, donde π_1 tiene por ecuación $-2x+y-z=2$ y π_2 tiene por ecuación $x+2y-z=6$.

Mayo 07

Considere los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

(a) Sabiendo que $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, halle el valor de m y de n.

(b) Halle un vector unitario $\boldsymbol{u}$ que sea normal a $\boldsymbol{a}$ y también a $\boldsymbol{b}$.

(c) El plano π_1 contiene al punto $A(1, -1, 1)$ y es normal al plano $\boldsymbol{b}$. El plano corta a los ejes x, y y z en los puntos L, M y N respectivamente.

(i) Halle la ecuación cartesiana de π_1.

(ii) Escriba las coordenadas de L, M y N.

(d) La recta normal a π_1 y que pasa por el origen O corta a π_1 en el punto P.

(i) Halle las coordenadas de P.

(ii) **A partir de lo anterior** halle la distancia a π_1 desde el origen.

(e) El plano π_2 tiene por ecuación $x + 2y + 4z = 4$. Calcule el ángulo que hay entre π_2 y una recta paralela a $\boldsymbol{a}$.

Nov 07

The lines l_1 and l_2 have equations

$$\boldsymbol{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ and } \boldsymbol{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

respectively, where λ and μ are parameters.

(a) Show that l_1 passes through the point $(2, -7, 4)$.

(b) Determine whether the lines l_1 and l_2 intersect.

Nov 07

A plane Π has equation $\boldsymbol{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 16$ and a line l has equations $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-6}{4}$.

Show that the line l lies in the plane Π.

Muestra 06 = 08

(a) Show that lines $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ and $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$ intersect and find the coordinates of P, the point of intersection.

(b) Find the Cartesian equation of the plane Π that contains the two lines.

(c) The point Q(3, 4, 3) lies on Π. The line L passes through the midpoint of [PQ]. Point S is on L such that $\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\overrightarrow{QS}\right| = 3$, and the triangle PQS is normal to the plane Π. Given that there are two possible positions for S, find their coordinates.

Muestra 08

Consider the points $A(1, 2, 1)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, 0, 2)$ and $D(2, -1, -6)$.

(a) Find the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{BC}$.

(b) Calculate $\vec{AB} \times \vec{BC}$.

(c) Hence, or otherwise find the area of triangle ABC.

(d) Find the Cartesian equation of the plane P containing the points A, B and C.

(e) Find a set of parametric equations for the line L through the point D and perpendicular to the plane P.

(f) Find the point of intersection E, of the line L and the plane P.

(g) Find the distance from the point D to the plane P.

(h) Find a unit vector which is perpendicular to the plane P.

(i) The point F is a reflection of D in the plane P. Find the coordinates of F.

Mayo 08

A ray of light coming from the point $(-1, 3, 2)$ is travelling in the direction of vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ and meets the plane $\pi : x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Find the angle that the ray of light makes with the plane.

Mayo 08

The points A, B, C have position vectors $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ respectively and lie in the plane π.

(a) Find

(i) the area of the triangle ABC;

(ii) the shortest distance from C to the line AB;

(iii) the cartesian equation of the plane π.

The line L passes through the origin and is normal to the plane π, it intersects π at the point D.

(b) Find

(i) the coordinates of the point D;

(ii) the distance of π from the origin.

Mayo 08

Consider the points $A(1, -1, 4)$, $B(2, -2, 5)$ and $O(0, 0, 0)$.

(a) Calculate the cosine of the angle between $\vec{OA}$ and $\vec{AB}$.

(b) Find a vector equation of the line L_1 which passes through A and B.

The line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} + t(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$, where $t \in \mathbb{R}$.

(c) Show that the lines L_1 and L_2 intersect and find the coordinates of their point of intersection.

(d) Find the Cartesian equation of the plane which contains both the line L_2 and the point A.

Mayo 08

Find the vector equation of the line of intersection of the three planes represented by the following system of equations.

$$\begin{aligned} 2x - 7y + 5z &= 1 \\ 6x + 3y - z &= -1 \\ -14x - 23y + 13z &= 5 \end{aligned}$$

Nov 08

(a) Write the vector equations of the following lines in parametric form.

$$r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Hence show that these two lines intersect and find the point of intersection, A.

(c) Find the Cartesian equation of the plane Π that contains these two lines.

(d) Let B be the point of intersection of the plane Π and the line $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Find the coordinates of B.

(e) If C is the mid-point of AB, find the vector equation of the line perpendicular to the plane Π and passing through C.

Nov 08

(a) Find the set of values of k for which the following system of equations has no solution.

$$x+2y-3z=k$$
$$3x+y+2z=4$$
$$5x+7z=5$$

(b) Describe the geometrical relationship of the three planes represented by this system of equations.

Mayo 09 P1 TZ2 #10

(a) Compruebe que una ecuación cartesiana de la recta, l_1, a la que pertenecen los puntos $\mathrm{A}(1,-1,2)$ y $\mathrm{B}(3,0,3)$, es de la forma $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

(b) Una ecuación de una segunda recta, l_2, es de la forma $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Compruebe que las rectas l_1 y l_2 se cortan, y halle las coordenadas del punto de intersección.

(c) Sabiendo que $\boldsymbol{d}_1$ y $\boldsymbol{d}_2$ son vectores directores de l_1 y l_2 respectivamente, determine $\boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2$.

(d) Compruebe que una ecuación cartesiana del plano Π, que contiene a l_1 y l_2, es $-x-y+3z=6$.

(e) Halle una ecuación vectorial de la recta l_3, la cual es perpendicular al plano Π y pasa por el punto $\mathrm{T}(3,1,-4)$.

(f) (i) Halle el punto de intersección de la recta l_3 y el plano Π.

(ii) Halle las coordenadas de T', el punto simétrico de T respecto al plano Π.

(iii) A partir de lo anterior, halle el módulo del vector $\overrightarrow{\mathrm{TT}'}$.

Mayo 09 P2 TZ1 #5

Find the angle between the lines $\dfrac{x-1}{2}=1-y=2z$ and $x=y=3z$.

Mayo 09 P2 TZ1 #7

Consider the planes defined by the equations $x+y+2z=2$, $2x-y+3z=2$ and $5x-y+az=5$ where a is a real number.

(a) If $a=4$ find the coordinates of the point of intersection of the three planes.

(b) (i) Find the value of a for which the planes do not meet at a unique point.

(ii) For this value of a show that the three planes do not have any common point.

Mayo 09
P2 TZ1
#11

The position vector at time t of a point P is given by

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1+t)\,\boldsymbol{i} + (2-2t)\,\boldsymbol{j} + (3t-1)\,\boldsymbol{k}\,,\ t \geq 0.$$

(a) Find the coordinates of P when $t = 0$.

(b) Show that P moves along the line L with Cartesian equations

$$x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

(c) (i) Find the value of t when P lies on the plane with equation $2x+y+z=6$.

(ii) State the coordinates of P at this time.

(iii) Hence find the total distance travelled by P before it meets the plane.

The position vector at time t of another point, Q, is given by

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t \\ 1-t^2 \end{pmatrix},\ t \geq 0.$$

(d) (i) Find the value of t for which the distance from Q to the origin is minimum.

(ii) Find the coordinates of Q at this time.

(e) Let $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ be the position vectors of Q at times $t=0$, $t=1$ and $t=2$ respectively.

(i) Show that the equation $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = k\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ has no solution for k.

(ii) Hence show that the path of Q is not a straight line.

Nov 09
P2 #2

La ecuación vectorial de la recta l viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta l y al punto $\mathrm{A}(4,\ -2,\ 5)$.

Mayo 10
P1 TZ1
#3

(a) Show that the two planes

$$\pi_1 : x+2y-z=1$$
$$\pi_2 : x+z=-2$$

are perpendicular.

(b) Find the equation of the plane π_3 that passes through the origin and is perpendicular to both π_1 and π_2.

Mayo 10
P1 TZ2
#12

(a) Considere los vectores $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

(i) Halle el coseno del ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(ii) Halle $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(iii) **A partir de lo anterior**, halle la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y pasa por el punto $(1, 1, -1)$.

(iv) El plano Π corta al plano x-y en la recta l. Halle el área de la región triangular finita delimitada por la recta l, el eje x y el eje y.

Mayo 10
P2 TZ1
#11

A plane π has vector equation $\boldsymbol{r}=(-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+\lambda(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})+\mu(6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$.

(a) Show that the Cartesian equation of the plane π is $3x+2y-6z=12$.

(b) The plane π meets the x, y and z axes at A, B and C respectively. Find the coordinates of A, B and C.

(c) Find the volume of the pyramid OABC.

(d) Find the angle between the plane π and the x-axis.

(e) **Hence**, or otherwise, find the distance from the origin to the plane π.

(f) Using your answers from (c) and (e), find the area of the triangle ABC.

Mayo 10
P2 TZ2
#7

Los tres planos

$$2x-2y-z=3$$
$$4x+5y-2z=-3$$
$$3x+4y-3z=-7$$

se cortan en un punto de coordenadas (a, b, c).

(a) Halle el valor de a, b y c.

(b) Las ecuaciones de otros tres planos son

$$2x-4y-3z=4$$
$$-x+3y+5z=-2$$
$$3x-5y-z=6.$$

Halle una ecuación vectorial de la recta de intersección de estos tres planos.

Nov 10
P1 #7

Considere el plano cuya ecuación es $4x-2y-z=1$ y la recta que viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x=3-2\lambda$$
$$y=(2k-1)+\lambda$$
$$z=-1+k\lambda\,.$$

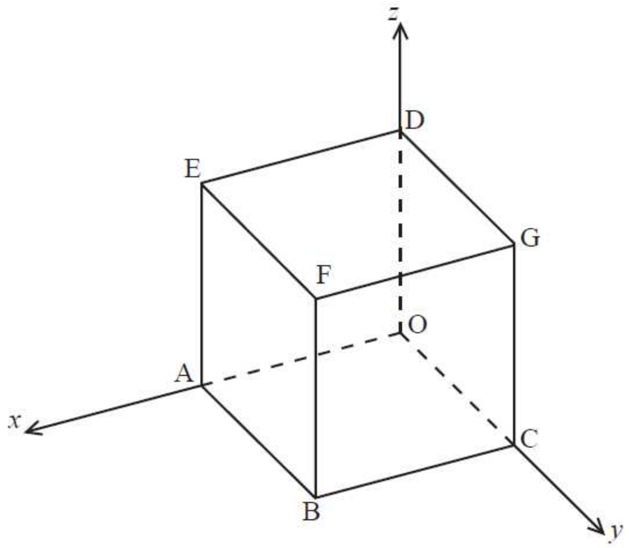
Sabiendo que la recta es perpendicular al plano, halle:

(a) el valor de k;

(b) las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano.

Nov 10
P2 #12

La siguente figura muestra un cubo OABCDEFG.



Sea O el origen, (OA) el eje x, (OC) el eje y y (OD) el eje z.
Sean M, N y P los puntos medios de [FG], [DG] y [CG], respectivamente.
Las coordenadas de F son $(2,\,2,\,2)$.

(a) Halle los vectores de posición $\vec{OM}$, $\vec{ON}$ y $\vec{OP}$ en función de sus componentes.

(b) Halle $\vec{MP}\times\vec{MN}$.

(c) **A partir de lo anterior**,

  (i) calcule el área del triángulo MNP;

  (ii) compruebe que la recta (AG) es perpendicular al plano MNP;

  (iii) halle la ecuación del plano MNP.

(d) Determine las coordenadas del punto donde la recta (AG) corta al plano MNP.

Mayo 11
P1 TZ1
#11

The points $A(1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(5, -1, 2)$ and $D(5, 3, 7)$ are the vertices of a tetrahedron.

(a) Find the vectors $\vec{AB}$ and $\vec{AC}$.

(b) Find the Cartesian equation of the plane Π that contains the face ABC.

(c) Find the vector equation of the line that passes through D and is perpendicular to Π. Hence, or otherwise, calculate the shortest distance to D from Π.

(d) (i) Calculate the area of the triangle ABC.

(ii) Calculate the volume of the tetrahedron ABCD.

(e) Determine which of the vertices B or D is closer to its opposite face.

Mayo 11
P2 TZ2
#11

Los puntos $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ y S forman un paralelogramo, siendo S diagonalmente opuesto a Q.

(a) Halle las coordenadas de S.

(b) El producto vectorial $\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}$. Halle el valor de m.

(c) A partir de lo anterior, calcule el área del paralelogramo PQRS.

(d) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1, que contiene al paralelogramo PQRS.

(e) Escriba la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano Π_1.

(f) A partir de lo anterior, halle el punto del plano que está más cerca del origen.

(g) Un segundo plano, Π_2, tiene por ecuación $x - 2y + z = 3$. Calcule el ángulo entre los dos planos.

Mayo 11
P2 TZ1
#11

The equations of three planes, are given by

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= 3 \\ -x + (a+1)y + 3z &= 1 \\ -2x + y + (a+2)z &= k \end{aligned}$$

where $a \in \mathbb{R}$.

(a) Given that $a = 0$, show that the three planes intersect at a point.

(b) Find the value of a such that the three planes do **not** meet at a point.

(c) Given a such that the three planes do **not** meet at a point, find the value of k such that the planes meet in one line and find an equation of this line in the form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

Nov 11
P2 #13

Dos planos Π_1 y Π_2 tienen por ecuación $2x + y + z = 1$ y $3x + y - z = 2$, respectivamente.

(a) Halle la ecuación vectorial de L, la recta de intersección de Π_1 y Π_2.

(b) Compruebe que el plano Π_3, que es perpendicular a Π_1 y contiene a L, tiene por ecuación $x - 2z = 1$.

(c) El punto P tiene coordenadas $(-2, 4, 1)$, el punto Q pertenece a Π_3 y PQ es perpendicular a Π_2. Halle las coordenadas de Q.

Mayo 12
P2 TZ2
#11

(a) Halle los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución y el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ x + 5y - 2z &= 1 \\ 16y - 6z &= k \end{aligned}$$

(b) Sabiendo que el sistema de ecuaciones se puede resolver, halle las soluciones en forma de ecuación vectorial de una recta, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$, donde las componentes de $\boldsymbol{b}$ son números enteros.

(c) El plano $\div$ es paralelo tanto a la recta del apartado (b) como a la recta $\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{0}$. Sabiendo que el punto $(1, 2, 0)$ pertenece a $\div$, compruebe que la ecuación cartesiana de $\div$ es $16x + 24y - 11z = 64$.

(d) El eje z corta al plano $\div$ en el punto P. Halle las coordenadas de P.

(e) Halle el ángulo entre la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{2}$ y el plano $\div$.

Mayo 12 P2 TZ1 #4

The planes $2x+3y-z=5$ and $x-y+2z=k$ intersect in the line $5x+1=9-5y=-5z$. Find the value of k.

Mayo 12 P2 TZ1 #13

The coordinates of points A, B and C are given as $(5,-2,5)$, $(5,4,-1)$ and $(-1,-2,-1)$ respectively.

(a) Show that $AB = AC$ and that $B\hat{A}C = 60°$.

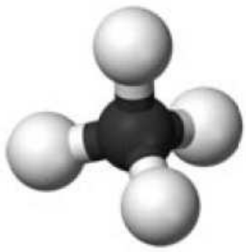
(b) Find the Cartesian equation of Π, the plane passing through A, B, and C.

(c) (i) Find the Cartesian equation of Π_1, the plane perpendicular to (AB) passing through the midpoint of [AB].

(ii) Find the Cartesian equation of Π_2, the plane perpendicular to (AC) passing through the midpoint of [AC].

(d) Find the vector equation of L, the line of intersection of Π_1 and Π_2, and show that it is perpendicular to Π.

A methane molecule consists of a carbon atom with four hydrogen atoms symmetrically placed around it in three dimensions.



The positions of the centres of three of the hydrogen atoms are A, B and C as given. The position of the centre of the fourth hydrogen atom is D.

(e) Using the fact that $AB = AD$, show that the coordinates of one of the possible positions of the fourth hydrogen atom is $(-1,4,5)$.

(f) Letting D be $(-1,4,5)$, show that the coordinates of G, the position of the centre of the carbon atom, are $(2,1,2)$. Hence calculate $D\hat{G}A$, the bonding angle of carbon.

Nov 12 P1#6

Considere las siguientes ecuaciones, donde $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x+3y+(a-1)z=1$$
$$2x+2y+(a-2)z=1$$
$$3x+y+(a-3)z=b.$$

(a) Sabiendo que cada una de estas ecuaciones define un plano, compruebe que, sea cual sea el valor de a, los planos no se cortan en un único punto.

(b) Halle el valor de b para el cual la intersección de los planos es una línea recta.

Nov 12 P2#13

Considere los planos $\pi_1 : x - 2y - 3z = 2$ y $\pi_2 : 2x - y - z = k$.

(a) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

(b) Los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta L_1. Compruebe que la ecuación vectorial de L_1 es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-3k \\ 2k-2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana $5 - x = y + 3 = 2 - 2z$. Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto X. Halle las coordenadas de X.

(d) Determine una ecuación cartesiana del plano π_3, que contiene a ambas rectas L_1 y L_2.

(e) Sea Y un punto perteneciente a L_1 y sea Z un punto perteneciente a L_2, de modo tal que XY sea perpendicular a YZ y el área del triángulo XYZ sea igual a 3. Halle el perímetro del triángulo XYZ.

Mayo 13 P1 TZ1 #2

Consider the points $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, 5)$ and $C(2, -1, 4)$.

(a) Find $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

(b) Hence find the area of the triangle ABC.

Mayo 13 P1 TZ2 #13

Los vértices de un triángulo ABC tienen las siguientes coordenadas: $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 1)$ y $C(3, -2, 2)$.

(a) (i) Halle la longitud de los lados del triángulo.

(ii) Halle $\cos B\hat{A}C$.

(b) (i) Compruebe que $\vec{BC} \times \vec{CA} = -7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{314}$.

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al triángulo ABC.

(d) Halle una ecuación vectorial de (AB).

El punto D pertenece a (AB), de modo tal que $\vec{OD}$ es perpendicular a $\vec{BC}$, donde O es el origen.

(e) (i) Halle las coordenadas de D.

(ii) Compruebe que D no se encuentra entre A y B.

Mayo 13 P2 TZ1 #11

The vertices of a triangle ABC have coordinates given by $A(-1, 2, 3)$, $B(4, 1, 1)$ and $C(3, -2, 2)$.

(a) (i) Find the lengths of the sides of the triangle.

(ii) Find $\cos B\hat{A}C$.

(b) (i) Show that $\vec{BC} \times \vec{CA} = -7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 16\boldsymbol{k}$.

(ii) Hence, show that the area of the triangle ABC is $\frac{1}{2}\sqrt{314}$.

(c) Find the Cartesian equation of the plane containing the triangle ABC.

(d) Find a vector equation of (AB).

The point D on (AB) is such that $\vec{OD}$ is perpendicular to $\vec{BC}$ where O is the origin.

(e) (i) Find the coordinates of D.

(ii) Show that D does not lie between A and B.

Nov 13 P1#11

Considere los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

(a) Halle el vector $\vec{CA} \times \vec{CB}$.

(b) Halle un valor exacto para el área del triángulo ABC.

(c) Compruebe que la ecuación cartesiana de Π_1, el plano que contiene al triángulo ABC, es $2x + 3y - 4z = 2$.

Un segundo plano Π_2 viene definido por la ecuación cartesiana $\Pi_2: 4x - y - z = 4$. L_1 es la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Halle una ecuación vectorial de L_1.

Un tercer plano Π_3 viene definido por la ecuación cartesiana $16x + \alpha y - 3z = \beta$.

(e) Halle el valor de α para el cual los tres planos contienen a la recta L_1.

(f) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que el plano Π_3 **no** se corte con L_1.

Nov 13 P2#9

La recta L_1 tiene por ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La recta L_2 pasa por el origen, corta a L_1 y es perpendicular a L_1.

(a) Halle una ecuación vectorial de L_2.

(b) Determine la distancia más corta entre el origen y L_1.

Muestra 14 P1#8

The vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ satisfy the equation $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Show that $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

Muestra 14 P2#10

The points A and B have coordinates $(1, 2, 3)$ and $(3, 1, 2)$ relative to an origin O.

(a) (i) Find $\vec{\mathrm{OA}} \times \vec{\mathrm{OB}}$.

(ii) Determine the area of the triangle OAB.

(iii) Find the Cartesian equation of the plane OAB.

(b) (i) Find the vector equation of the line L_1 containing the points A and B.

(ii) The line L_2 has vector equation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Determine whether or not L_1 and L_2 are skew.

Mayo 14 P1 TZ1 #12

(a) Show that the points $\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}(6, 0, 0)$, $\mathrm{B}\left(6, -\sqrt{24}, \sqrt{12}\right)$, $\mathrm{C}\left(0, -\sqrt{24}, \sqrt{12}\right)$ form a square.

(b) Find the coordinates of M, the mid-point of [OB].

(c) Show that an equation of the plane Π, containing the square OABC, is $y+\sqrt{2}z=0$.

(d) Find a vector equation of the line L, through M, perpendicular to the plane Π.

(e) Find the coordinates of D, the point of intersection of the line L with the plane whose equation is $y=0$.

(f) Find the coordinates of E, the reflection of the point D in the plane Π.

(g) (i) Find the angle $\mathrm{O\hat{D}A}$.

(ii) State what this tells you about the solid OABCDE.

Mayo 14
P1 TZ2
#12

Dados los puntos $A(1, 0, 4)$, $B(2, 3, -1)$ y $C(0, 1, -2)$,

(a) halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B.

La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

(b) Muestre que L_1 y L_2 son rectas alabeadas.

Considere el plano Π_1, paralelo a L_1 y también a L_2. El punto C pertenece al plano Π_1.

(c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1.

La recta L_3 tiene por ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

El plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana $x + y = 12$.

El ángulo entre la recta L_3 y el plano Π_2 es igual a $60°$.

(d) (i) Halle el valor de k.

(ii) Halle el punto de intersección P de la recta L_3 y el plano Π_2.

Nov 14
P2#5

Las rectas l_1 y l_2 vienen dadas por

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}.$$

El plano π contiene a l_1 y también a l_2.

(a) Halle la ecuación cartesiana de π.

La recta l_3 pasa por el punto $(4, 0, 8)$ y es perpendicular a π.

(b) Halle las coordenadas del punto en el que l_3 corta a π.

Mayo 15 P1 TZ1 #13

Two lines l_1 and l_2 are given respectively by the equations $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda \boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mu \boldsymbol{w}$ where $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ and O is the origin. Let P be a point on l_1 and let Q be a point on l_2.

(a) Find $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, in terms of λ and μ.

(b) Find the value of λ and the value of μ for which $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ is perpendicular to the direction vectors of both l_1 and l_2.

(c) Hence find the shortest distance between l_1 and l_2.

(d) Find the Cartesian equation of the plane Π, which contains line l_1 and is parallel to the direction vector of line l_2.

Let $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \eta\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

(e) Find the value of η for which the point T lies in the plane Π.

(f) For this value of η, calculate $\left|\overrightarrow{\mathrm{BT}}\right|$.

(g) State what you notice about your answers to (c) and (f), and give a geometrical interpretation of this result.

Mayo 15 P2 TZ2 #13

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son

$$L_1 : \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 : \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.

(b) Halle el ángulo agudo que forman las rectas L_1 y L_2.

(c) (i) Halle un vector perpendicular a ambas rectas.

(ii) A partir de lo anterior, determine una ecuación de la recta L_3 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que corta a ambas rectas.

Mayo 15 P2 TZ2 #5

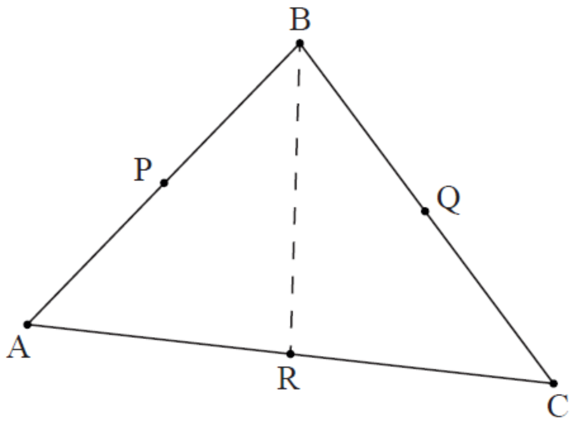
Considere los vectores dados por $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, donde a y b son constantes.

Se sabe que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, donde c es una constante.

(a) Halle el valor de cada una de las constantes a, b y c.

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ y pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Nov 15 P1#13



Consider the triangle ABC. The points P, Q and R are the midpoints of the line segments [AB], [BC] and [AC] respectively.

Let $\vec{OA} = \boldsymbol{a}$, $\vec{OB} = \boldsymbol{b}$ and $\vec{OC} = \boldsymbol{c}$.

(a) Find $\vec{BR}$ in terms of $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$.

(b) (i) Find a vector equation of the line that passes through B and R in terms of $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ and a parameter λ.

(ii) Find a vector equation of the line that passes through A and Q in terms of $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ and a parameter μ.

(iii) Hence show that $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ given that G is the point where [BR] and [AQ] intersect.

(c) Show that the line segment [CP] also includes the point G.

The coordinates of the points A, B and C are $(1, 3, 1)$, $(3, 7, -5)$ and $(2, 2, 1)$ respectively.
A point X is such that [GX] is perpendicular to the plane ABC.

(d) Given that the tetrahedron ABCX has volume 12 units^3, find possible coordinates of X.

Mayo 16 TZ1 P1#11

Two planes have equations

$$\Pi_1 : 4x + y + z = 8 \text{ and } \Pi_2 : 4x + 3y - z = 0$$

(a) Find the cosine of the angle between the two planes in the form $\sqrt{\frac{p}{q}}$ where $p, q \in \mathbb{Z}$.

Let L be the line of intersection of the two planes.

(b) (i) Show that L has direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Show that the point $\mathrm{A}(1, 0, 4)$ lies on both planes.

(iii) Write down a vector equation of L.

B is the point on Π_1 with coordinates $(a, b, 1)$.

(c) Given the vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ is perpendicular to L find the value of a and the value of b.

(d) Show that $\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}$.

The point P lies on L and $\mathrm{A\hat{B}P} = 45°$.

(e) Find the coordinates of the two possible positions of P.

Mayo 16 TZ2 P1#10

Una recta L tiene por ecuación $\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z - 1$, donde $p, q \in \mathbb{R}$.

Un plano Π tiene por ecuación $x + y + 3z = 9$.

(a) Muestre que L no es perpendicular a Π.

(b) Sabiendo que L está contenida en el plano Π, halle el valor de p y el valor de q.

Considere ahora un caso distinto, en el que L y Π forman un ángulo agudo θ, donde $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

(c) (i) Muestre que $p = -2$.

(ii) Si L y Π se cortan en $z = -1$, halle el valor de q.

Mayo 16 TZ1 P2#1

The points A and B have position vectors $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ and $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Find $\vec{OA} \times \vec{OB}$.

(b) Hence find the area of the triangle OAB.

Nov 16 P1#1

Halle las coordenadas del punto de intersección de los planos definidos por las ecuaciones $x+y+z=3$, $x-y+z=5$, $x+y+2z=6$.

Nov 16 P1#4

Considere los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

(a) Halle $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

Nov 16 P1#8

Considere las rectas l_1 y l_2 definidas mediante

$$l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } l_2 : \frac{6-x}{3} = \frac{y-2}{4} = 1 - z$$ donde a es una constante.

Sabiendo que las rectas l_1 y l_2 se cortan en un punto P,

(a) halle el valor de a;

(b) determine las coordenadas del punto de intersección P.

Nov 16 P2#2

Halle el ángulo agudo entre los planos cuyas ecuaciones son $x+y+z=3$ y $2x-z=2$.