Actividades de Optimización en exámenes BI-NS

Mayo 01

An astronaut on the moon throws a ball vertically upwards. The height, s metres, of the ball, after t seconds, is given by the equation $s = 40t + 0.5at^2$, where a is a constant. If the ball reaches its maximum height when $t = 25$, find the value of a.

Mayo 02

Se traza un rectángulo tal que sus vértices inferiores están sobre el eje x y sus vértices superiores están sobre la curva $y = e^{-x^2}$. El área de este rectángulo se denomina A.

(a) Escriba una expresión de A en función de x.

(b) Halle el valor máximo de A.

Nov 04

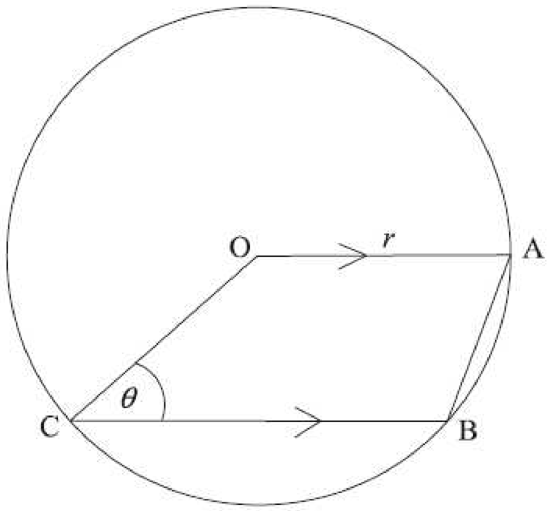
Una lata cilíndrica cerrada tiene un volumen de 500 cm^3. La altura de la lata es h cm y el radio de la base es r cm.

(a) Halle una expresión para la superficie total A de la lata en función de r.

(b) Dado que hay un valor mínimo de A para $r > 0$, halle este valor de r.

Mayo 05

La siguiente figura muestra un trapecio OABC donde OA es paralelo a CB. O es el centro de un círculo de radio r cm. A, B y C pertenecen a la circunferencia.
El ángulo OCB $= \theta$.



Sea T el área del trapecio OABC.

(a) Compruebe que $T = \frac{r^2}{2}(\text{sen}\theta + \text{sen}2\theta)$.

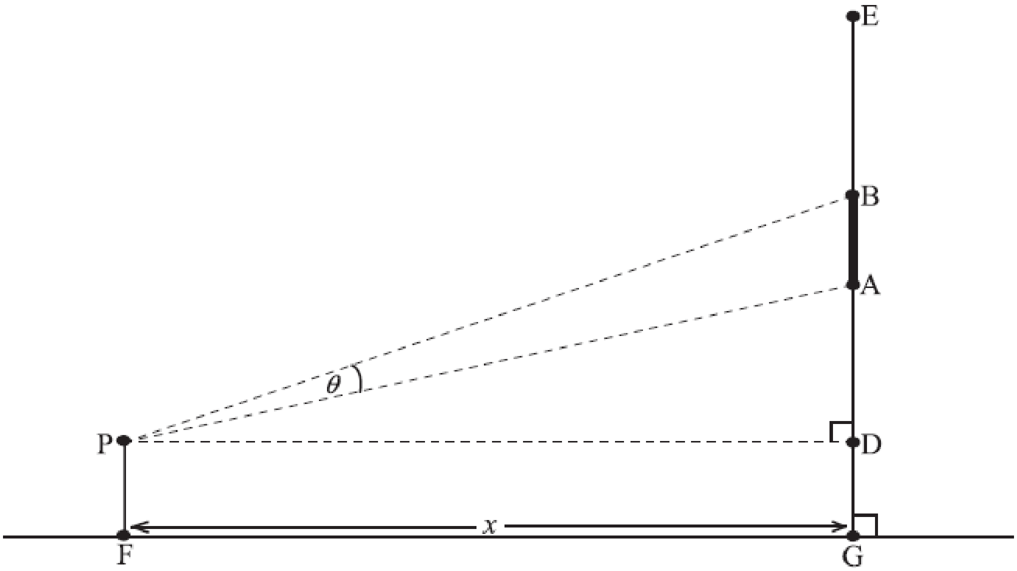
Para un valor **fijo** de r, el valor de T cambia según cambia el valor de θ.

(b) Compruebe que T toma su valor máximo cuando θ satisface la ecuación $4\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$, y verifique que ese valor de T es un máximo.

(c) Sabiendo que el perímetro del trapecio es 75 cm, halle el valor máximo de T.

Nov 05

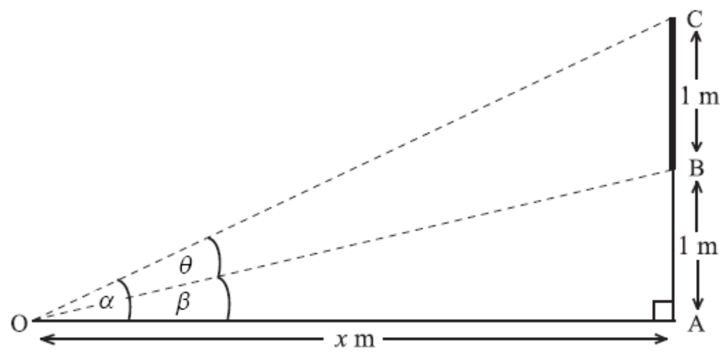
Un hombre PF está de pie sobre un suelo horizontal en F, a una distancia x del fondo de un muro vertical GE. El hombre observa el cuadro AB en la pared. El ángulo BPA es θ.



Sea $DA = a$, $DB = b$, donde el ángulo PDE es un ángulo recto. Halle el valor de x para el cual $\tan\theta$ es un máximo; exprese su respuesta en función de a y b. Justifique que este valor de x da un valor máximo de $\tan\theta$.

Mayo 07

Se coloca en una pared una pantalla de televisión BC de un metro de altura. La parte inferior de la pantalla de televisión, B, está situada un metro por encima de la altura de los ojos de un observador. Los ángulos de elevación ($A\hat{O}C$, $A\hat{O}B$) desde la altura de los ojos del observador, O, hasta la parte superior e inferior de la pantalla de televisión son α y β radianes respectivamente. La distancia en horizontal desde el ojo del observador hasta la pared donde se ha colgado la pantalla de televisión es igual a x metros. El ángulo de visión del observador ($B\hat{O}C$) es θ radianes, tal como se muestra a continuación.



(a) (i) Compruebe que $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el valor **exacto** de x para el cual θ es máximo, y justifique por qué esa x da un máximo de θ.

(iii) Halle el valor máximo de θ.

(b) Halle dónde se debería situar el observador para que el ángulo de visión sea igual a $15°$.

Muestra 06 P1#2 08 P2#8

The displacement s metres of a moving body B from a fixed point O at time t seconds is given by

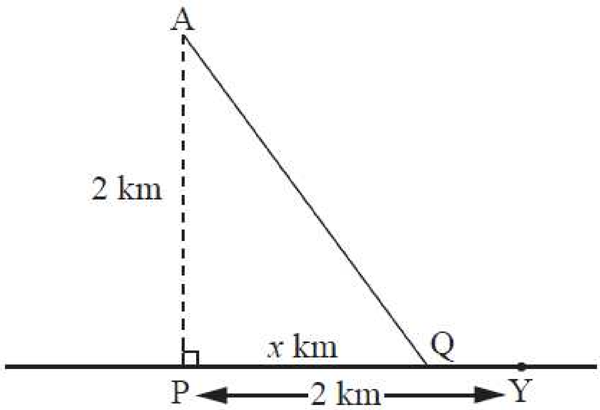
$$s = 50t - 10t^2 + 1000.$$

(a) Find the velocity of B in $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

(b) Find its maximum displacement from O.

Mayo 08 TZ2 P1#13

André quiere ir desde un punto A situado en el mar hasta el punto Y, situado en un tramo recto de playa. P es el punto de la playa más próximo a A, de tal forma que $AP = 2$ km y $PY = 2$ km. André hace este trayecto primero nadando en línea recta hasta un punto Q situado en la playa y, a continuación, corriendo hasta Y.



Cuando André nada, recorre una distancia de 1 km en $5\sqrt{5}$ minutos. Cuando corre, recorre una distancia de 1 km en 5 minutos.

(a) Si $PQ = x$ km, $0 \le x \le 2$, halle una expresión para el tiempo T en minutos que André tarda en llegar al punto Y.

(b) Compruebe que $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{5\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2+4}} - 5$.

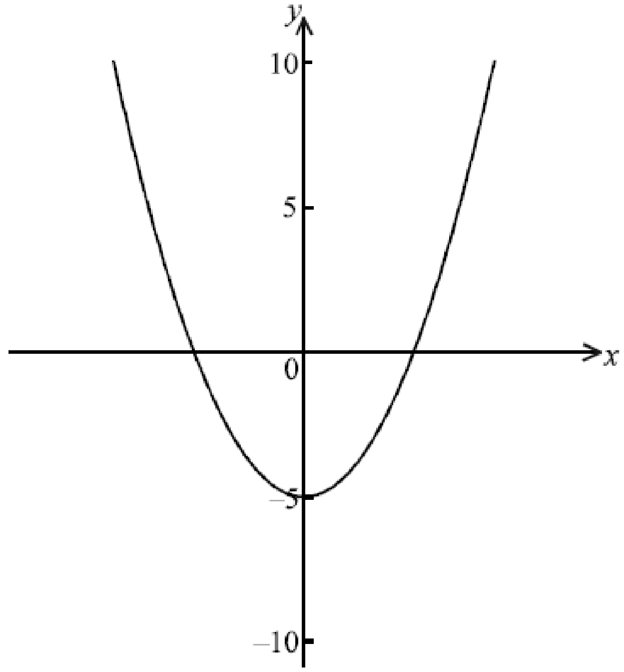
(c) (i) Resuelva $\dfrac{dT}{dx} = 0$.

(ii) Use el valor de x hallado en la **parte (c) (i)** para determinar el tiempo, T, en minutos, André tarda en llegar al punto Y.

(iii) Compruebe que $\dfrac{d^2T}{dx^2} = \dfrac{20\sqrt{5}}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$ y, **a partir allí**, compruebe que el tiempo que obtuvo en el **apartado (c) (ii)** es un mínimo.

Muestra 08 P1#40

The curve $y = x^2 - 5$ is shown below.



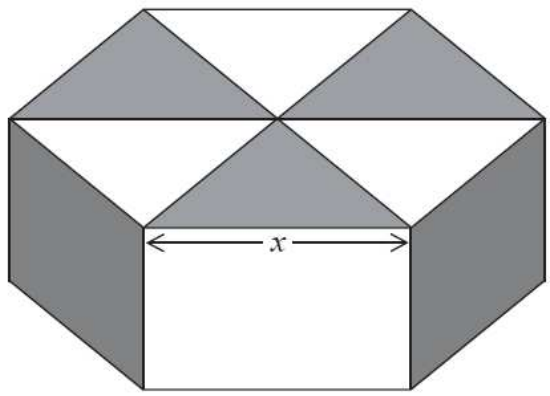
A point P on the curve has x-coordinate equal to a.

(a) Show that the distance OP is $\sqrt{a^4 - 9a^2 + 25}$.

(b) Find the values of a for which the curve is closest to the origin.

Nov 08 P1#9

Una empresa de embalajes fabrica cajas para bombones. A continuación se muestra como ejemplo una de estas cajas. La caja tiene tapa, y las partes superior e inferior de la caja son hexágonos regulares idénticos de lado x cm.



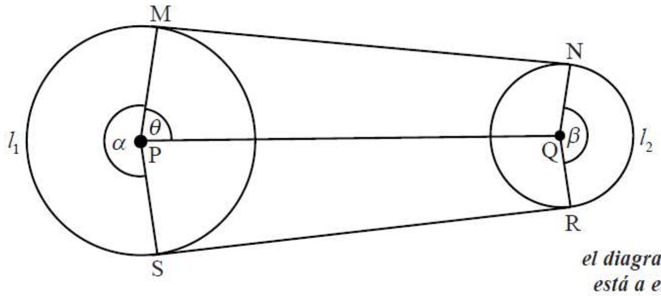
el diagrama no está a escala

(a) Compruebe que el área de cada hexágono es igual a $\dfrac{3\sqrt{3}x^2}{2}$ cm^2.

(b) Sabiendo que el volumen de la caja es igual a 90 cm^3, compruebe que cuando $x = \sqrt[3]{20}$ el valor de la superficie total de la caja alcanza un mínimo, justificando por qué este valor determina un mínimo.

Mayo 09 TZ2 P2#9

Sean dos círculos que no se cortan: C_1, que contiene los puntos M y S, y C_2, que contiene los puntos N y R, y cuyos centros son P y Q, siendo $PQ = 50$. Los segmentos de recta [MN] y [SR] son ambos tangentes a los dos círculos. El ángulo cóncavo MPS mide α, el ángulo obtuso NQR mide β, y el ángulo MPQ mide θ. La longitud del arco MS es l_1 y la longitud del arco NR es l_2. Esta información se representa en el siguiente diagrama.



el diagrama no está a escala

El radio de C_1 es x, donde $x \geq 10$ y el radio de C_2 es igual a 10.

(a) Explique por qué $x < 40$.

(b) Compruebe que $\cos\theta = \frac{x-10}{50}$.

(c) (i) Halle una expresión para MN en función de x.

(ii) Halle el valor de x para el cual el valor de MN es máximo.

(d) Halle una expresión, en función de x, para

(i) α;

(ii) β.

(e) La longitud del perímetro viene dada por $l_1 + l_2 + \text{MN} + \text{SR}$.

(i) Halle una expresión, $b(x)$, para la longitud del perímetro en función de x.

(ii) Halle el valor máximo de la longitud del perímetro.

(iii) Halle el valor de x para el cual la longitud del perímetro es igual a 200.

N09 P2#3

The diagram below shows two concentric circles with centre O and radii 2 cm and 4 cm.

The points P and Q lie on the larger circle and $\hat{POQ} = x$, where $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

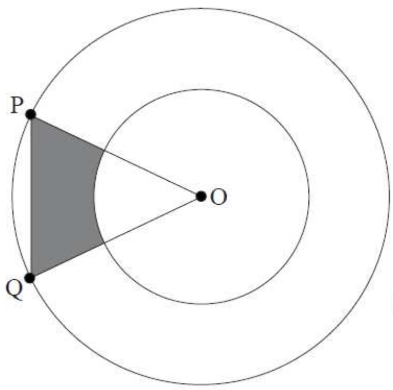


diagram not to scale

(a) Show that the area of the shaded region is $8\sin x - 2x$.

(b) Find the maximum area of the shaded region.

M10 TZ1 P2#13

Points A, B and C are on the circumference of a circle, centre O and radius r. A trapezium OABC is formed such that AB is parallel to OC, and the angle $\mathrm{A\hat{O}C}$ is θ, $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$.

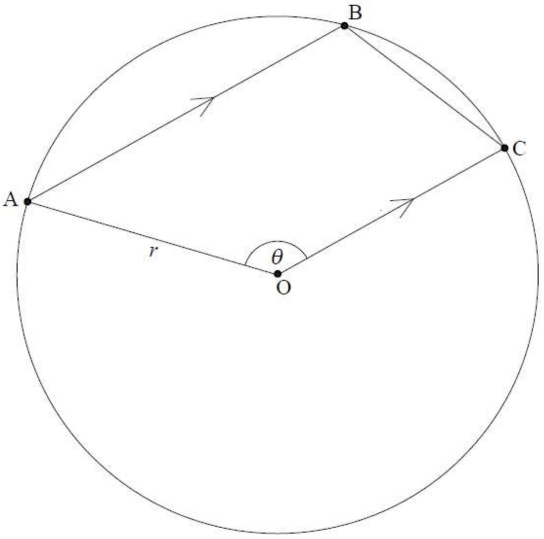


diagram not to scale

(a) Show that angle $\mathrm{B\hat{O}C}$ is $\pi - \theta$.

(b) Show that the area, T, of the trapezium can be expressed as

$$T = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta .$$

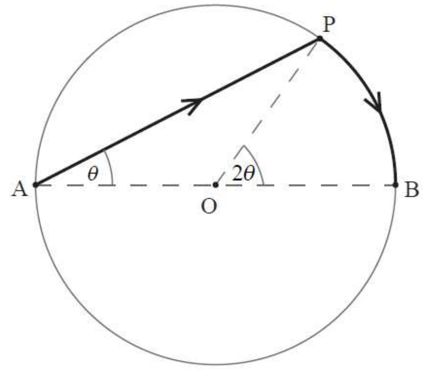
(c) (i) Show that when the area is maximum, the value of θ satisfies

$$\cos\theta = 2\cos 2\theta .$$

(ii) **Hence** determine the maximum area of the trapezium when $r = 1$.
(Note: It is not required to prove that it is a maximum.)

Nov 11 P1#8

The diagram below shows a circular lake with centre O, diameter AB and radius 2 km.



Jorg needs to get from A to B as quickly as possible. He considers rowing to point P and then walking to point B. He can row at $3\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ and walk at $6\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Let $\mathrm{P\hat{A}B} = \theta$ radians, and t be the time in hours taken by Jorg to travel from A to B.

(a) Show that $t = \frac{2}{3}(2\cos\theta + \theta)$.

(b) Find the value of θ for which $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = 0$.

(c) What route should Jorg take to travel from A to B in the least amount of time? Give reasons for your answer.

Nov 11 P1#11

At 12:00 a boat is 20 km due south of a freighter. The boat is travelling due east at 20 km h^{-1}, and the freighter is travelling due south at 40 km h^{-1}.

(a) Determine the time at which the two ships are closest to one another, and justify your answer.

(b) If the visibility at sea is 9 km, determine whether or not the captains of the two ships can ever see each other's ship.

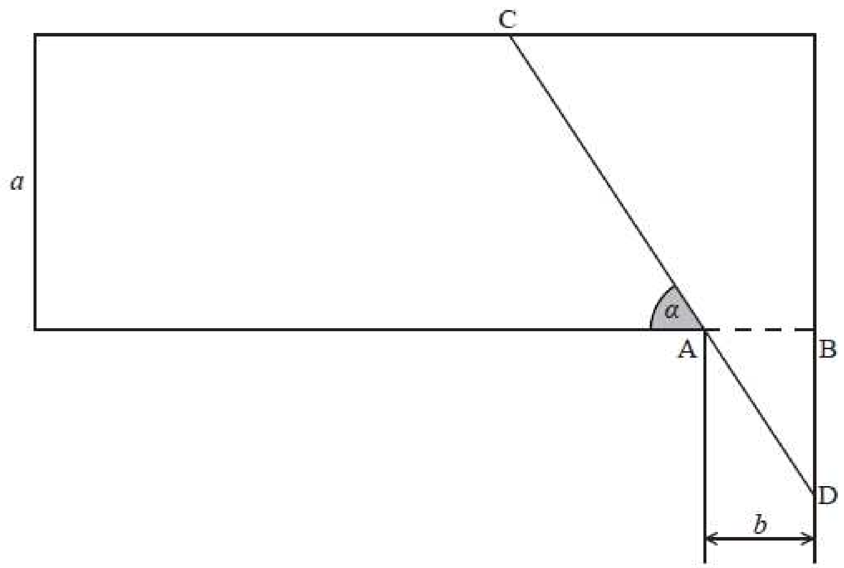
M12 TZ1 P2#10

A triangle is formed by the three lines $y = 10 - 2x$, $y = mx$ and $y = -\frac{1}{m}x$, where $m > \frac{1}{2}$.

Find the value of m for which the area of the triangle is a minimum.

Nov 12 P2#12

The diagram shows the plan of an art gallery a metres wide. [AB] represents a doorway, leading to an exit corridor b metres wide. In order to remove a painting from the art gallery, CD (denoted by L) is measured for various values of α, as represented in the diagram.



(a) If α is the angle between [CD] and the wall, show that $L = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(b) If $a = 5$ and $b = 1$, find the maximum length of a painting that can be removed through this doorway.

Let $a = 3k$ and $b = k$.

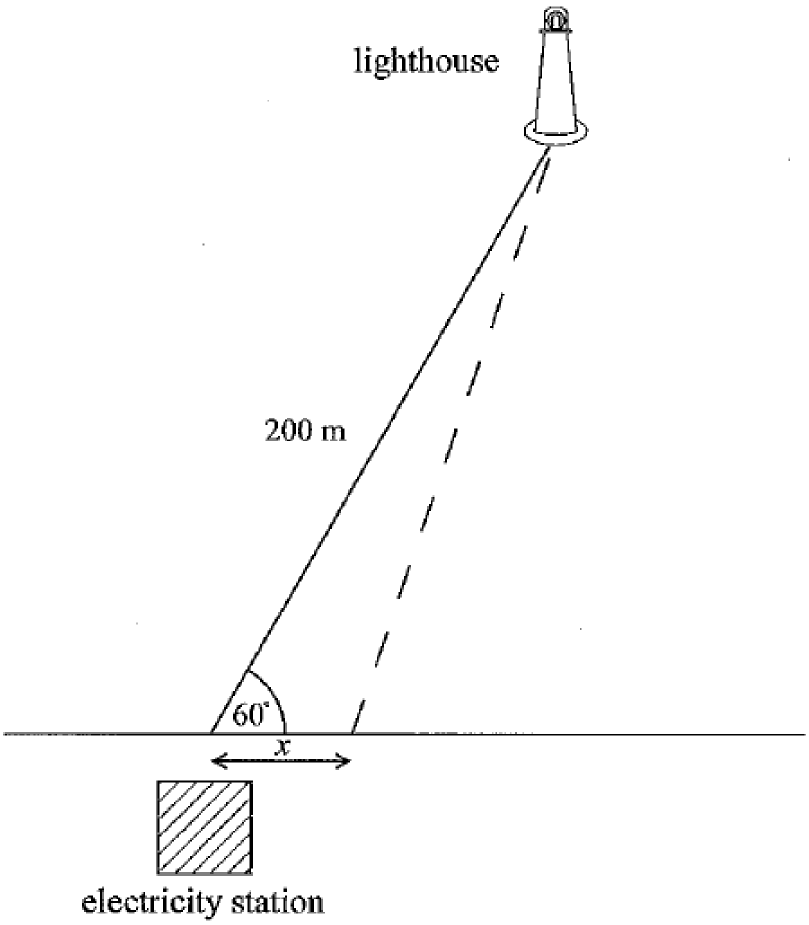
(c) Find $\frac{dL}{d\alpha}$.

(d) Find, in terms of k, the maximum length of a painting that can be removed from the gallery through this doorway.

(e) Find the minimum value of k if a painting 8 metres long is to be removed through this doorway.

M13 TZ1 P2#7

An electricity station is on the edge of a straight coastline. A lighthouse is located in the sea 200 m from the electricity station. The angle between the coastline and the line joining the lighthouse with the electricity station is 60°. A cable needs to be laid connecting the lighthouse to the electricity station. It is decided to lay the cable in a straight line to the coast and then along the coast to the electricity station. The length of cable laid along the coastline is x metres. This information is illustrated in the diagram below.



The cost of laying the cable along the sea bed is US$80 per metre, and the cost of laying it on land is US$20 per metre.

(a) Find, in terms of x, an expression for the cost of laying the cable.

(b) Find the value of x, to the nearest metre, such that this cost is minimized.

M13 TZ1 P2#9

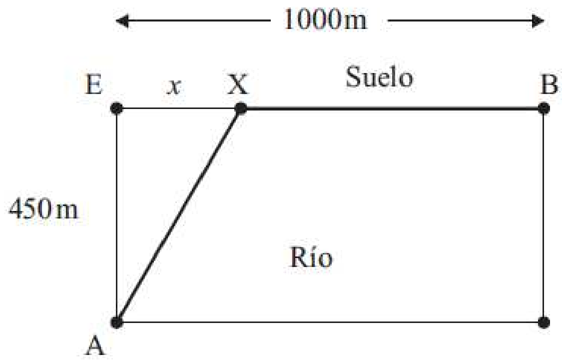
(a) Prove that the equation $3x^2 + 2kx + k - 1 = 0$ has two distinct real roots for all values of $k \in \mathbb{R}$.

(b) Find the value of k for which the two roots of the equation are closest together.

M14 TZ2 P2#12

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea $EX = x$.



Sea k el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total C, en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por $C = 5k\sqrt{202\,500 + x^2} + (1000 - x)k$.

(b) (i) Halle $\frac{dC}{dx}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle para qué valor de x el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo.

(c) Halle el coste total mínimo en función de k.

El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es $A\hat{X}B = \theta$.

(d) Halle θ para el valor de x calculado en el apartado (b).

Por motivos de seguridad, θ tiene que ser como mínimo 120°.

Dado este nuevo requisito,

(e) (i) halle el nuevo valor de x que minimiza el coste total;

(ii) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo.

Nov 14 P2#5

Un tranquilizante se inyecta en un músculo, desde donde pasa al torrente sanguíneo. La concentración C en $mg\,l^{-1}$ de tranquilizante presente en el torrente sanguíneo se puede modelizar mediante la función $C(t) = \frac{2t}{3+t^2}$, $t \geq 0$, donde t es el número de minutos transcurridos desde la inyección.

Halle la concentración máxima de tranquilizante en el torrente sanguíneo.

M15 TZ2 P1#6

En el triángulo ABC, $BC = \sqrt{3}\,\text{cm}$, $A\hat{B}C = \theta$ y $B\hat{C}A = \frac{\pi}{3}$.

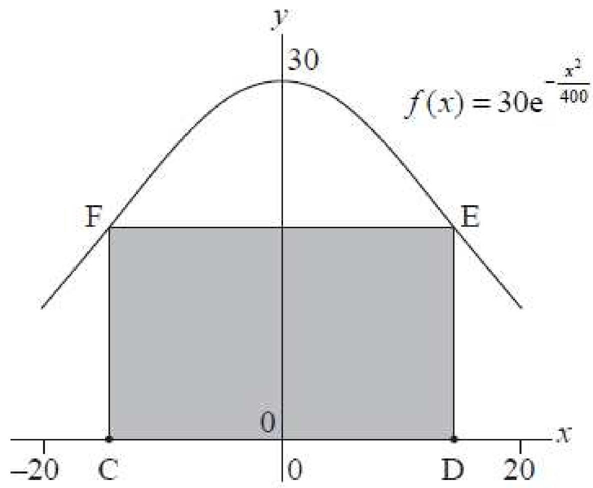
(a) Muestre que la longitud $AB = \dfrac{3}{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$.

(b) Sabiendo que AB alcanza un valor mínimo, determine el valor de θ para el cual sucede esto.

Nov 15 P2#13

The following diagram shows a vertical cross section of a building. The cross section of the roof of the building can be modelled by the curve $f(x) = 30e^{-\frac{x^2}{400}}$, where $-20 \le x \le 20$.

Ground level is represented by the x-axis.



(a) Find $f''(x)$.

(b) Show that the gradient of the roof function is greatest when $x = -\sqrt{200}$.

The cross section of the living space under the roof can be modelled by a rectangle CDEF with points $C(-a, 0)$ and $D(a, 0)$, where $0 < a \le 20$.

(c) Show that the maximum area A of the rectangle CDEF is $600\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) A function I is known as the Insulation Factor of CDEF. The function is defined as $I(a) = \dfrac{P(a)}{A(a)}$ where P = Perimeter and A = Area of the rectangle.

(i) Find an expression for P in terms of a.

(ii) Find the value of a which minimizes I.

(iii) Using the value of a found in part (ii) calculate the percentage of the cross sectional area under the whole roof that is not included in the cross section of the living space.

M14 TZ2 P1#5

Una moneda no equilibrada se lanza al aire cinco veces. En cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es igual a p.

Sea X el número de veces que sale cara.

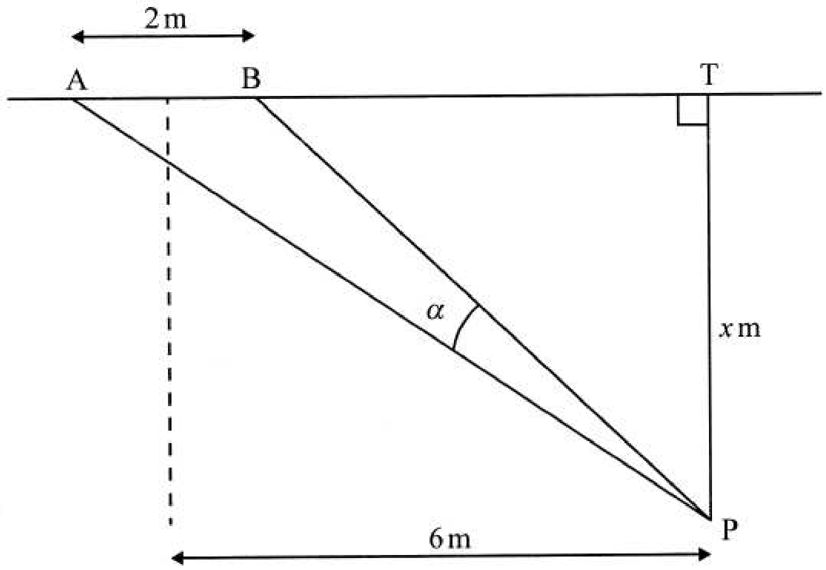
(a) Halle, en función de p, una expresión para $\mathrm{P}(X=4)$.

(b) (i) Determine el valor de p para el cual $\mathrm{P}(X=4)$ alcanza un valor máximo.

(ii) Para este valor de p, determine el número esperado de veces que sale cara.

M16 TZ2 P2#11

Los puntos A, B y T se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería, $[\mathrm{AB}]$, tiene 2 metros de ancho. Un jugador situado en el punto P patea el balón en dirección a la portería. $[\mathrm{PT}]$ es perpendicular a (AB) y se encuentra a 6 metros de una recta paralela que pasa por el centro de $[\mathrm{AB}]$. Sea PT igual a x metros y sea $\alpha = \mathrm{A\hat{P}B}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza sobre el piso.



(a) Halle el valor de α cuando $x=10$.

(b) Muestre que $\tan\alpha = \dfrac{2x}{x^2+35}$.

El valor de α es máximo cuando el valor de $\tan\alpha$ es máximo.

(c) (i) Halle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de α tal que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)=0$.

(iii) Halle $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de α nunca supera los 10°.

(d) Halle el conjunto de valores de x para los cuales $\alpha \geq 7^\circ$.