

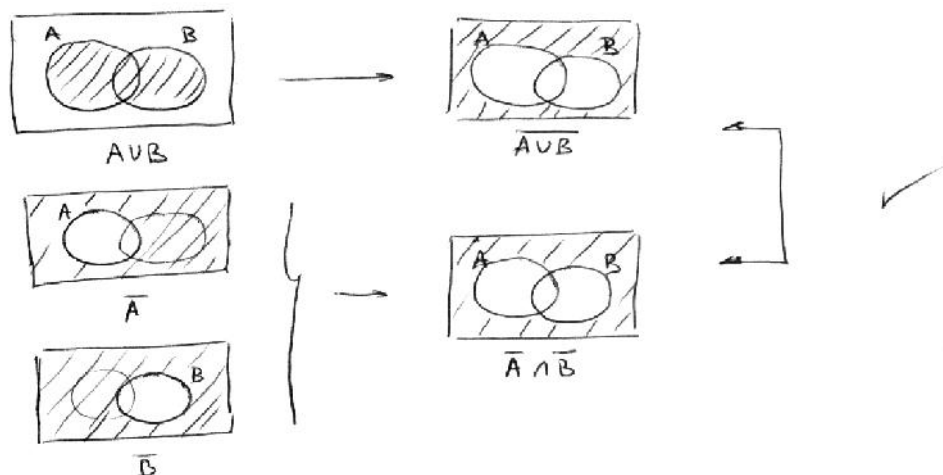
Actividades de Conjuntos, Relaciones y Grupos en exámenes BI - Soluciones

Conjuntos

Nov 03

(a) Compruebe, mediante un diagrama de Venn, que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.(b) Demuestre que $[(A' \cup B) \cap (A \cup B')] = (A \cap B)' \cap (A \cup B)$.

(a)



$$\begin{aligned}
 (b) \quad \overline{(A \cup B) \cap (A \cup B')} &= \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup B'} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B'}) = \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) = \\
 &= E \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) \cap E = (A \cup B) \cap \overline{B \cap A} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Mayo 09
TZ0

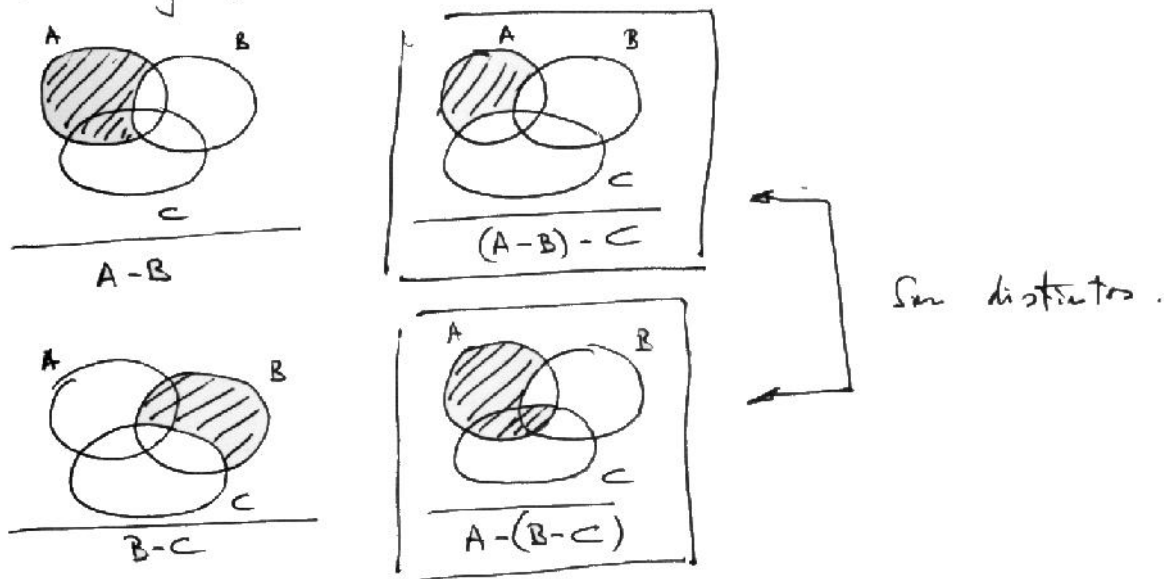
Demuestre que la diferencia de conjuntos no es asociativa.

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

$$\begin{aligned}
 (A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
 A - (B - C) &= A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})
 \end{aligned}$$

No es lo mismo.

• Con diagramas de Venn:



Nov 08

 A, B, C y D son subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

$$A = \{m \mid m \text{ es un número primo menor de } 15\}$$

$$B = \{m \mid m^4 = 8m\}$$

$$C = \{m \mid (m+1)(m-2) < 0\}$$

$$D = \{m \mid m^2 < 2m+4\}$$

- (a) Enumere los elementos pertenecientes a cada uno de estos conjuntos.
- (b) Determine, fundamentando su respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.
- (i) $n(D) = n(B) + n(B \cup C)$
- (ii) $D \setminus B \subset A$
- (iii) $B \cap A' = \emptyset$
- (iv) $n(B \Delta C) = 2$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$B = \{0, 2\}$$

$$C = \{0, 1\}$$

$$D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$m^4 = 8m ; m(m^3 - 8) = 0 ; m = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

$$(m+1)(m-2) < 0$$

...	-2	-1	0	1	2	3	...
			+	-	+		

$$m^2 < 2m+4$$

$$m^2 - 2m - 4 < 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

	$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$	
+		-		+

$$n(D) = 5$$

$$n(B) = 2$$

$$B \cup C = \{0, 1, 2\} \rightarrow n(B \cup C) = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n(D) = n(B) + n(B \cup C) \checkmark \end{array} \right. \quad \boxed{\text{CIERTA}}$$

$$D \setminus B = \{-1, 0, 1, 2, 3\} - \{0, 2\} = \{-1, 1, 2\}$$

$$\{-1, 1, 2\} \not\subset \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \quad \boxed{\text{FALSA}}$$

$$B \cap A' = B - A = \{0, 2\} - \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{0\} \neq \emptyset \quad \boxed{\text{FALSA}}$$

$$B \Delta C = (B - C) \cup (C - B)$$

$$B - C = \{0, 2\} - \{0, 1\} = \{2\}$$

$$C - B = \{0, 1\} - \{0, 2\} = \{1\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B - C = \{2\} \\ C - B = \{1\} \end{array} \right\} \Rightarrow B \Delta C = \{1, 2\} ; n(B \Delta C) = 2 \checkmark \quad \boxed{\text{CIERTA}}$$

Mayo 12 Los elementos de los conjuntos P y Q se toman del conjunto universal $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $P = \{1, 2, 3\}$ y $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

- (a) Sabiendo que $R = (P \cap Q)'$, enumere los elementos de R .
- (b) Para un conjunto S , sea S^* el conjunto de todos los subconjuntos de S ,
- (i) halle P^* ;
- (ii) halle $n(R^*)$.

$$a) P \cap Q = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3\}$$

$$R = \overline{P \cap Q} = \overline{\{1, 3\}} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\text{También: } R = \overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \checkmark$$

$$b) P = \{1, 2, 3\} \rightarrow P^* = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$n(R^*) = 2^{n(R)} = 2^8 = 256$$

Relaciones de Equivalencia

Mayo 01 Consider the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$. Let R be the relation defined by the following:

for (a, b) and (c, d) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $(a, b) R (c, d)$ if and only if $ad = bc$, where ab is the product of the two numbers a and b .

- (a) Prove that R is an equivalence relation on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$.
- (b) Show how R partitions $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ and describe the equivalence classes.

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \quad (a, c \in \mathbb{Z} ; b, d \in \mathbb{Z}^+)$$

Reflexiva

$$ab = ba \Rightarrow (a, b) R (a, b) \checkmark$$

Simétrica

$$(a, b) R (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) R (a, b) \checkmark$$

Transitiva

$$\begin{array}{l} (a, b) R (c, d) \\ (c, d) R (e, f) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} ad = bc \\ cf = de \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a \cancel{d} \cancel{f} = b \cancel{c} \cancel{d} e \\ \uparrow \\ adf = bce \end{array} \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) R (e, f)$$

dy c se pueden simplificar ya que, al pertenecer a $\mathbb{Z}^+$, no son nulos.

Por lo tanto R es una relación de equivalencia.

R es la equivalencia de fracciones: $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Las clases de equivalencia son las fracciones equivalentes de dos números enteros.

Nov 02

Sea Y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.Defina la relación R sobre Y como $aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{5}$, donde $a, b \in Y$.

- (a) Muestre que R es una relación de equivalencia.
- (b) (i) ¿Qué significa "la clase de equivalencia que contiene a "?

(ii) Escriba todas las clases de equivalencia.

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

a) Reflexiva: $a^2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow aRa$ ✓

Simétrica: $aRb \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow bRa$ ✓

Transitiva: $\begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 0 \\ b^2 - c^2 = 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Sumando}} \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 0 \\ b^2 - c^2 = 0 \\ \hline a^2 - c^2 = 0 \end{array} \Rightarrow a^2 - c^2 = 0 \Rightarrow aRc$ ✓

Luego, R es una relación de equivalencia.

- b) i) La clase que contiene ' a ' está formada por todos los elementos de Y que, en módulo 5, tengan un cuadrado igual que el de ' a '.

ii) $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 1$; $5^2 = 0$; $6^2 = 1$
 $7^2 = 4$; $8^2 = 4$; $9^2 = 1$; $10^2 = 0$

Tendremos tres clases: $\{5, 10\}$
 $\{1, 4, 6, 9\}$
 $\{2, 3, 7, 8\}$

Nov 04

La relación R sobre $\mathbb{C}$ está definida como sigue

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ para } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- (a) Compruebe que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{C}$.
- (b) Describa las clases de equivalencia determinadas por la relación R .

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

Reflexiva

$$|z| = |z| \Rightarrow z R z \quad \checkmark$$

Simétrica

$$z_1 R z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow |z_2| = |z_1| \Rightarrow z_2 R z_1 \quad \checkmark$$

Transitiva

$$\begin{array}{l} z_1 R z_2 \\ z_2 R z_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |z_1| = |z_2| \\ |z_2| = |z_3| \end{array} \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Rightarrow z_1 R z_3 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

Como el módulo de un n^o complejo es la distancia del punto al origen en un diagrama de Argand, estarán relacionados los n^o complejos perteneciente a una misma circunferencia con centro en el origen.

La clase del $0+0i$ sólo incluye a este punto.



Mayo 05 Sea $S = \{\text{enteros mayores que } 1\}$. Se define sobre S la relación R como

$$m R n \Leftrightarrow \text{mcd}(m, n) > 1, \text{ para } m, n \in S.$$

- (a) Muestre que R es reflexiva.
 (b) Muestre que R es simétrica.
 (c) Muestre, mediante un contraejemplo, que R no es transitiva.

$$S = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$m R n \Leftrightarrow \text{mcd}(m, n) > 1$$

a) Reflexiva: $\text{mcd}(m, m) = m > 1 \Rightarrow m R m \checkmark$
 ya fue 1 $\notin S$

b) Simétrica: $m R n \Rightarrow \text{mcd}(m, n) > 1 \Rightarrow \text{mcd}(n, m) > 1 \Rightarrow n R m \checkmark$

c) Transitiva

Por ejemplo $2 R 6$ (ya fue $\text{mcd}(2, 6) = 2$) pero $2 \not R 3$ (ya fue $\text{mcd}(2, 3) = 1$)
 $6 R 3$ (ya fue $\text{mcd}(6, 3) = 3$)

Mayo 09

Se define la relación R en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de manera tal que $(a, b) R (c, d)$ si y solo si $a - c$ es divisible por 3 y $b - d$ es divisible por 2.

- (a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
 (b) Halle la clase de equivalencia para $(2, 1)$.
 (c) Escriba las otras cinco clases de equivalencia.

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 3 \\ b - d = 2 \end{cases}$$

a) Reflexiva: $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ $b - b = 0 = 2 \cdot 0 \Rightarrow (a, b) R (a, b) \checkmark$

Simétrica: $(a, b) R (c, d) \Rightarrow \begin{cases} a - c = 3 \\ b - d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - a = -(a - c) = -3 \\ d - b = -(b - d) = -2 \end{cases} \Rightarrow (c, d) R (a, b) \checkmark$

Transitiva: $(a, b) R (c, d) \wedge (c, d) R (e, f) \Rightarrow \begin{cases} a - c = 3 \\ b - d = 2 \\ c - e = 3 \\ d - f = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - e = (a - c) + (c - e) = 3 + 3 = 6 \\ b - f = (b - d) + (d - f) = 2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (a, b) R (e, f) \checkmark$

b) $(a, b) R (2, 1) \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 3 \\ b - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 2 \\ b = 2 + 1 \end{cases} \begin{matrix} (a \text{ es múltiplo de } 3 \text{ más } 2) \\ (b \text{ es impar}) \end{matrix}$

c) $C_1 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}\}$ A esta clase pertenece $(0, 0)$

$C_2 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 \\ b \neq 2 \end{cases}\}$ $(0, 1)$

$C_3 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 + 1 \\ b = 2 \end{cases}\}$ $(1, 0)$

$C_4 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 + 1 \\ b \neq 2 \end{cases}\}$ $(1, 1)$

$C_5 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 + 2 \\ b = 2 \end{cases}\}$ $(2, 0)$

$C_6 = \{(a, b) \mid \begin{cases} a = 3 + 2 \\ b \neq 2 \end{cases}\}$ $(2, 1)$

Nov 06

Considere las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4 , representadas por las siguientes tablas

	a	b	c
a		1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

R_1

	A	B	C
A	1		1
B	1	1	
C	1		1

R_2

	d	e	f	g
d	1		1	1
e		1	1	
f	1	1	1	1
g	1		1	1

R_3

	D	E	F	G
D	1		1	
E		1		1
F	1		1	
G		1		1

R_4

(Tenga en cuenta que un "1" en la tabla significa que el elemento de esa fila está relacionado con el elemento de esa columna, p. ej. en R_2 , B está relacionado con A, pero A no está relacionado con B.)

- (a) Para cada una de las relaciones, determine si se trata o no de una relación de equivalencia. En cada caso, justifique su respuesta.
- (b) Para aquellos casos en los que se trate de una relación de equivalencia, describa las correspondientes clases de equivalencia.

R_1 no es relación de equivalencia ya que $a \not R_1 a$ (No cumple la reflexiva)

R_2 " " " " " " $B R_2 A$ (No cumple la simétrica)

R_3 " " " " " " $a R_3 f$ (No cumple la Transitiva)

R_4 sí es relación de equivalencia, las clases son: $\{D, F\}$
 $\{E, G\}$

Nov 09

Las relaciones R y S se definen sobre polinomios cuadráticos P que son de la forma

$$P(z) = z^2 + az + b, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

- (a) La relación R viene dada por $P_1 R P_2$ si y solo si la suma de los dos ceros de P_1 es igual a la suma de los dos ceros de P_2 .
- (i) Compruebe que R es una relación de equivalencia.
- (ii) Determine la clase de equivalencia a la que pertenece $z^2 - 4z + 5$.
- (b) La relación S viene dada por $P_1 S P_2$ si y solo si P_1 y P_2 tienen al menos un cero en común. Determine si S es o no transitiva.

a) Reflexiva

Es obvia, ya que la suma de los dos ceros de un polinomio coincide consigo mismo.

Simétrica

Es obvia, ya que si la suma de los dos raíces de un polinomio P_1 coincide con la suma de las de P_2 , coincide del revés.

Transitiva

Es obvia, ya que si la suma de los dos raíces de P_1 coincide con la suma de las de P_2 , y esta suma coincide con la suma de las de P_3 serán tres sumas iguales.

$$z^2 - 4z + 5 = 0; \quad z = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases} \rightarrow \text{Suma de raíces} = 4$$

Cualquier otro polinomio equivalente tendrá de raíces: r y $4-r$:

$$(z-r)(z-(4-r)) = z^2 - (4-r)z - rz + r(4-r) = z^2 - 4z + (4r-r^2)$$

$$C = \{ z^2 - 4z + (4r-r^2) \mid r \in \mathbb{R} \}$$

b) No es transitiva.

Por ejemplo $z^2 + 2z$ es equivalente a $z^2 - z$ por tener en común la raíz $z=0$. $z^2 - z$ es equivalente a $z^2 - 1$ por tener en común la raíz $z=1$.

Pero $z^2 + 2z$ y $z^2 - 1$ no tienen ninguna raíz en común.

Aplicaciones

Muestra
06/08Consider the functions f and g , defined by

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ where } f(n) = 5n + 4,$$

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ where } g(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y)$$

(i) Explain whether the function f is

(a) injective;

(b) surjective.

(ii) Explain whether the function g is

(a) injective;

(b) surjective.

(iii) Find the inverse of g .

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) = 5n + 4$$

$$\bullet f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow 5m_1 + 4 = 5m_2 + 4 ; 5m_1 = 5m_2 ; m_1 = m_2 \Rightarrow \boxed{f \text{ es injective}}$$

$$\bullet \text{ Sea } z \in \mathbb{Z} : z = 5m + 4 ; m = \frac{z-4}{5} \Rightarrow \text{'m' debe ser un n.º entero, sólo los } z = 5 + 4 \text{ tendrían origen. los restantes } z \text{ no.}$$

$$\boxed{f \text{ no es sobreyectiva}}$$

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y)$$

$$\bullet g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 + 2y_1, 3x_1 - 5y_1) = (x_2 + 2y_2, 3x_2 - 5y_2) ; \begin{cases} x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 \\ 3x_1 - 5y_1 = 3x_2 - 5y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 2(y_2 - y_1) \\ 3x_1 - 3x_2 = 5(y_1 - y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2(y_2 - y_1) \\ 3x_1 - 3x_2 = 5(y_1 - y_2) \end{cases} ; \begin{cases} 3(x_1 - x_2) = 6(y_2 - y_1) \\ -3(x_1 - x_2) = -5(y_2 - y_1) \end{cases}$$

$$0 = 11(y_2 - y_1) \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1} \rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \Rightarrow \boxed{g \text{ es injective}}$$

$$\bullet \text{ Sea } (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$(u, v) = (x + 2y, 3x - 5y) ;$$

$$\begin{cases} x + 2y = u \\ 3x - 5y = v \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 5x + 10y = 5u \\ 6x - 10y = 2v \end{cases}$$

$$11x = 5u + 2v$$

$$x = \frac{5u + 2v}{11} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3u \\ -3x + 5y = -v \end{cases}$$

$$11y = 3u - v$$

$$y = \frac{3u - v}{11} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por lo tanto, } \boxed{g \text{ es sobreyectiva}}$$

$$y^o \text{ f.ue } f\left(\frac{5u+2v}{11}, \frac{3u-v}{11}\right) = (u, v).$$

En consecuencia, $\boxed{g \text{ es biyectiva}}$, tendrá inversa.

$$f\left(\frac{5u+2v}{11}, \frac{3u-v}{11}\right) = (u, v) \rightarrow \boxed{f^{-1}(u, v) = \left(\frac{5u+2v}{11}, \frac{3u-v}{11}\right)} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Mayo 06

La función f es definida por

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = e^{\sin x} - 1.$$

- (a) Halle el recorrido exacto, A , de f .
- (b) (i) Explique por qué f no es inyectiva.
- (ii) Dando una razón para su respuesta, indique si f es sobreyectiva o no.
- (c) La función g se define como $g: [-k, k] \rightarrow A$, donde $g(x) = e^{\sin x} - 1$ y $k > 0$.
- (i) Halle el valor máximo de k para el cual g es inyectiva.

Para ese valor de k ,(ii) halle una expresión para $g^{-1}(x)$;(iii) escriba el dominio de g^{-1} .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^{\sin x} - 1$$

$$a) \text{ Recorrido} = [e^{-1} - 1, e^{+1} - 1] = \left[\frac{1}{e} - 1, e - 1\right]$$

$$b) \text{ Por ejemplo } f(0) = e^{\sin 0} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

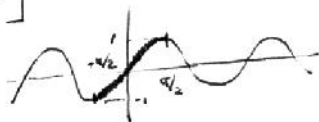
$$f(2\pi) = e^{\sin 2\pi} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Al ser periódica $\sin x$, $f(x)$ toma el mismo valor para infinitos valores de $x \Rightarrow$ no es inyectiva

Al ser el recorrido $\left[\frac{1}{e} - 1, e - 1\right]$, no existen originales que todos los valores de $\mathbb{R}$ no perteneciente a dicho intervalo.

$$c) \quad g: [-k, k] \rightarrow A = \left[\frac{1}{e} - 1, e - 1\right]$$

$$g(x) = e^{\sin x} - 1$$



$\sin x$ es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$ tomando todos los valores posibles del seno, entre -1 y 1 , luego $\boxed{k = +\pi/2}$

$$y = e^{\sin x} - 1$$

$$x = e^{\sin x} - 1$$

$$x+1 = e^{\sin x}$$

$$\ln(x+1) = \sin x$$

$$\boxed{y = \arcsin \ln(x+1)}$$

$$g^{-1}(x) = \arcsin \ln(x+1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dominio} = \left[\frac{1}{e} - 1, e - 1\right] \\ \text{recorrido} = \left[-\pi/2, \pi/2\right] \end{array} \right.$$

Nov 06

Considere las siguientes funciones.

$$f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ donde } g(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)$$

$$h: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ donde } h(x, y) = (x + y, xy)$$

- (a) Explique por qué f no es sobreyectiva.
- (b) Explique por qué existe la inversa de g , y halle g^{-1} .
- (c) Determine, aportando argumentos, si h es
- inyectiva;
 - sobreyectiva.



$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

No es sobreyectiva, porque los puntos tienen todos ordenados superiores a 2. Es decir, que el recorrido es $[2, +\infty)$ no es $\mathbb{R}^+$.

b) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)$$

$$g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_1 = 3x_2 + 2y_2 \\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_1 = 3x_2 + 2y_2 \\ -4x_1 - 2y_1 = -4x_2 - 2y_2 \\ -x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

g es inyectiva

$$(a, b) = g(x, y) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = a \\ -4x - 2y = -2b \end{cases}$$

$$x = 2b - a$$

$$y = b - 2x = b - 4b + 2a = 2a - 3b$$

g es sobreyectiva

$$g^{-1}(x, y) = (2x - y, 2x - 3y)$$

c) $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{x_2 y_2}{x_1} \Rightarrow x_1 + \frac{x_2 y_2}{x_1} = x_2 + y_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2 y_1 = x_1 x_2 + x_1 y_2 \Rightarrow x_1^2 - x_1 x_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \Rightarrow x_1(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_2 = x_1 \Rightarrow y_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1} = x_2$$

Vemos que h no es inyectiva, ya que $h(x, y) = h(y, x)$ (por ejemplo: $h(1, 2) = (3, 2)$, $h(2, 1) = (3, 2)$)

$$(a, b) = h(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \Rightarrow y = \frac{b}{x} \Rightarrow x + \frac{b}{x} = a \Rightarrow x^2 + b = ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Si $a^2 - 4b < 0$, no existirá origen para (a, b)

Luego h no es exhaustiva

Mayo 07
TZ2

Compruebe que la aplicación $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida a continuación, es sobreyectiva pero no es inyectiva.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x+5}{2}, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x+5}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\text{Sea } m \in \mathbb{N} \mid f(x) = m \rightarrow \begin{aligned} \frac{x+2}{2} = m & \quad (\text{si } x \text{ es par}) \rightarrow \boxed{x = 2m-2} \\ \frac{x+5}{2} = m & \quad (\text{si } x \text{ es impar}) \rightarrow \boxed{x = 2m-5} \end{aligned}$$

Vemos que para el n° entero par $2m-2$: $f(2m-2) = \frac{2m-2+2}{2} = m$ ✓

y que para el n° entero impar $2m-5$: $f(2m-5) = \frac{2m-5+5}{2} = m$ ✓

Luego f es sobreyectiva pero no inyectiva.

Nov 10

P es el conjunto de todos los polinomios tales, que $P = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Sea $g: P \rightarrow P$, $g(p) = xp$. Determine si g es

(i) sobreyectiva;

(ii) inyectiva.

$$(\text{como ejemplo: } g(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) = 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x)$$

Sea el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, si $a_0 \neq 0$ no coincide con ningún xp , ya que esta operación da siempre un polinomio con término independiente nulo. Por lo tanto g no es exhaustiva.

$$g(p_1) = g(p_2) \Rightarrow xp_1 = xp_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \quad g \text{ sí es inyectiva. } \checkmark$$

Nov 08

Tres funciones, que aplican $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ están definidas de la siguiente manera

$$f_1(m, n) = m - n + 4; \quad f_2(m, n) = |m|; \quad f_3(m, n) = m^2 - n^2.$$

Dos funciones, que aplican $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ están definidas de la siguiente manera

$$g_1(k) = (2k, k); \quad g_2(k) = (k, |k|).$$

(a) Halle el recorrido de

(i) $f_1 \circ g_1$;

(ii) $f_3 \circ g_2$.

(b) Halle todas las soluciones de $f_1 \circ g_2(k) = f_2 \circ g_1(k)$.(c) Halle todas las soluciones de $f_3(m, n) = p$ en el caso $p = 1$ y en el caso $p = 2$.

a) $(f_1 \circ g_1)(k) = f_1(g_1(k)) = f_1(2k, k) = 2k - k + 4 = k + 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$k + 4$ sobre todo $\mathbb{Z}$, por lo que $\boxed{\text{Recorrido}(f_1 \circ g_1) = \mathbb{Z}}$

$(f_3 \circ g_2)(k) = f_3(g_2(k)) = f_3(k, |k|) = k^2 - |k|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Recorrido}(f_3 \circ g_2) = \{0\}}$

b) $(f_1 \circ g_2)(k) = f_1(g_2(k)) = f_1(k, |k|) = k - |k| + 4$

$(f_2 \circ g_1)(k) = f_2(g_1(k)) = f_2(2k, k) = |2k|$

$(f_1 \circ g_2)(k) = (f_2 \circ g_1)(k) \Rightarrow k - |k| + 4 = |2k|$

$$\begin{array}{l} k + 4 = 3|k| \\ \begin{array}{l} k \geq 0 \\ k < 0 \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} k + 4 = 3k \\ -2k = -4 \\ \boxed{k = 2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k + 4 = -3k \\ 4k = -4 \\ \boxed{k = -1} \end{array} \right.$$

c) $f_3(m, n) = 1 \Rightarrow m^2 - n^2 = 1; \quad (m+n)(m-n) = 1$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} m+n=1 \\ m-n=1 \\ 2m=2 \\ \boxed{m=1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m+n=-1 \\ m-n=-1 \\ 2m=-2 \\ \boxed{m=-1} \end{array} \right\} \end{array}$$

$f_3(m, n) = 2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 2; \quad (m+n)(m-n) = 2$

Hay cuatro casos:

$\begin{array}{l} m+n=2 \\ m-n=1 \end{array} \Rightarrow m = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{2} \text{ porque } \notin \mathbb{Z}$

$\begin{array}{l} m+n=-2 \\ m-n=-1 \end{array} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}, n = -\frac{1}{2} \text{ porque } \notin \mathbb{Z}$

$\begin{array}{l} m+n=1 \\ m-n=2 \end{array} \Rightarrow m = \frac{3}{2}, n = -\frac{1}{2} \text{ porque } \notin \mathbb{Z}$

$\begin{array}{l} m+n=-1 \\ m-n=2 \end{array} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}, n = \frac{1}{2} \text{ porque } \notin \mathbb{Z}$

Por lo tanto $f_3(m, n) = 2$ no tiene soluciones.

Nov 03 Determine, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son biyectivas.

$$p(x) = x^2 + 1, q(x) = x^3, r(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$p(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva, por ejemplo $p(1) = p(-1)$.

$q(x) = x^3$ sí es biyectiva. Demostración

$$q(x_1) = q(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \boxed{\text{Inyectiva}}$$

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x = \sqrt[3]{y} \mid q(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y \quad \boxed{\text{Exhaustiva}}$$

$r(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ no es inyectiva, por ejemplo $r(1) = r(-1)$.

Nov 11 Considere las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$.

- Compruebe que si f y g son ambas inyectivas, entonces $g \circ f$ también es inyectiva.
- Compruebe que si f y g son ambas sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también es sobreyectiva.
- Compruebe, utilizando un único contraejemplo, que las dos recíprocas de las proposiciones de los apartados (a) y (b) son falsas.

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ g &: B \rightarrow C \end{aligned}$$

$$a) \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

(*) Por ser g inyectiva

(**) " " f " "

$$b) \quad \text{Sea } c \in C \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists b \in B \mid g(b) = c \quad \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \exists a \in A \mid f(a) = b \end{array} \right. \Rightarrow \exists a \in A \mid g(f(a)) = c \quad \checkmark$$

(*) por ser g sobreyectiva

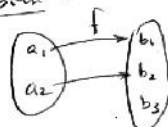
(**) " " f " "

$$c) \quad \begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} & f(x) &= \sqrt{x} \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ & g(x) &= x^2 \end{aligned}$$

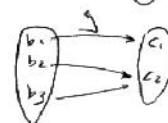
$$g \circ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$g \circ f$ es biyectiva. Sin embargo f no es sobreyectiva y g no es inyectiva.

También:



Obviamente, f no es sobreyectiva.



Obviamente, g no es inyectiva.

Sin embargo: $g \circ f$ es biyectiva.

Operaciones Binarias

Mayo 04
(512)La operación binaria $*$ está definida para $x, y \in \mathbb{R}$ por

$$x * y = xy - x - y + 2.$$

(a) Halle el elemento neutro de $*$.(b) Halle el simétrico de 3 para $*$.

(c) (i) Compruebe que

$$(x * y) * z = xyz - yz - zx - xy + x + y + z.$$

(ii) Determine si $*$ es asociativa o no.

$$x * y = xy - x - y + 2$$

$$a) \quad x * m = x \rightarrow xm - x - m + 2 = x; \quad xm - 2x = m - 2; \quad x(m-2) = m-2 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

Comprobación:

$$x * 2 = 2x - x - 2 + 2 = x \quad \checkmark$$

$$2 * x = 2x - 2 - x + 2 = x \quad \checkmark$$

$$b) \quad x * \bar{x} = 2 \rightarrow x \cdot \bar{x} - x - \bar{x} + 2 = 2; \quad x \bar{x} - \bar{x} = x; \quad \bar{x}(x-1) = x \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{Por ejemplo: } \bar{3} = \frac{3}{3-1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Comprobación:

$$3 * \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 3 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{9-6-3+4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{2} * 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3 + 2 = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark$$

Vemos entonces que 1 no tiene simétrico.

$$\begin{aligned} c) \quad (x * y) * z &= (xy - x - y + 2) * z = (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 = \\ &= xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - z - z + 2 = \boxed{xyz - xz - yz - xy + x + y + z} \\ x * (y * z) &= x * (yz - y - z + 2) = x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 = \\ &= xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2 = \boxed{xyz - xy - xz - yz + x + y + z} \end{aligned}$$

$$\boxed{* \text{ es asociativa}}$$

Muestra
06/08

The binary operation $a * b$ is defined by $a * b = \frac{ab}{a+b}$, where $a, b \in \mathbb{Z}^+$

- (a) Prove that $*$ is associative.
(b) Show that this binary operation does not have an identity element.

$$\begin{aligned} a) \quad (a * b) * c &= \left(\frac{ab}{a+b} \right) * c = \frac{\frac{ab}{a+b} \cdot c}{\frac{ab}{a+b} + c} = \frac{\frac{abc}{a+b}}{\frac{ab+ac+bc}{a+b}} = \frac{abc}{ab+ac+bc} \\ a * (b * c) &= a * \left(\frac{bc}{b+c} \right) = \frac{a \cdot \frac{bc}{b+c}}{a + \frac{bc}{b+c}} = \frac{\frac{abc}{b+c}}{\frac{ab+ac+bc}{b+c}} = \frac{abc}{ab+ac+bc} \end{aligned}$$

$$b) \quad a * e = e * a = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}^+$$

$$\frac{ae}{a+e} = a \quad ; \quad \cancel{ae} = a^2 + \cancel{ae} \quad ; \quad a^2 = 1 \quad ; \quad \boxed{a=1}$$

Solo se cumpliría para $a=1$, no existe el elemento neutro.

Nov 08

Una operación binaria se define sobre $\{-1, 0, 1\}$ de la siguiente manera

$$A \odot B = \begin{cases} -1, & \text{si } |A| < |B| \\ 0, & \text{si } |A| = |B| \\ 1, & \text{si } |A| > |B|. \end{cases}$$

- (a) Construya la tabla de Cayley para esta operación.
(b) Fundamentando su respuesta, determine si la operación es
- cerrada;
 - conmutativa;
 - asociativa.

		B		
		-1	0	1
A	-1	0	1	0
	0	-1	0	-1
	1	0	1	0

- Vemos que $\odot$ es cerrada, ya que los resultados pertenecen a $\{-1, 0, 1\}$
- Vemos que no es conmutativa, ya que la tabla no es simétrica.
- $[0 \odot 1] \odot 0 = (-1) \odot 0 = 1$
 $0 \odot [1 \odot 0] = 0 \odot 1 = -1$ $\rightarrow$ No es asociativa.

Nov 09

La operación binaria $*$ se define en el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3\}$ de la siguiente forma

$$a * b = a + 2b + ab \pmod{4}.$$

- (a) (i) Construya la tabla de Cayley.
 (ii) Escriba, dando una razón, si esta tabla es o no un cuadrado latino.
 (b) (i) Escriba, dando una razón, si $*$ es o no conmutativa.
 (ii) Determine si $*$ es o no asociativa, justificando su respuesta.
 (c) Halle todas las soluciones de la ecuación $x * 1 = 2 * x$, para $x \in S$.

a)

$0 * 0 = 0$	$1 * 0 = 1$	$2 * 0 = 2$	$3 * 0 = 3$	$\begin{array}{c cccc} * & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}$	No es cuadrado latino porque se repiten resultados en algunas filas/columnas.
$0 * 1 = 2$	$1 * 1 = 0$	$2 * 1 = 2$	$3 * 1 = 0$		
$0 * 2 = 0$	$1 * 2 = 3$	$2 * 2 = 2$	$3 * 2 = 1$		
$0 * 3 = 2$	$1 * 3 = 2$	$2 * 3 = 2$	$3 * 3 = 2$		

b) No es conmutativa porque la tabla no es simétrica. (Por ejemplo $0 * 1 \neq 1 * 0$)
 No es asociativa. Por ejemplo: $3 * (0 * 1) = 3 * 2 = 1$
 $(3 * 0) * 1 = 3 * 1 = 0$ que son resultados distintos

c)

$0 * 1 = 2$	$1 * 1 = 0$	$2 * 1 = 2$	$3 * 1 = 0$	$\boxed{\text{Soluciones: } x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}}$
$2 * 0 = 2$ ✓	$2 * 1 = 2$	$2 * 2 = 2$ ✓	$2 * 3 = 2$	

Grupos

Nov 00

$$\text{Let } S = \left\{ x \mid x = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 \neq 0 \right\}$$

(a) Prove that S is a group under multiplication, $\times$, of numbers.

(b) For $x = a + b\sqrt{2}$, define $f(x) = a - b\sqrt{2}$. Prove that f is an isomorphism from $(S, \times)$ onto $(S, \times)$.

$$S = \{ x \mid x = a + b\sqrt{2} ; a, b \in \mathbb{Q} , a^2 - 2b^2 \neq 0 \}$$

(a) • Operación cerrada: $(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} + 2b_1b_2 =$
 $= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} \in S$

porque $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$ ✓
 $\Rightarrow a_1b_2 + b_1a_2 \in \mathbb{Q}$

y porque $(a_1a_2 + 2b_1b_2)^2 - 2(a_1b_2 + b_1a_2)^2 =$
 $= a_1^2a_2^2 + 4a_1a_2b_1b_2 + 4b_1^2b_2^2 - 4a_1a_2b_1b_2 - 2a_1^2b_2^2 - 2b_1^2a_2^2 =$
 $= (a_1^2 - 2b_1^2) \cdot (a_2^2 - 2b_2^2) \neq 0$ ✓
 $\neq 0 \quad \neq 0$

• Elemento Neutro: con $a=1 \in \mathbb{Q} \mid 1 + \sqrt{2} \cdot 0 = 1 \in S$
 $b=0 \in \mathbb{Q}$

• Elemento Simétrico: $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in S$

porque $a, b \in \mathbb{Q} \mid \Rightarrow \frac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$ ✓
 $a^2-2b^2 \neq 0 \mid \Rightarrow \frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$

y porque $\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)^2 - 2\left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right)^2 = \frac{a^2-2b^2}{(a^2-2b^2)^2} = \frac{1}{a^2-2b^2} \neq 0$ ✓

• Propiedad Asociativa: Se cumple en el producto de $\mathbb{R}^2$ reales.

(b) $f(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$

Dados $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$, $f(x_1 \cdot x_2) = f[(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})] = f[(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2}] =$
 $= (a_1a_2 + 2b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2}$ ✓
 $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot f(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 - b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 - b_2\sqrt{2}) =$
 $= a_1a_2 - a_1b_2\sqrt{2} - b_1a_2\sqrt{2} + b_1b_2 \cdot 2 =$
 $= (a_1a_2 + 2b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2}$ ✓

Nov 02

Sea $(S, \circ)$ el grupo de todas las permutaciones de cuatro elementos a, b, c, d . La permutación que aplica a en c , b en d , c en a y d en b se representa por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$.

El elemento identidad se representa por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

Observe que AB denota la permutación obtenida cuando la permutación B es seguida por la permutación A .

(a) Halle la inversa de la permutación $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$.

(b) Halle un subgrupo de S de orden 2.

(c) Halle un subgrupo de S de orden 4, mostrando que es un subgrupo de S .

$(S, \circ)$ S estaría formado por $4! = 24$ elementos.

a)
$$p = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$$

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$

b) Hay muchos, por ejemplo el formado por $e = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ que es el elemento neutro y $p = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}$ que es simétrico de sí mismo.

c) Partiendo de $p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$:

$$p_1^2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} = p_2$$

$$p_1^3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = p_3$$

$$p_1^4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = e$$

Tendremos $\{e, p_1, p_2, p_3\}$ que es un subgrupo, como

demostraremos ahora:

	e	p_1	p_2	p_3
e	e	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_2	p_3	e
p_2	p_2	p_3	e	p_1
p_3	p_3	e	p_1	p_2

- La operación está cerrada ✓
- Tiene el elemento neutro (e)
- Cada elemento tiene simétrico:

$$\begin{aligned} e^{-1} &= e \\ p_1^{-1} &= p_3 \\ p_2^{-1} &= p_2 \\ p_3^{-1} &= p_1 \end{aligned}$$

- Cumple la asociatividad, ya que es cíclico (generado por p_1)

Por lo tanto $\{e, p_1, p_2, p_3\}$ es subgrupo de S .

Mayo 04 (512) Considere el conjunto $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ con la operación $\otimes$, multiplicación módulo 16.

(a) Calcule

(i) $3 \otimes 5$;

(ii) $3 \otimes 7$;

(iii) $9 \otimes 11$.

(b) (i) Copie y complete la tabla de la operación $\otimes$ en S .

$\otimes$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9				1	7	13
5	5			3	13	7	1	11
7	7		3		15	13	11	9
9	9		13	15	1		5	7
11	11	1	7	13			15	5
13	13	7	1	11	5	15	9	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1

(ii) Considerando que $\otimes$ es asociativa, compruebe que $(S, \otimes)$ es un grupo.

(c) Halle todos los elementos de orden

(i) 2;

(ii) 4.

(d) Halle un subgrupo cíclico de orden 4.

a) $3 \times 5 = 15$
 $3 \times 7 = 5$
 $9 \times 11 = 3$

b)

	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9	15	5	11	1	7	13
5	5	15	9	3	13	7	1	11
7	7	5	3	1	15	13	11	9
9	9	11	13	15	1	3	5	7
11	11	1	7	13	3	9	15	5
13	13	7	1	11	5	15	9	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1

- Operación cerrada
- 1 es el elemento neutro.
- 1, 7, 9, 15 son simétricos de sí mismos
- 3 y 11 son simétricos
- 5 y 13 " "

Luego $(S, \otimes)$ es un grupo.

c) 7, 9 y 15 son los elementos de orden 2.

$3^2 = 9$, $3^3 = 11$, $3^4 = 1 \Rightarrow 3$ tiene orden 4

$5^2 = 9$; $5^3 = 13$; $5^4 = 1 \Rightarrow 5$ " " "

$11^2 = 9$; $11^3 = 3$; $11^4 = 1 \Rightarrow 11$ " " "

$13^2 = 9$; $13^3 = 5$; $13^4 = 1 \Rightarrow 13$ " " "

$\{1, 3, 9, 11\}$ es un subgrupo de orden 4 generado por 3 (o por 11) $\Rightarrow$ Cíclico

$\{1, 5, 9, 13\}$ es un subgrupo de orden 4 generado por 5 (o por 13) $\Rightarrow$ Cíclico

Nov 08

Dos funciones, F y G , están definidas sobre $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ de la siguiente manera

$$F(x) = \frac{1}{x}, \quad G(x) = 1-x, \quad \text{para todo } x \in A.$$

- (a) Compruebe que para la operación de composición de funciones, cada función es su propia inversa.
- (b) F y G , junto con otras cuatro funciones, forman un conjunto cerrado respecto a la operación de composición de funciones.

Halle estas cuatro funciones.

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

$$(F \circ F)(x) = F(F(x)) = F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad \checkmark \Rightarrow F^{-1}(x) = F(x)$$

$$G(x) = 1-x$$

$$(G \circ G)(x) = G(1-x) = 1-(1-x) = 1-1+x = x \quad \checkmark \Rightarrow G^{-1}(x) = G(x)$$

Por el momento tenemos las funciones: $F(x) = \frac{1}{x}$; $G(x) = 1-x$; $I(x) = x$

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(1-x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow H(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \rightarrow J(x) = \frac{x-1}{x}$$

Veamos las inversas de estas funciones:

$$H(x) = \frac{1}{1-x}; \quad y = \frac{1}{1-x}; \quad x = \frac{1}{1-y}; \quad x-y = 1; \quad x-1 = y; \quad y = \frac{x-1}{x} \rightarrow H^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$J(x) = \frac{x-1}{x}; \quad y = \frac{x-1}{x}; \quad x = \frac{y}{y-1}; \quad xy-x = y; \quad y(x-1) = x; \quad y = \frac{x}{x-1} \rightarrow J^{-1}(x) = J(x)$$

$$\text{Las seis funciones: } I(x) = x; F(x) = \frac{1}{x}; G(x) = 1-x; H(x) = \frac{1}{1-x}; H^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}; J(x) = \frac{x-1}{x}$$

Mayo 10

- (a) Considere el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ con respecto a la operación binaria $*$, donde $*$ denota la multiplicación módulo 8.

(i) Escriba la tabla de Cayley para $\{A, *\}$.

(ii) Compruebe que $\{A, *\}$ conforma un grupo.

(iii) Halle todas las soluciones de la ecuación $3 * x * 7 = y$. Dé las respuestas de la forma (x, y) .

- (b) Considere ahora el conjunto $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ con respecto a la operación binaria $\otimes$, donde $\otimes$ denota la multiplicación módulo 10. Compruebe que $\{B, \otimes\}$ no conforma un grupo.

- (c) Se puede formar otro conjunto C eliminando un elemento del conjunto B , de forma que $\{C, \otimes\}$ conforme un grupo.

(i) Indique cuál es el elemento que hay que eliminar.

(ii) Determine si $\{A, *\}$ y $\{C, \otimes\}$ son isomorfos.

a)

$*$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Vemos que: $*$ está cerrada en A ✓

1 es el e. neutro ✓

todos son simétricos de sí mismos ✓

Se cumple la asociativa porque el producto de $\mathbb{N}^3$ es asociativo. ✓

Luego $(A, *)$ es un grupo.

$$\begin{array}{lcl} 3 * 1 * 7 = 3 * 7 = 5 & \rightarrow & (1, 5) \\ 3 * 3 * 7 = 1 * 7 = 7 & \rightarrow & (3, 7) \\ 3 * 5 * 7 = 7 * 7 = 1 & \rightarrow & (5, 1) \\ 3 * 7 * 7 = 5 * 7 = 3 & \rightarrow & (7, 3) \end{array}$$

b)

$\otimes$	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

$\otimes$ está cerrada en B ✓

1 es el e. neutro ✓

$1^{-1} = 1$, $5^{-1} = 7$, $7^{-1} = 3$, $9^{-1} = 9$ pero no existe 3^{-1}

Se cumple la asociativa porque el producto de $\mathbb{N}^3$ es asociativo.

Vemos que si eliminamos el 5 la operación sigue estando cerrada, por lo que $C = \{1, 3, 7, 9\}$ sería un grupo para $\otimes$.

$\otimes$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

$(A, *)$, $(C, \otimes)$ no pueden ser isomorfos porque en $(C, \otimes)$ no todos los elementos son simétricos de sí mismos.

Nov 10

El conjunto $S = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $\circ$ es una operación binaria sobre S definida de la siguiente forma $x_i \circ x_j = x_k$ donde $i + j \equiv k \pmod{6}$.

- (a) (i) Construya la tabla de Cayley para $\{S, \circ\}$ y, a partir de lo anterior, compruebe que es un grupo.
- (ii) Compruebe que $\{S, \circ\}$ es cíclico.
- (b) Sea $\{G, *\}$ un grupo abeliano de orden 6. El elemento $a \in G$ es de orden 2 y el elemento $b \in G$ es de orden 3.
- (i) Escriba los seis elementos de $\{G, *\}$.
- (ii) Halle el orden de $a * b$ y a partir de lo anterior, compruebe que $\{G, *\}$ y $\{S, \circ\}$ son isomorfos.

a)

$\circ$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	x_1
x_3	x_3	x_4	x_5	x_0	x_1	x_2
x_4	x_4	x_5	x_0	x_1	x_2	x_3
x_5	x_5	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

• la operación está cerrada.

• E. Neutro : x_0

• Simétricos : $x_0^{-1} = x_0$, $x_3^{-1} = x_3$
 $x_1^{-1} = x_5$, $x_4^{-1} = x_2$
 $x_2^{-1} = x_4$, $x_5^{-1} = x_1$

• Transitiva : se cumple por ser transitiva la suma de 3 números reales.

Por lo tanto $\{S, \circ\}$ es un grupo

$\left. \begin{array}{l} x_1^{-1} = x_5 \\ x_1^2 = x_2 \\ x_1^3 = x_3 \\ x_1^4 = x_4 \\ x_1^5 = x_5 \\ x_1^6 = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 \text{ es generador del grupo} \Rightarrow \boxed{\{S, \circ\} \text{ es un grupo cíclico}}$

b) Llamemos 'e' al elemento neutro.

Si a es de orden 2 $\Rightarrow a^2 = e$

Si b es de orden 3 $\Rightarrow b^3 = e$. Llamemos $c = b^2$, por lo que $bc = cb = e$

$c^2 = b^2 \cdot b^2 = b^4 = b \Rightarrow c^2 = b$

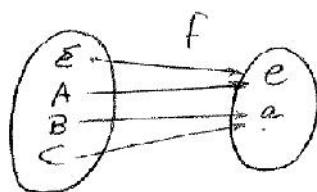
Muestra
14The groups $\{G, *\}$ and $\{H, \odot\}$ are defined by the following Cayley tables. G

$*$	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	A	E
C	C	B	E	A

 H

$\odot$	e	a
e	e	a
a	a	e

By considering a suitable function from G to H , show that a surjective homomorphism exists between these two groups. State the kernel of this homomorphism.



$$f: \{G, *\} \longrightarrow \{H, \odot\}$$

Vemos que f es un homomorfismo. Como $*$ es conmutativa no alteraremos el orden en G .

$$f(A * A) = f(E) = e$$

$$f(A) \odot f(A) = e \odot e = e \quad \checkmark$$

$$f(A * B) = f(C) = a$$

$$f(A) \odot f(B) = e \odot a = a \quad \checkmark$$

$$f(A * C) = f(B) = a$$

$$f(A) \odot f(C) = e \odot a = a \quad \checkmark$$

$$f(B * B) = f(A) = e$$

$$f(B) \odot f(B) = a \odot a = e \quad \checkmark$$

$$f(B * C) = f(E) = e$$

$$f(B) \odot f(C) = a \odot a = e \quad \checkmark$$

$$f(C * C) = f(A) = e$$

$$f(C) \odot f(C) = a \odot a = e \quad \checkmark$$

Y podemos demostrar juntos para cuando un elemento es E :

$$f(M * E) = f(M) = f(M) \odot e = f(M) \odot f(E) \quad \checkmark \quad \text{Para } M = A, B, C$$

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{E, A\}}$$

Mayo 14

Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos finitos.

- (a) Demuestre que $f(e_G) = e_H$, donde e_G es el elemento neutro de G y e_H es el elemento neutro de H .
- (b) (i) Demuestre que el núcleo de f , $K = \text{Ker}(f)$, es cerrado respecto a la operación del grupo.
- (ii) Deduzca que K es un subgrupo de G .
- (c) (i) Demuestre que $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G, k \in K$.
- (ii) Deduzca que toda clase lateral por la izquierda de K en G es también una clase lateral por la derecha.

$$f: G \longrightarrow H$$

a) $g \in G$: $f(g) \stackrel{(1)}{=} f(g \cdot e_G) \stackrel{(2)}{=} f(g) \cdot f(e_G)$
 $f(g) \stackrel{(1)}{=} f(e_G \cdot g) \stackrel{(2)}{=} f(e_G) \cdot f(g) \Rightarrow f(e_G) \text{ es el neutro de } H \Rightarrow \boxed{f(e_G) = e_H}$

(1): Por ser e_G el neutro de G .
 (2): Por ser f homomorfismo.

b) $k_1, k_2 \in \text{Ker}(f)$: $f(k_1 k_2) \stackrel{(1)}{=} f(k_1) f(k_2) \stackrel{(2)}{=} e_H \cdot e_H \stackrel{(3)}{=} e_H \Rightarrow \boxed{k_1 k_2 \in \text{Ker}(f)}$

(1): Por ser f homomorfismo.
 (2): Por pertenecer k_1, k_2 a $\text{Ker}(f)$.
 (3): Por ser e_H el neutro de H .

Como $\text{Ker}(f)$ es cerrado, y H es un grupo finito, $\text{Ker}(f)$ es un subgrupo de H .

NOTA: Todo subconjunto cerrado de un grupo finito es un subgrupo.

c) $g \in G$: $f(g) \cdot f(g^{-1}) \stackrel{(1)}{=} f(g \cdot g^{-1}) \stackrel{(2)}{=} f(e_G) \stackrel{(3)}{=} e_H$
 $f(g^{-1}) \cdot f(g) \stackrel{(1)}{=} f(g^{-1} \cdot g) \stackrel{(2)}{=} f(e_G) \stackrel{(3)}{=} e_H \Rightarrow f(g^{-1}) \text{ es el inverso de } f(g) \Rightarrow \boxed{f(g^{-1}) = f(g)^{-1}}$

(1): Por ser f homomorfismo.
 (2): Por ser g, g^{-1} recíprocos.

$g \in G$
 $k \in \text{Ker}(f)$: $f(gkg^{-1}) \stackrel{(1)}{=} f(g) f(k) f(g^{-1}) \stackrel{(2)}{=} f(g) e_H f(g^{-1}) \stackrel{(3)}{=} f(g) f(g^{-1}) \stackrel{(4)}{=} f(g \cdot g^{-1}) \stackrel{(5)}{=} f(e_G) \stackrel{(6)}{=} e_H \Rightarrow \boxed{gkg^{-1} \in \text{Ker}(f)}$

(1): Por ser f homomorfismo.
 (2): $k \in \text{Ker}(f)$.
 (3): Por ser e_H neutro de H .
 (4): Demostración anterior.
 (5): Por ser recíprocos.

$g \in G$: $C_D = \{ kg \mid k \in \text{Ker}(f) \}$
 $C_I = \{ gk \mid k \in \text{Ker}(f) \}$

$x \in C_I \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exists k_1 \in \text{Ker}(f) \mid gk_1 = x \stackrel{(2)}{\Rightarrow} gk_1 g^{-1} = x g^{-1} \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$
 $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} x g^{-1} = k_2 \in \text{Ker}(f) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} x = k_2 g \stackrel{(6)}{\Rightarrow} x \in C_D$

- (1): Definición de clase izquierda del elemento g .
 (2): Multiplicando ambos miembros por g^{-1} por la derecha.
 (3): Demostración anterior.
 (4): Multiplicando ambos miembros por g por la derecha.
 (5): Definición de clase derecha del elemento g .

Nov 14

Considere el conjunto A , compuesto por todas las permutaciones de los enteros 1, 2, 3, 4, 5.

- (a) Dos elementos de A son $p = (1\ 2\ 5)$ y $q = (1\ 3)(2\ 5)$.
Halle una única permutación, equivalente a $q \circ p$.
- (b) Indique una permutación que pertenezca a A y que sea de orden
- 4;
 - 6.
- (c) Sea $P = \{\text{todas las permutaciones en } A \text{ en las que exactamente dos enteros cambian de posición}\}$, y $Q = \{\text{todas las permutaciones en } A \text{ en las que el entero 1 cambia de posición}\}$.
- Enumere todos los elementos pertenecientes a $P \cap Q$.
 - Halle $n(P \cap Q)$.

a) $p = (1\ 2\ 5) \rightarrow p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en notación de permutación
 $q = (1\ 3)(2\ 5) \rightarrow q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ " " " "
 $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (1\ 5\ 3) \text{ como ciclo.}$

b) $\text{mcm}(4, 1) = 4 \rightarrow \text{El ciclo } (1\ 2\ 3\ 4) \text{ tendrá orden } 4$
 $\text{mcm}(2, 3) = 6 \rightarrow \text{El ciclo } (1\ 2)(3\ 4\ 5) \text{ tendrá orden } 6$

c) $P \cap Q$ serán las permutaciones en las que solamente el 1 y otro número cambian de posición.

$$P \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En notación de ciclos: $P \cap Q = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5)\}$

P tendrá 10 permutaciones; en ciclos:

$$P = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5), (2\ 3), (2\ 4), (2\ 5), (3\ 4), (3\ 5), (4\ 5)\}$$

$$n(P \cap Q) = n(P) - n(P \cap Q) = 10 - 4 = \boxed{6}$$

Nov 15

The set of all permutations of the elements $1, 2, \dots, 10$ is denoted by H and the binary operation $\circ$ represents the composition of permutations.

The permutation $p = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$ generates the subgroup $\{G, \circ\}$ of the group $\{H, \circ\}$.

- (a) Find the order of $\{G, \circ\}$.
- (b) State the identity element in $\{G, \circ\}$.
- (c) Find
 - (i) $p \circ p$;
 - (ii) the inverse of $p \circ p$.
- (d)
 - (i) Find the maximum possible order of an element in $\{H, \circ\}$.
 - (ii) Give an example of an element with this order.

a) $p = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$

orden $p = \text{mcm}(6, 4) = 12$

orden de $\{G, \circ\} = 12$

b) $e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$ en notación de ciclos.

También se podría escribir: $e = ()$

El notación de permutación: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

c) p en notación de permutación: $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

$p \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$p^2 = p \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ que en notación de

ciclos se escribiría: $p^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(7\ 9)(8\ 10)$

su inversa: $(p^2)^{-1} = (5\ 3\ 1)(6\ 4\ 2)(9\ 7)(10\ 8) =$
 $= (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)(7\ 9)(8\ 10)$

que en notación de permutación es:

$(p^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

d) Descomponiendo el 10 en suma de n° cuyo m.c.m. sea el mayor posible tendríamos: $10 = 2 + 3 + 5$
 $\text{mcm}(2, 3, 5) = 30$

Por ejemplo: $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$

Nov 15

A group $\{D, \times_3\}$ is defined so that $D = \{1, 2\}$ and $\times_3$ is multiplication modulo 3.

A function $f: \mathbb{Z} \rightarrow D$ is defined as $f: x \mapsto \begin{cases} 1, & x \text{ is even} \\ 2, & x \text{ is odd} \end{cases}$.

- Prove that the function f is a homomorphism from the group $\{\mathbb{Z}, +\}$ to $\{D, \times_3\}$.
- Find the kernel of f .
- Prove that $\{\text{Ker}(f), +\}$ is a subgroup of $\{\mathbb{Z}, +\}$.

Sabemos que: la suma de dos impares es par.
 " " " " pares es par.
 " " " un impar con un par es impar.

a) Debemos demostrar: $f(a+b) = f(a) \times_3 f(b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$

- a, b impares: $f(a+b) = 1$ ✓
 $(a+b \text{ será par})$ $f(a) \times_3 f(b) = 2 \times_3 2 = 1$
- a, b pares: $f(a+b) = 1$ ✓
 $(a+b \text{ será par})$ $f(a) \times_3 f(b) = 1 \times_3 1 = 1$
- a par, b impar: $f(a+b) = 2$ ✓
 $(a+b \text{ será impar})$ $f(a) \times_3 f(b) = 1 \times_3 2 = 2$

b) $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = 1\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = \{2y \mid y \in \mathbb{Z}\}$

c) $x_1, x_2 \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2y_1 \\ x_2 = 2y_2 \end{matrix} \mid y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2y_1 - 2y_2 = 2(y_1 - y_2) \Rightarrow$
 $x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \boxed{\{\text{Ker}(f), +\} \text{ es subgrupo de } \{\mathbb{Z}, +\}}$

Mayo 16

La siguiente tabla de Cayley corresponde a la operación binaria multiplicación módulo 9 representada mediante el símbolo $*$, definida sobre el conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

*	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8				
5	5	1				
7	7	5				
8	8	7				

- Copie y complete la tabla.
- Muestre que $\{S, *\}$ es un grupo abeliano.
- Determine el orden de cada uno de los elementos de $\{S, *\}$.
- Halle los dos subgrupos propios de $\{S, *\}$.
 - Halle la clase lateral de cada uno de estos subgrupos con respecto al elemento 5.
- Resuelva la ecuación $2 * x * 4 * x * 4 = 2$.

a)

*	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

b) $*$ es conmutativa porque es una tabla simétrica respecto de la diagonal principal.

1 es el elemento neutro.

Todos tienen inverso: $1^{-1}=1, 2^{-1}=5, 4^{-1}=7, 8^{-1}=8$
 $5^{-1}=2, 7^{-1}=4$

Por lo tanto $\{S, *\}$ es grupo abeliano.

c)

$$1^{-1}=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 1 = 1}$$

$$2^2=4, 2^3=8, 2^4=7, 2^5=5, 2^6=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 2 = 6}$$

$$4^2=7, 4^3=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 4 = 3}$$

$$5^2=7, 5^3=8, 5^4=4, 5^5=2, 5^6=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 5 = 6}$$

$$7^2=4, 7^3=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 7 = 3}$$

$$8^2=1 \Rightarrow \boxed{\text{orden } 8 = 2}$$

d) Como S tiene 6 elementos podemos encontrar subgrupos con 1, 2, 3, 6 elementos.

$$S_1 = \{1, 8\}$$

$$S_2 = \{1, 4, 7\}$$

Como $*$ es conmutativa, es idéntica clase derecha a clase izquierda.

$$C_1 = \{5 \cdot 1, 5 * 8\} = \{5, 4\}$$

$$C_2 = \{5 \cdot 1, 5 * 4, 5 * 7\} = \{5, 2, 8\}$$

e)

$$2 * x * 4 * x * 4 = 2 \xrightarrow{(1)} x * 4 * x * 4 = 1 \xrightarrow{(2)} (x * 4) * (x * 4) = 1 \xrightarrow{(2)} x * 4 = 1 \rightarrow \boxed{x = 7}$$

$$\xrightarrow{(2)} x * 4 = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

(1): Simplificando el 2

(2): los únicos elementos simétricos de sí mismos son 1 y 8.

Matrices

Nov 01

- (a) Prove that the set of matrices of the form $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

where $a, b, c \in \mathbb{R}$, is a group under matrix multiplication.

- (b) Show that this group is Abelian if and only if there exists a real constant k such that $c = ka$.

a) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

• Operación cerrada: $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2+a_1 & b_2+a_1c_2+b_1 \\ 0 & 1 & c_2+c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \checkmark$

• E. Neutro: Con $\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{matrix} \mid \Rightarrow I \in G \quad \checkmark$

• E. Simétrico: $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|M| = 1$
 $M_{11} = 1 \quad \begin{cases} M_{21} = -a \\ M_{12} = 0 \\ M_{13} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{31} = ac-b \\ M_{22} = 1 \\ M_{23} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{32} = -c \\ M_{33} = 1 \end{cases} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \checkmark$

• P. Asociativa: Se cumple en el producto de Matrices.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2+a_1 & b_2+a_1c_2+b_1 \\ 0 & 1 & c_2+c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1+a_2 & b_1+a_2c_1+b_2 \\ 0 & 1 & c_1+c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Es el único elemento diferente.

$\forall M_1, M_2, M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1 \Rightarrow b_2+a_1c_2+b_1 = b_1+a_2c_1+b_2 \Rightarrow a_1c_2 = a_2c_1 \Rightarrow \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_1}{a_1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{c}{a} = \text{Constante} \quad \checkmark$

$c = ka$ en cualquier matriz $M \Rightarrow a_1c_2 = a_1 \cdot k \cdot a_2 = c_1 \cdot a_2 \Rightarrow b_2+a_1c_2+b_1 = b_1+a_2c_1+b_2 \quad \checkmark$

Nov 05

Sea M el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Compruebe que $(M, +)$ no es un grupo.
- (b) Compruebe que M forma un grupo abeliano bajo la multiplicación de matrices. (Puede suponer que la multiplicación de matrices es asociativa).

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

La operación $+$ no está cerrada: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x+y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin M$

b) Operación cerrada: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \quad \checkmark$

Elemento neutro: $x=0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \quad \checkmark$

Elemento simétrico: $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} |A| = 1 \\ A_{11} = 1 \\ A_{12} = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} A_{21} = -x \\ A_{22} = 1 \end{matrix} \right. \quad \left\{ \begin{matrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \quad \checkmark \end{matrix} \right.$$

Asociativa: Asumimos su cumplimiento en el producto de matrices

Commutativa: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\checkmark$

Demostraciones de Teoría de Grupos

Mayo 04

(511)

The group $(G, *)$ is defined on the set $\{e, a, b, c\}$, where e denotes the identity element. Prove that $a * b = b * a$.

Como $a \neq e$ | $b \neq e$ $\Rightarrow$ $ab \neq a$
 $ab \neq b$ Por lo tanto hay dos opciones: $ab = e$
 $ab = c$

• Si $ab = e \Rightarrow a, b$ son simétricos $\Rightarrow b \cdot a = e \Rightarrow b \cdot a = ab \checkmark$

• Si $ab = c \Rightarrow b \cdot a$ puede ser: $\begin{cases} c & \text{Absurdo Porque } a \text{ y } b \text{ serían simétricos} \\ a & \text{" " } b \text{ sería } e \\ b & \text{" " } a \text{ sería } e \\ c & \text{Única opción viable} \end{cases} \Rightarrow ab = ba \checkmark$

Nov 04

Sea $(H, \times)$ un grupo, y sea a uno de sus elementos tal que $a \times a = a$. Compruebe que a tiene que ser el elemento neutro del grupo.

$$a \times a = a \xrightarrow{*} a^{-1} \times (a \times a) = a^{-1} \times a \xrightarrow{**} (a^{-1} \times a) \times a = a^{-1} \times a \xrightarrow{***} e \times a = e \xrightarrow{****} a = e$$

(*) Multiplicamos ambos miembros por a^{-1} , que existe por ser H un grupo

(**) Aplicamos la propiedad asociativa.

(***) $a^{-1} \times a = e$ por ser a^{-1} el simétrico de a

(****) $e \times a = a$ por ser ' e ' el elemento neutro.

Nov 04

Sea $(G, \#)$ un grupo finito cuyo orden p es un número primo.

(b) Compruebe que $(G, \#)$ es cíclico.

Que el orden de G sea un n° primo, supone que no tiene subgrupos propios (Teorema de Lagrange).

Por otro lado sabemos que el subconjunto de los 'potencias' de un elemento forma un grupo.

Sea $g \in G$ ($g \neq e$), y llamemos $H = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}^+\}$, obviamente H es subgrupo de G , y por lo dicho anteriormente sólo puede ser el propio G , por lo que G será cíclico.

Mayo 06

Suponga que G es un grupo y H es un subconjunto no vacío de G . Compruebe que si $ab^{-1} \in H$, donde $a, b \in H$ entonces H es un subgrupo de G .

$H \subset G$ (grupo) (Llamamos al elemento de G .)

$\forall a, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow H$ subgrupo.

$\Rightarrow$ $a \in H \rightarrow aa^{-1} \in H \rightarrow 1 \in H \Rightarrow H$ tiene elemento $\checkmark$
 $\left. \begin{matrix} a \in H \\ 1 \in H \end{matrix} \right\} \rightarrow 1 \cdot a^{-1} \in H \rightarrow a^{-1} \in H \Rightarrow H$ tiene todos los simétricos de sus elementos $\checkmark$
 En H se cumple la asociatividad ya que se cumple en G .
 $a, b \in H \rightarrow a, b^{-1} \in H \rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ab \in H \Rightarrow$ la operación está cerrada en H $\checkmark$

$\Leftarrow$ Si H tiene estructura de grupo debe cumplir la propiedad de ser simétrico y así la operación cerrada en H , luego: $ab^{-1} \in H$ $\checkmark$

Nov 06

El orden de cada uno de los elementos del grupo $(G, *)$ es o bien 1 ó 2. Compruebe que G es un grupo abeliano.

El único elemento con orden 1 es el elemento neutro, luego todos los elementos (salvo el neutro) tienen orden 2 $\Rightarrow x^2 = 1, \forall x \neq 1$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2)^2 = 1 &\Rightarrow \underbrace{x_1 x_2 x_1 x_2}_{x_1} = 1 \Rightarrow \underbrace{x_1 x_1}_{1} x_2 x_1 x_2 = x_1 \cdot 1 \Rightarrow x_2 x_1 x_2 = \underbrace{x_1}_{x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_2 x_1 \underbrace{x_2 x_2}_{1} = x_1 x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 x_1 = x_1 x_2} \Rightarrow \boxed{G \text{ es abeliano}} \end{aligned}$$

Nov 09

Sea $\{G, *\}$ un grupo finito de orden n y sea H un subconjunto no vacío de G .

(a) Compruebe que el orden de cualquier elemento $h \in H$ es menor o igual que n .

(b) Si H es cerrado para $*$, compruebe que $\{H, *\}$ es un subgrupo de $\{G, *\}$.

a) Si el orden de h fuese 'm', es obvio que dispondríamos de un subgrupo cíclico con los elementos $\{h, h^2, h^3, \dots, h^{m-1}, e\}$ y como su número de elementos distintos es 'm' deberá ser $m \leq n$ por ser 'm' el total de elementos del grupo.

b) Sea $h \in H$, con orden 'm', al estar $*$ cerrada en H , $h^m \in H$, por lo que $e \in H$. Es decir, H tiene elemento neutro.
 Por otro lado $e = h^m = h * h^{m-1} = h^{m-1} * h$, por lo que $h^{-1} = h^{m-1}$, que también pertenece a H , por estar $*$ cerrada en H . Es decir que todos los elementos de H tienen simétricos.

Al ser H un subconjunto de G , en el que se cumple la propiedad asociativa con $*$, los elementos de H cumplirán la propiedad asociativa.

Por lo tanto H tiene estructura de grupo, por lo que es un subgrupo de G .