

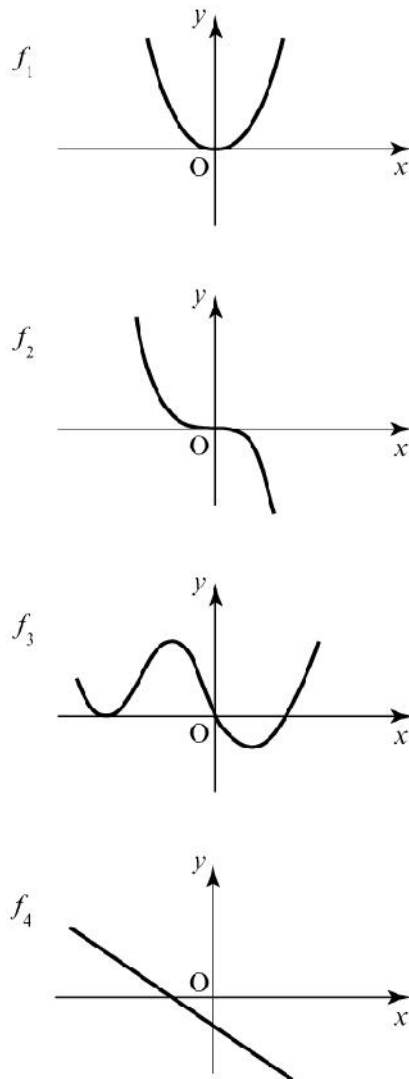
**Cálculo Diferencial en exámenes BI - NM****Mayo 00**  
**P1**Let  $f(x) = x^3$ .(a) Evaluate  $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$  for  $h = 0.1$ .(b) What number does  $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$  approach as  $h$  approaches zero?**Mayo 00**  
**P1**Find the coordinates of the point on the graph of  $y = x^2 - x$  at which the tangent is parallel to the line  $y = 5x$ .**Mayo 01**  
**P1**The point  $P(\frac{1}{2}, 0)$  lies on the graph of the curve of  $y = \sin(2x - 1)$ Find the gradient of the tangent to the curve at  $P$ .**Nov 01**  
**P2**The function  $f$  is defined by  $f: x \mapsto -0.5x^2 + 2x + 2.5$ .(a) (i) Determine  $f'(x)$ .(ii) Evaluate  $f'(0)$ .(b) Show that the equation of the line perpendicular to the tangent to the graph of  $f$  (i.e. the normal) at the point where the graph intercepts the  $y$ -axis may be written as  $y = -0.5x + 2.5$ .**Nov 01**  
**P1**Consider the function  $f(x) = k \sin x + 3x$ , where  $k$  is a constant.(a) Find  $f'(x)$ .(b) When  $x = \frac{\pi}{3}$ , the gradient of the curve of  $f(x)$  is 8. Find the value of  $k$ .

Mayo 02  
P1

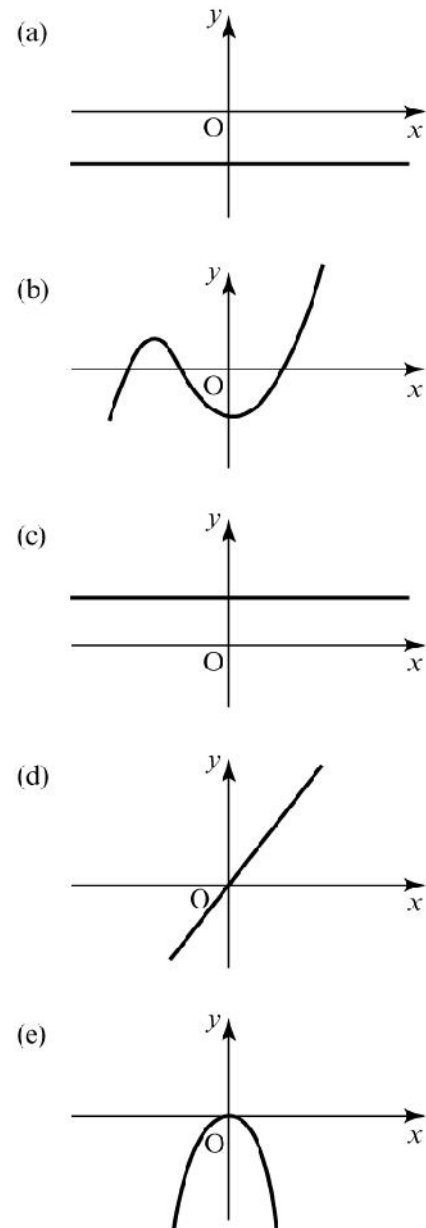
En la **Figura 1** aparecen las gráficas de las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ .

En la **Figura 2** se muestran las gráficas de las derivadas de las funciones de la **Figura 1**, por ejemplo, la derivada de  $f_1$  aparece en el diagrama (d).

**Figura 1**



**Figura 2**



Rellene la tabla siguiente efectuando la correspondencia entre cada una de las funciones y su derivada.

| Función | Diagrama de la derivada |
|---------|-------------------------|
| $f_1$   | (d)                     |
| $f_2$   |                         |
| $f_3$   |                         |
| $f_4$   |                         |

Nov 02

P1

La gráfica de  $y = x^3 - 10x^2 + 12x + 23$  tiene un punto de máximo entre  $x = -1$  y  $x = 3$ . Halle las coordenadas de este punto de máximo.

Mayo 03

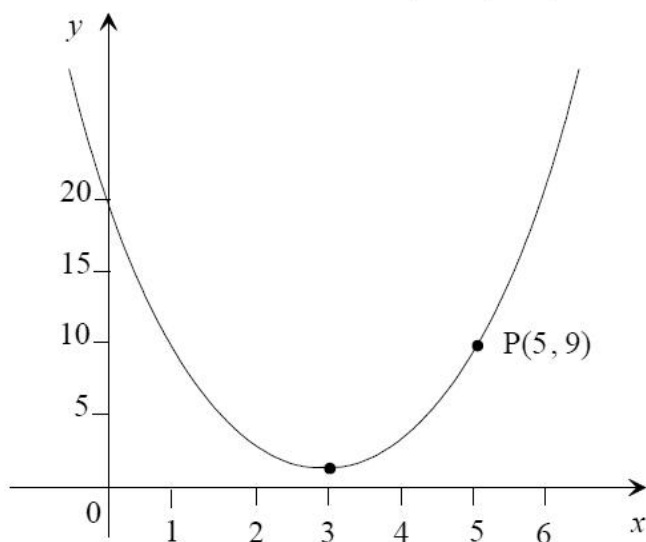
P1

Sea  $f(x) = e^{\frac{x}{3}} + 5 \cos^2 x$ . Halle  $f'(x)$

Mayo 03

P2

El diagrama muestra parte de la gráfica de la curva  $y = a(x-h)^2 + k$ , donde  $a, h, k \in \mathbb{Z}$ .



- (a) El vértice está en el punto  $(3, 1)$ . Escriba el valor de  $h$  y de  $k$ .
- (b) El punto  $P(5, 9)$  está sobre la gráfica. Demuestre que  $a = 2$ .
- (c) A partir de ello, demuestre que la ecuación de la curva se puede escribir de la forma

$$y = 2x^2 - 12x + 19.$$

- (d) (i) Halle  $\frac{dy}{dx}$ .

Se traza una tangente a la curva en  $P(5, 9)$ .

- (ii) Calcule la pendiente de esta tangente.
- (iii) Halle la ecuación de esta tangente.

Nov 03  
P2

Una masa está suspendida del techo por medio de un muelle. Se tira de ella hacia abajo hasta el punto P y después se suelta. La masa oscila de arriba abajo.



**figura no dibujada  
a escala**

Su distancia al techo,  $s$  cm, viene dada por la función  $s = 48 + 10 \cos 2\pi t$  donde  $t$  es el tiempo, en segundos, desde el instante en que se suelta.

(a) (i) ¿A qué distancia del techo se encuentra el punto P?

(ii) ¿Cuánto tarda la masa en volver a pasar por P?

(b) (i) Halle  $\frac{ds}{dt}$ .

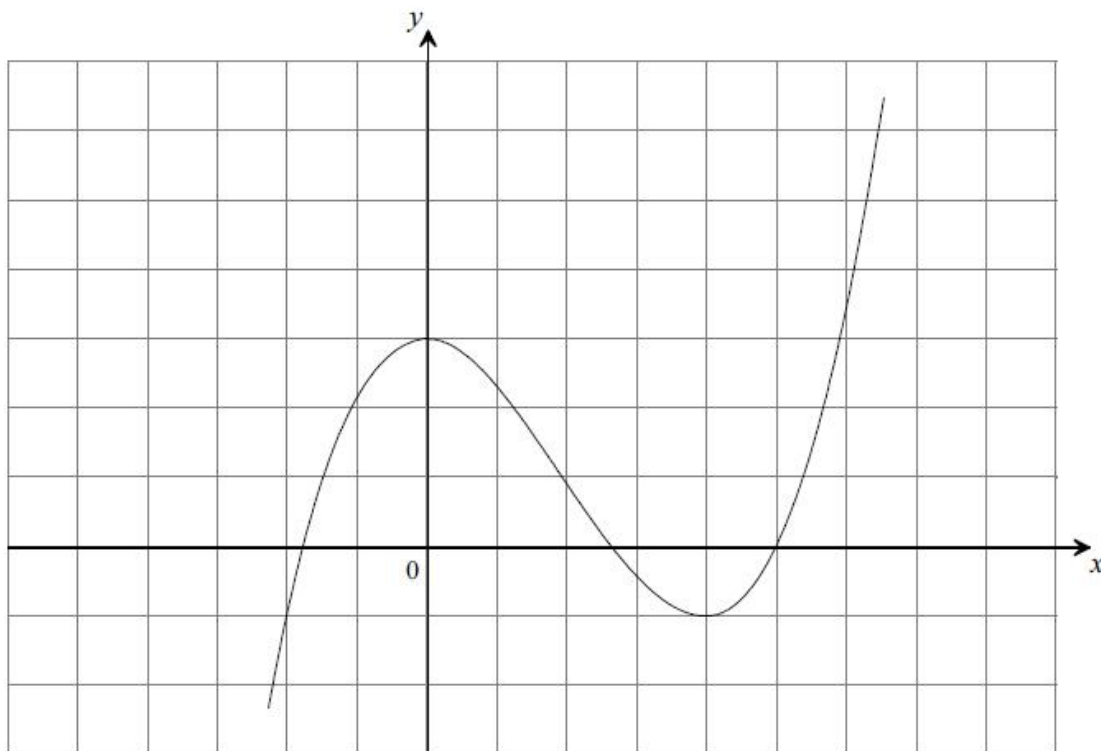
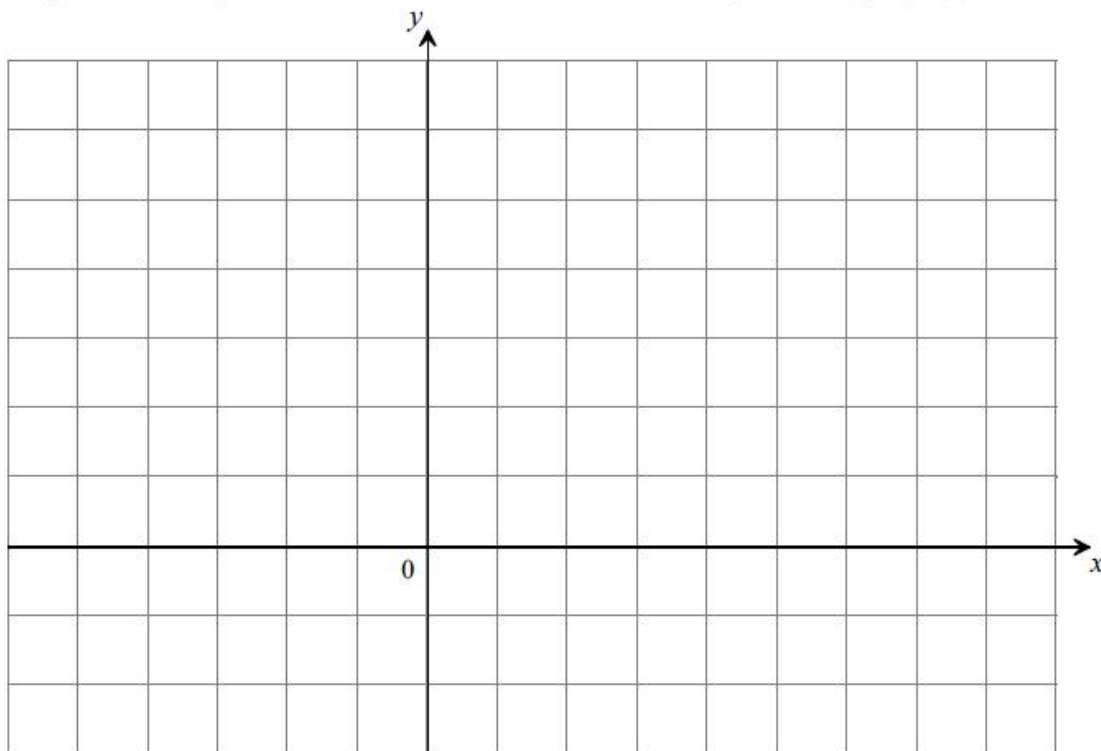
(ii) ¿Dónde se encuentra la masa cuando la velocidad es cero?

Una segunda masa está suspendida de otro muelle. Su distancia al techo,  $r$  cm, viene dada por la función  $r = 60 + 15 \cos 4\pi t$ . Las dos masas se sueltan al mismo tiempo.

(c) Calcule el valor de  $t$  cuando ambas masas se encuentran a la misma distancia del techo por primera vez.

(d) Durante los primeros tres segundos, ¿cuántas veces se encuentran las dos masas a la misma altura?

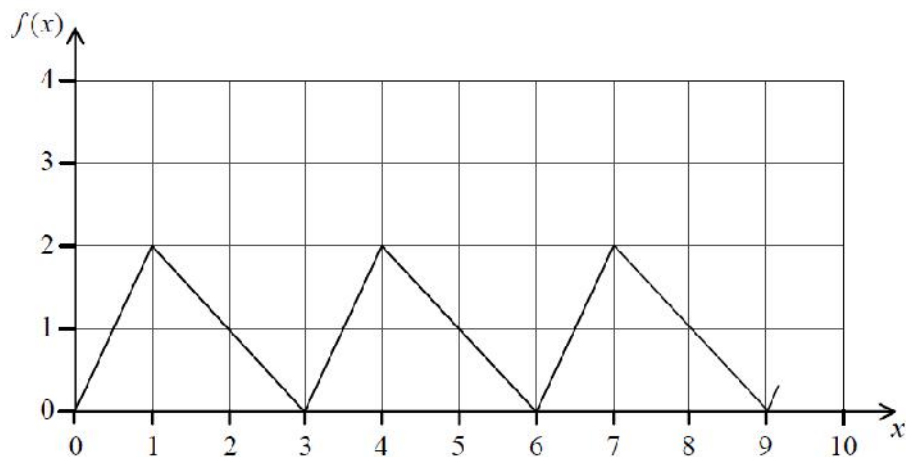
**Nota: En toda esta pregunta se utilizan radianes.**

Nov 03  
P1La siguiente figura muestra la gráfica de la función  $y = f(x)$ .Dibuje de forma aproximada, sobre la cuadrícula inferior, la gráfica de  $y = f'(x)$ .Mayo 04  
P1Let  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ .

- Find  $f'(x)$ .
- Find the gradient of the curve of  $f(x)$  at the point  $(2, -1)$

Nov 04  
P1

A continuación se muestra parte de la gráfica de la función periódica  $f$ . El dominio de  $f$  es  $0 \leq x \leq 15$  y el período es 3.



(a) Halle

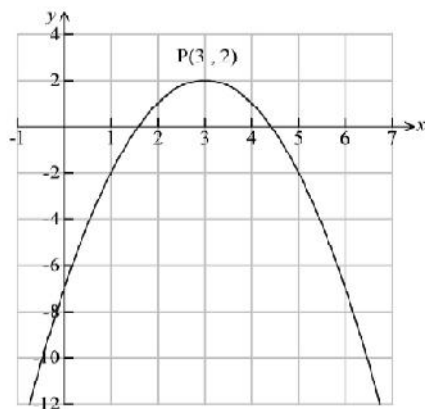
(i)  $f(2)$ ;

(ii)  $f'(6,5)$ ;

(iii)  $f'(14)$ .

(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = 1$  en el dominio dado?Nov 04  
P2

La función  $f(x)$  está definida como  $f(x) = -(x-h)^2 + k$ . La siguiente figura muestra parte de la gráfica de  $f(x)$ . El máximo de la curva es el punto  $P(3,2)$ .



(a) Escriba el valor de

(i)  $h$ ;

(ii)  $k$ .

(b) Compruebe que  $f(x)$  se puede escribir como  $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ .(c) Halle  $f'(x)$ .

El punto Q de la gráfica tiene coordenadas  $(4,1)$ . Una recta  $L$ , que pasa por Q, es perpendicular a la tangente en Q.

(d) (i) Calcule la pendiente de  $L$ .(ii) Halle la ecuación de  $L$ .(iii) La recta  $L$  corta de nuevo a la curva en R. Halle la abscisa de R.

Nov 04  
P2

Sea  $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$  para  $0 \leq x \leq \pi$ , donde  $x$  viene expresado en radianes.

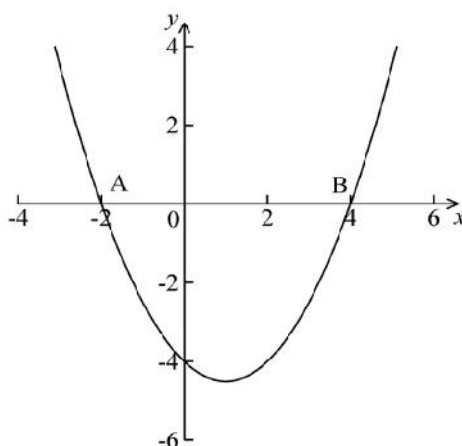
- (a) (i) Halle  $f'(x)$ .
- (ii) Halle los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x) = 0$ , expresando las respuestas en función de  $\pi$ .

Nov 04  
P1

Sea  $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$ . Halle  $f'(x)$ .

Mayo 05  
P2

La ecuación de una curva se puede escribir en la forma  $y = a(x-p)(x-q)$ . La curva corta al eje  $x$  en  $A(-2, 0)$  y en  $B(4, 0)$ . En la siguiente figura se muestra la curva de  $y = f(x)$ .



- (a) (i) Escriba el valor de  $p$  y de  $q$ .
- (ii) Sabiendo que  $(6, 8)$  es un punto de la curva, halle el valor de  $a$ .
- (iii) Escriba la ecuación de la curva en la forma  $y = ax^2 + bx + c$ .
- (b) (i) Halle  $\frac{dy}{dx}$ .
- (ii) Se traza la tangente a la curva en un punto  $P$ . La pendiente de esta tangente es 7. Halle las coordenadas de  $P$ .
- (c) La recta  $L$  es perpendicular en el punto  $B(4, 0)$  a la tangente a la curva en  $B$ .
- (i) Halle la ecuación de  $L$ .
- (ii) Halle la abscisa,  $x$ , del punto donde  $L$  corta de nuevo a la curva.

Nov 05  
P1

Let  $f(x) = (2x + 7)^3$  and  $g(x) = \cos^2(4x)$ . Find

- (a)  $f'(x)$ ;
- (b)  $g'(x)$ .

Nov 05

P1

The following diagram shows a rectangular area ABCD enclosed on three sides by 60 m of fencing, and on the fourth by a wall AB.



Find the width of the rectangle that gives its maximum area.

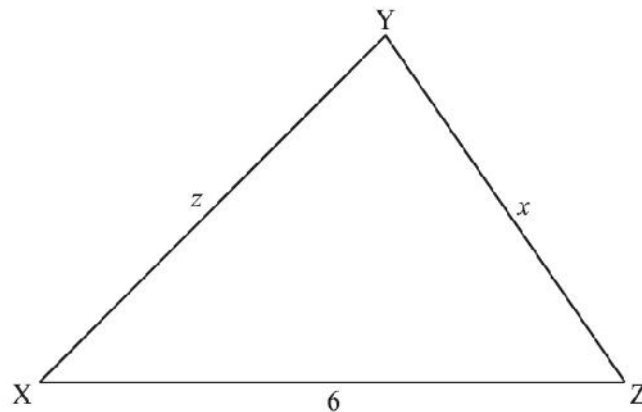
Mayo 06

P2

(a) Sea  $y = -16x^2 + 160x - 256$ . Dado que  $y$  tiene un valor máximo, halle

- (i) el valor de  $x$  que da el valor máximo de  $y$ ;
- (ii) este valor máximo de  $y$ .

El triángulo XYZ tiene  $XZ = 6$ ,  $YZ = x$ ,  $XY = z$  tal como se muestra debajo. El perímetro del triángulo XYZ es 16.



- (b) (i) Exprese  $z$  en términos de  $x$ .
- (ii) Utilizando el teorema del coseno, exprese  $z^2$  en términos de  $x$  y  $\cos Z$ .
- (iii) A partir de lo anterior, compruebe que  $\cos Z = \frac{5x-16}{3x}$ .

Sea  $A$  el área del triángulo XYZ.

- (c) Compruebe que  $A^2 = 9x^2 \sin^2 Z$ .
- (d) A partir de lo anterior, compruebe que  $A^2 = -16x^2 + 160x - 256$ .
- (e) (i) A partir de lo anterior, escriba el área máxima del triángulo XYZ.
- (ii) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo con el área máxima?

Mayo 06  
P1

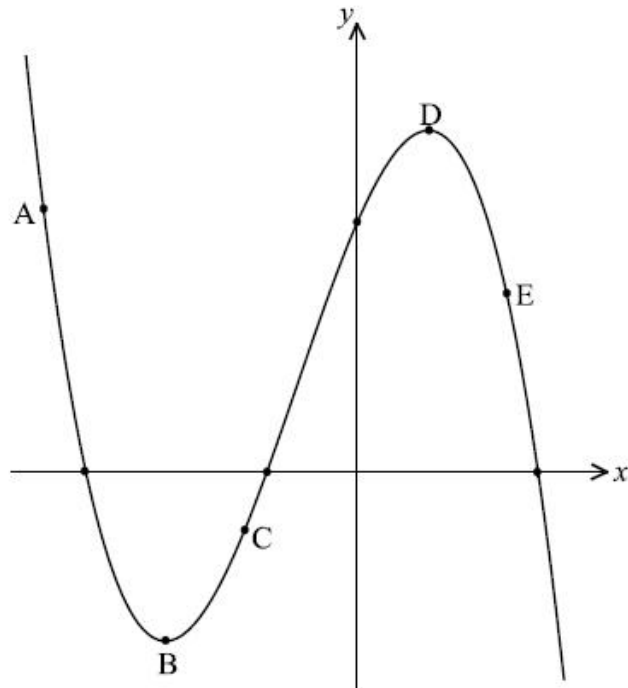
(a) Let  $f(x) = e^{5x}$ . Write down  $f'(x)$ .

(b) Let  $g(x) = \sin 2x$ . Write down  $g'(x)$ .

(c) Let  $h(x) = e^{5x} \sin 2x$ . Find  $h'(x)$ .

Mayo 06  
P1

The following diagram shows part of the curve of a function  $f$ . The points A, B, C, D and E lie on the curve, where B is a minimum point and D is a maximum point.



(a) Complete the following table, noting whether  $f'(x)$  is positive, negative or zero at the given points.

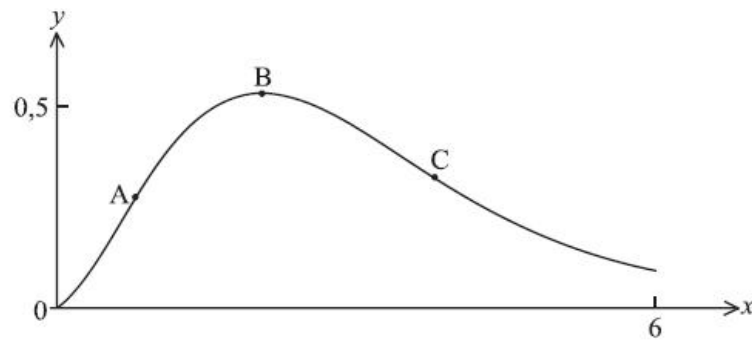
|         | A | B | E |
|---------|---|---|---|
| $f'(x)$ |   |   |   |

(b) Complete the following table, noting whether  $f''(x)$  is positive, negative or zero at the given points.

|          | A | C | E |
|----------|---|---|---|
| $f''(x)$ |   |   |   |

Mayo 06  
P1

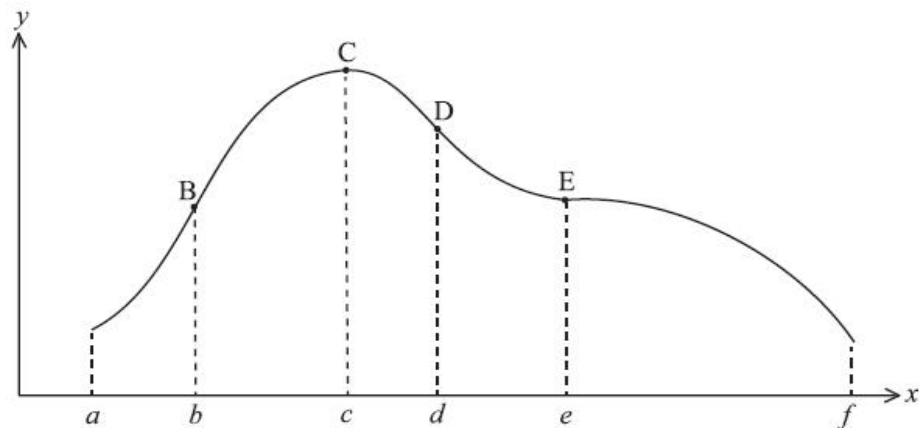
El siguiente diagrama presenta la gráfica de  $f(x) = x^2 e^{-x}$  para  $0 \leq x \leq 6$ . Existen puntos de inflexión en A y C y existe un máximo en B.



- Utilizando la regla del producto para la derivación, halle  $f'(x)$ .
- Halle el valor **exacto** de la **coordenada y** de B.
- La derivada segunda de  $f$  es  $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$ . Utilice este resultado para hallar el valor **exacto** de la **coordenada x** de C.

Mayo 06  
P1

El diagrama siguiente presenta la gráfica de una función  $g$ .



La pendiente de la curva tiene un valor máximo en el punto B y un valor mínimo en el punto D. La tangente es horizontal en los puntos C y E.

- Complete la siguiente tabla, indicando si la derivada primera  $g'$  es positiva o negativa y si la derivada segunda  $g''$  es positiva o negativa.

| Intervalo   | $g'$ | $g''$ |
|-------------|------|-------|
| $a < x < b$ |      |       |
| $e < x < f$ |      |       |

- Complete la tabla que aparece a continuación indicando los puntos de la gráfica descritos por las siguientes condiciones.

| Condiciones                | Punto |
|----------------------------|-------|
| $g'(x) = 0$ , $g''(x) < 0$ |       |
| $g'(x) < 0$ , $g''(x) = 0$ |       |

Mayo 06  
P1

Considere la función  $f: x \mapsto 3x^2 - 5x + k$ .

(a) Escriba  $f'(x)$ .

La ecuación de la tangente a la gráfica de  $f$  en  $x = p$  es  $y = 7x - 9$ . Halle el valor de

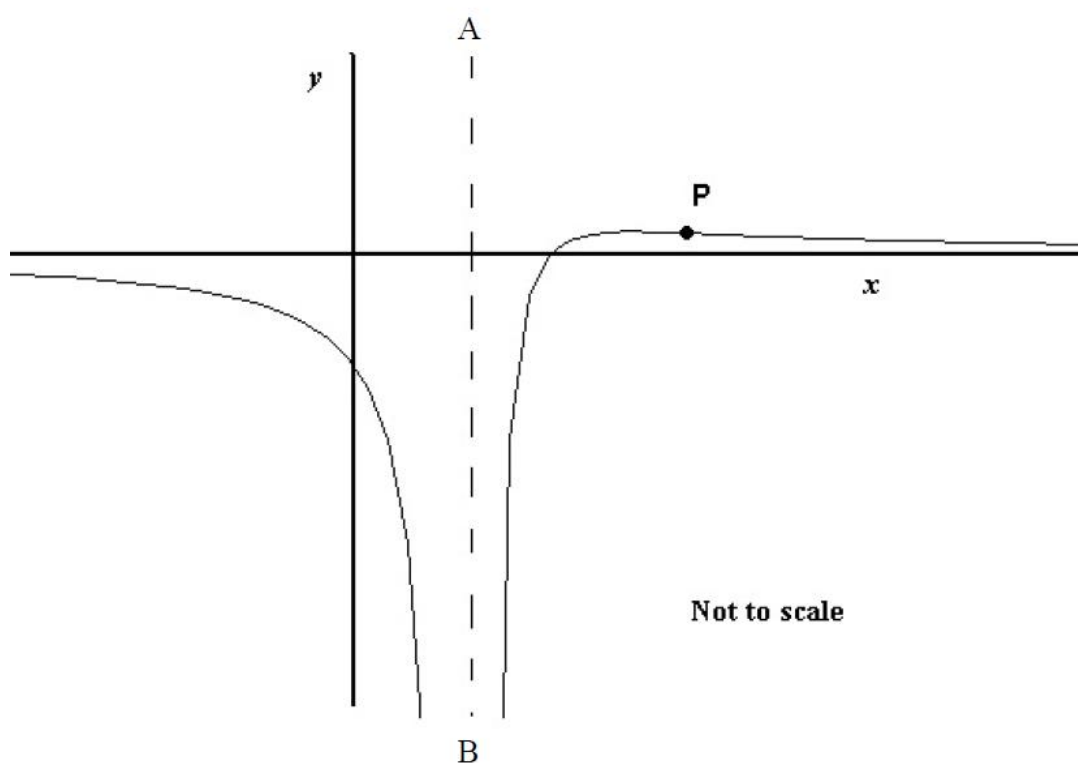
(b)  $p$ ;

(c)  $k$ .

Muestra  
06 P2

Consider the function  $h: x \mapsto \frac{x-2}{(x-1)^2}$ ,  $x \neq 1$ .

A sketch of part of the graph of  $h$  is given below.



The line (AB) is a vertical asymptote. The point P is a point of inflexion.

(a) Write down the **equation** of the vertical asymptote.

(b) Find  $h'(x)$ , writing your answer in the form

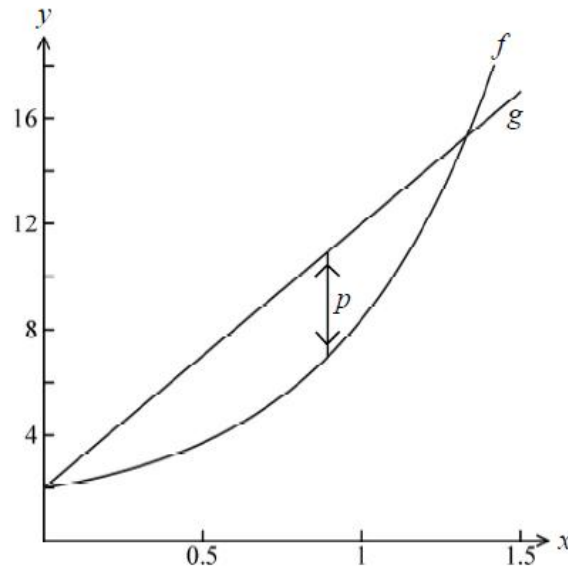
$$\frac{a-x}{(x-1)^n}$$

where  $a$  and  $n$  are constants to be determined.

(c) Given that  $h''(x) = \frac{2x-8}{(x-1)^4}$ , calculate the coordinates of P.

Muestra  
06 P2

The diagram below shows the graphs of  $f(x) = 1 + e^{2x}$ ,  $g(x) = 10x + 2$ ,  $0 \leq x \leq 1.5$



- (a) (i) Write down an expression for the vertical distance  $p$  between the graphs of  $f$  and  $g$ .
- (ii) Given that  $p$  has a maximum value for  $0 \leq x \leq 1.5$ , find the value of  $x$  at which this occurs.

May 07  
P2

Sea  $f(x) = p - \frac{3x}{x^2 - q^2}$ , donde  $p, q \in \mathbb{R}^+$ .

- (i) Compruebe que  $f'(x) = \frac{3(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$ .
- (ii) A partir de lo anterior, compruebe que la gráfica de  $f$  no tiene ni máximos ni mínimos.

May 07  
P1

Let  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$ .

The tangents to the curve of  $f$  at the points P and Q are parallel to the  $x$ -axis, where P is to the left of Q.

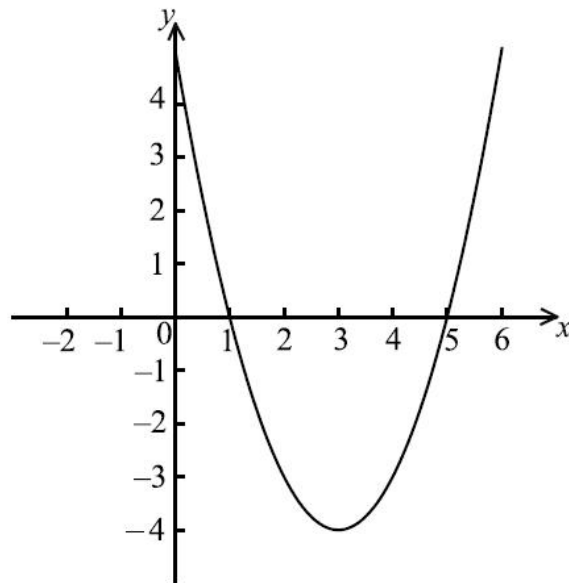
- (a) Calculate the coordinates of P and of Q.

Let  $N_1$  and  $N_2$  be the normals to the curve at P and Q respectively.

- (b) Write down the coordinates of the points where
- (i) the tangent at P intersects  $N_2$ ;
- (ii) the tangent at Q intersects  $N_1$ .

May 07  
P2

The following diagram shows part of the graph of a quadratic function, with equation in the form  $y = (x - p)(x - q)$ , where  $p, q \in \mathbb{Z}$ .



- (a) Write down
  - (i) the value of  $p$  and of  $q$ ;
  - (ii) the equation of the axis of symmetry of the curve.
- (b) Find the equation of the function in the form  $y = (x - h)^2 + k$ , where  $h, k \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Find  $\frac{dy}{dx}$ .
- (d) Let  $T$  be the tangent to the curve at the point  $(0, 5)$ . Find the equation of  $T$ .

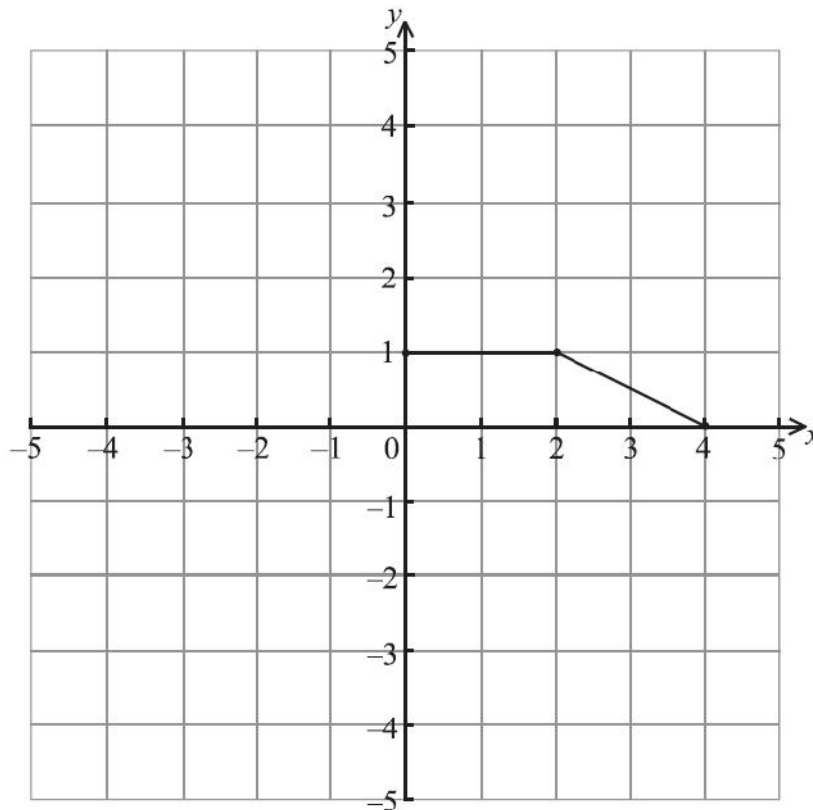
May 07  
P1

Sea  $f(x) = 3\cos 2x + \sin^2 x$ .

- (a) Compruebe que  $f'(x) = -5\sin 2x$ .
- (b) En el intervalo  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ , una normal a la gráfica de  $f$  tiene por ecuación  $x = k$ . Halle el valor de  $k$ .

May 07  
P1

The graph of the function  $y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 4$ , is shown below.



(a) Write down the value of

(i)  $f'(1)$ ;

(ii)  $f'(3)$ .

Nov 07  
P1

The area  $A \text{ km}^2$  affected by a forest fire at time  $t$  hours is given by  $A = A_0 e^{kt}$ .  
When  $t = 5$ , the area affected is  $1 \text{ km}^2$  and the rate of change of the area is  $0.2 \text{ km}^2 \text{ h}^{-1}$ .

(a) Show that  $k = 0.2$ .

(b) Given that  $A_0 = \frac{1}{e}$ , find the value of  $t$  when  $100 \text{ km}^2$  are affected.

Nov 07  
P1

Differentiate each of the following with respect to  $x$ .

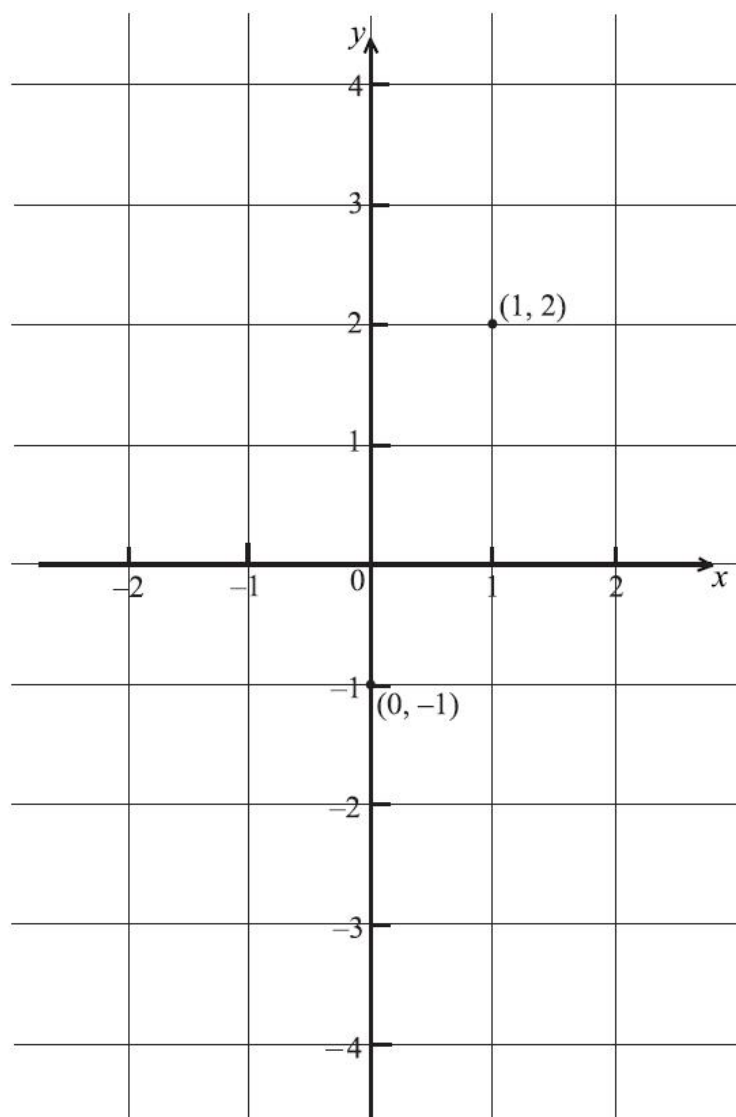
(a)  $y = \sin 3x$

(b)  $y = x \tan x$

(c)  $y = \frac{\ln x}{x}$

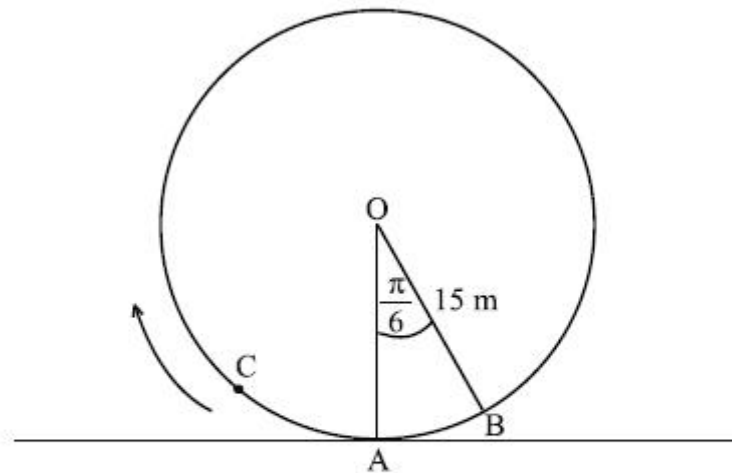
Nov 07  
P1On the axes below, sketch a curve  $y = f(x)$  which satisfies the following conditions.

| $x$             | $f(x)$ | $f'(x)$  | $f''(x)$ |
|-----------------|--------|----------|----------|
| $-2 \leq x < 0$ |        | negative | positive |
| 0               | -1     | 0        | positive |
| $0 < x < 1$     |        | positive | positive |
| 1               | 2      | positive | 0        |
| $1 < x \leq 2$  |        | positive | negative |

Nov 07  
P1Consider the function  $f(x) = 4x^3 + 2x$ . Find the equation of the normal to the curve of  $f$  at the point where  $x = 1$ .

Nov 07  
P2

A Ferris wheel with centre  $O$  and a radius of 15 metres is represented in the diagram below. Initially seat  $A$  is at ground level. The next seat is  $B$ , where  $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ .



- (a) Find the length of the arc  $AB$ .
- (b) Find the area of the sector  $AOB$ .
- (c) The wheel turns clockwise through an angle of  $\frac{2\pi}{3}$ . Find the height of  $A$  above the ground.

The height,  $h$  metres, of seat  $C$  above the ground after  $t$  minutes, can be modelled by the function

$$h(t) = 15 - 15 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

- (d)
  - (i) Find the height of seat  $C$  when  $t = \frac{\pi}{4}$ .
  - (ii) Find the initial height of seat  $C$ .
  - (iii) Find the time at which seat  $C$  first reaches its highest point.
- (e) Find  $h'(t)$ .
- (f) For  $0 \leq t \leq \pi$ ,
  - (i) sketch the graph of  $h'$ ;
  - (ii) find the time at which the height is changing most rapidly.

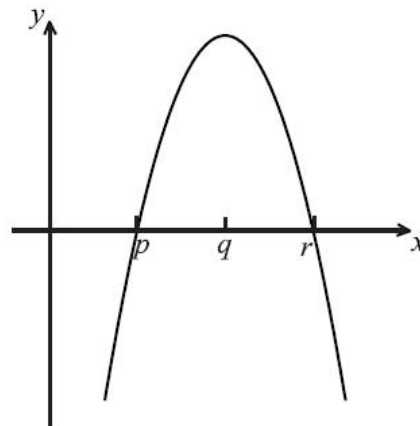
Mayo 08  
P2

Let  $f(x) = 3x - e^{x-2} - 4$ , for  $-1 \leq x \leq 5$ .

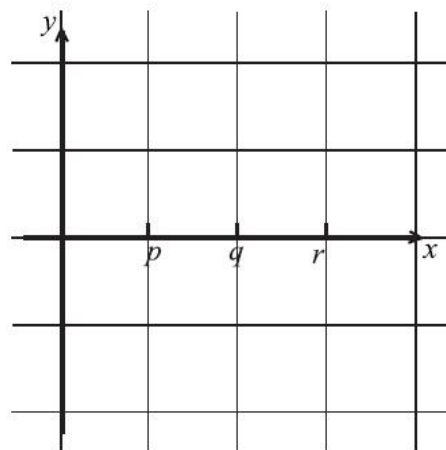
Write down the gradient of the graph of  $f$  at  $x = 2$

Mayo 08  
P1Let  $f : x \mapsto \sin^3 x$ .

- (a) (i) Write down the range of the function  $f$ .
- (ii) Consider  $f(x) = 1$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Write down the number of solutions to this equation. Justify your answer.
- (b) Find  $f'(x)$ , giving your answer in the form  $a \sin^p x \cos^q x$  where  $a, p, q \in \mathbb{Z}$ .

Mayo 08  
P2The diagram below shows part of the graph of the **gradient** function,  $y = f'(x)$ .

- (a) On the grid below, sketch a graph of  $y = f''(x)$ , clearly indicating the  $x$ -intercept.



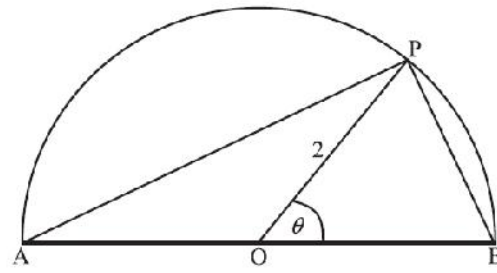
- (b) Complete the table, for the graph of  $y = f(x)$ .

|                             | $x$ -coordinate |
|-----------------------------|-----------------|
| (i) Maximum point on $f$    |                 |
| (ii) Inflexion point on $f$ |                 |

- (c) Justify your answer to part (b)(ii).

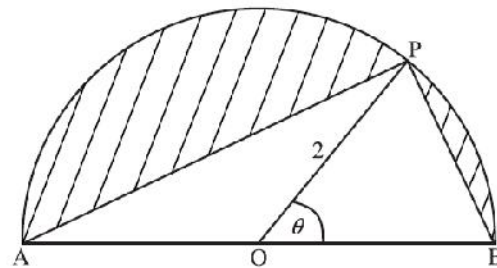
Mayo 08  
P1

The following diagram shows a semicircle centre  $O$ , diameter  $[AB]$ , with radius 2. Let  $P$  be a point on the circumference, with  $\angle POB = \theta$  radians.



- Find the area of the triangle  $OPB$ , in terms of  $\theta$ .
- Explain why the area of triangle  $OPA$  is the same as the area triangle  $OPB$ .

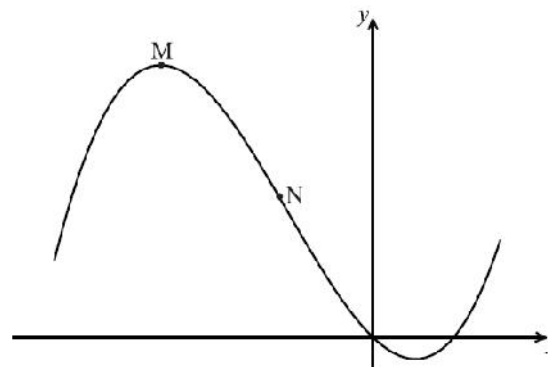
Let  $S$  be the total area of the two segments shaded in the diagram below.



- Show that  $S = 2(\pi - 2\sin \theta)$ .
- Find the value of  $\theta$  when  $S$  is a local minimum, justifying that it is a minimum.
- Find a value of  $\theta$  for which  $S$  has its greatest value.

Mayo 08  
P1

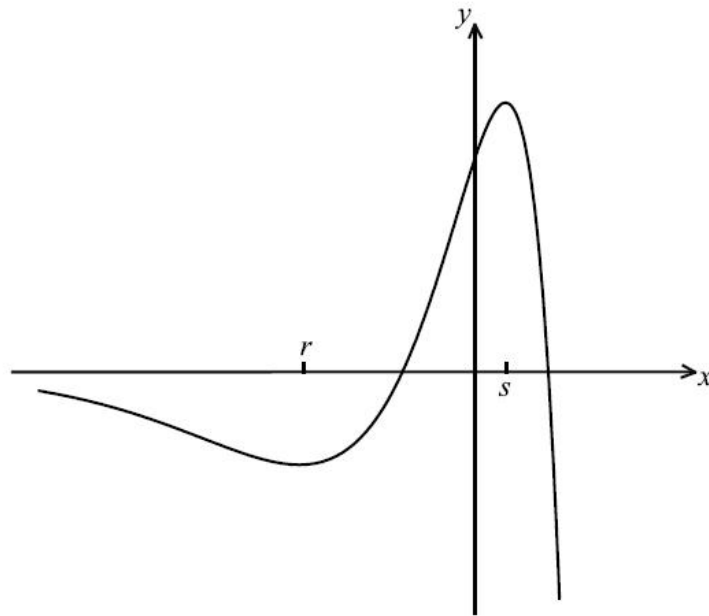
Consider  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$ . Part of the graph of  $f$  is shown below. There is a maximum point at  $M$ , and a point of inflexion at  $N$ .



- Find  $f'(x)$ .
- Find the  $x$ -coordinate of  $M$ .
- Find the  $x$ -coordinate of  $N$ .
- The line  $L$  is the tangent to the curve of  $f$  at  $(3, 12)$ . Find the equation of  $L$  in the form  $y = ax + b$ .

Mayo 08  
P2Let  $f(x) = e^x(1-x^2)$ .(a) Show that  $f'(x) = e^x(1-2x-x^2)$ .

Part of the graph of  $y = f(x)$ , for  $-6 \leq x \leq 2$ , is shown below. The  $x$ -coordinates of the local minimum and maximum points are  $r$  and  $s$  respectively.

(b) Write down the **equation** of the horizontal asymptote.(c) Write down the value of  $r$  and of  $s$ .(d) Let  $L$  be the normal to the curve of  $f$  at  $P(0, 1)$ . Show that  $L$  has equation  $x + y = 1$ .Muestra  
08 P1

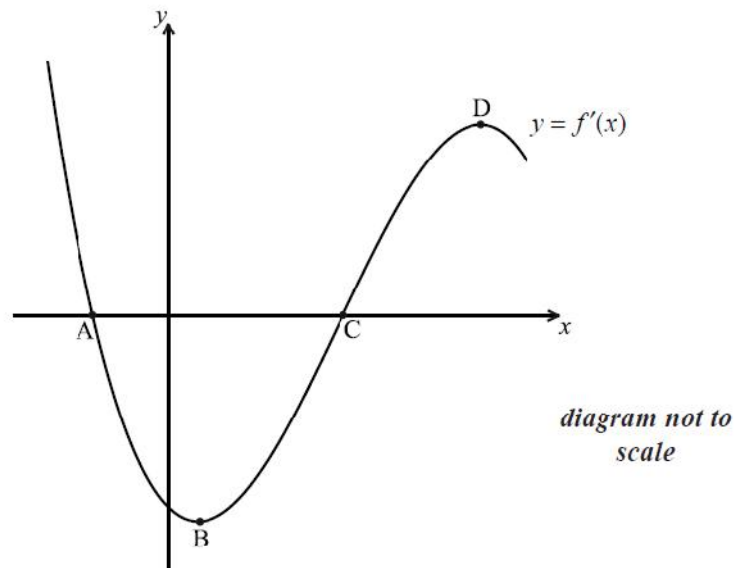
Find the equation of the tangent to the curve  $y = e^{2x}$  at the point where  $x = 1$ .  
Give your answer in terms of  $e^2$ .

Muestra  
08 P1Let  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ .(a) Find the two values of  $x$  at which the tangent to the graph of  $g$  is horizontal.

(b) For each of these values, determine whether it is a maximum or a minimum.

Nov 08  
P2Let  $f(x) = e^{2x} \cos x$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ .(a) Show that  $f'(x) = e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$ .Let the line  $L$  be the normal to the curve of  $f$  at  $x = 0$ .(b) Find the equation of  $L$ .Nov 08  
P1

The diagram shows part of the graph of  $y = f'(x)$ . The  $x$ -intercepts are at points A and C. There is a minimum at B, and a maximum at D.



- (a) (i) Write down the value of  $f'(x)$  at C.
- (ii) **Hence**, show that C corresponds to a minimum on the graph of  $f$ , i.e. it has the same  $x$ -coordinate.
- (b) Which of the points A, B, D corresponds to a maximum on the graph of  $f$ ?
- (c) Show that B corresponds to a point of inflexion on the graph of  $f$ .

Mayo 09  
P2

Considere la curva  $y = \ln(3x - 1)$ . Sea P el punto perteneciente a la curva para el cual  $x = 2$ .

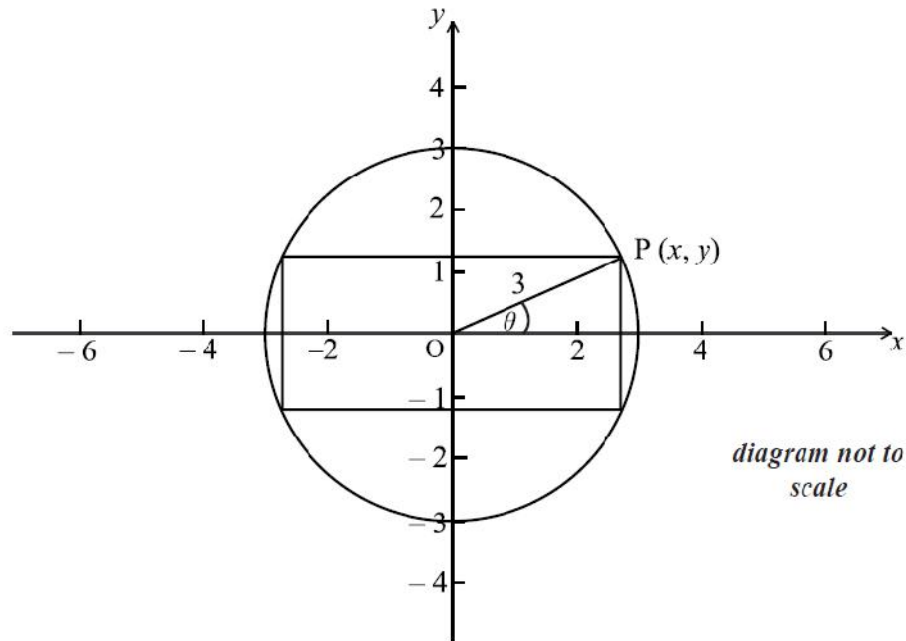
- (a) Escriba la pendiente de la curva en P.
- (b) La normal a la curva en P corta al eje  $x$  en R. Halle las coordenadas de R.

Mayo 09  
P1

Let  $f(x) = e^x \cos x$ . Find the gradient of the normal to the curve of  $f$  at  $x = \pi$

Mayo 09  
P1

A rectangle is inscribed in a circle of radius 3 cm and centre O, as shown below.



The point  $P(x, y)$  is a vertex of the rectangle and also lies on the circle. The angle between  $(OP)$  and the  $x$ -axis is  $\theta$  radians, where  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

(a) Write down an expression in terms of  $\theta$  for

- (i)  $x$ ;
- (ii)  $y$ .

Let the area of the rectangle be  $A$ .

(b) Show that  $A = 18 \sin 2\theta$ .

(c) (i) Find  $\frac{dA}{d\theta}$ .

(ii) Hence, find the exact value of  $\theta$  which maximizes the area of the rectangle.

(iii) Use the second derivative to justify that this value of  $\theta$  does give a maximum.

Mayo 09  
P1

Una función  $f$  tiene como derivada primera  $f'(x) = (x-3)^3$ .

(a) Halle la derivada segunda.

(b) Halle  $f'(3)$  y  $f''(3)$ .

(c) El punto P pertenece a la gráfica de  $f$  y su coordenada  $x$  es 3. Explique por qué P no es un punto de inflexión.

Mayo 09  
P2

Let  $f(x) = x^3 - 4x + 1$ .

- Expand  $(x+h)^3$ .
- Use the formula  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  to show that the derivative of  $f(x)$  is  $3x^2 - 4$ .
- The tangent to the curve of  $f$  at the point  $P(1, -2)$  is parallel to the tangent at a point  $Q$ . Find the coordinates of  $Q$ .
- The graph of  $f$  is decreasing for  $p < x < q$ . Find the value of  $p$  and of  $q$ .
- Write down the range of values for the gradient of  $f$ .

Mayo 09  
P1

Sean  $f(x) = e^{-3x}$  y  $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

- Escriba
  - $f'(x)$ ;
  - $g'(x)$ .
- Sea  $h(x) = e^{-3x} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Halle el valor exacto de  $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

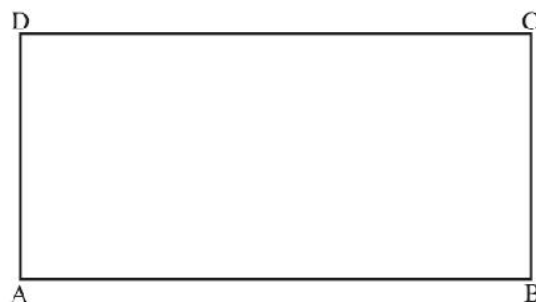
Nov 09  
P1

Consider  $f(x) = x^2 + \frac{p}{x}$ ,  $x \neq 0$ , where  $p$  is a constant.

- Find  $f'(x)$ .
- There is a minimum value of  $f(x)$  when  $x = -2$ . Find the value of  $p$ .

Nov 09  
P2

A farmer wishes to create a rectangular enclosure,  $ABCD$ , of area  $525 \text{ m}^2$ , as shown below.



The fencing used for side  $AB$  costs \$11 per metre. The fencing for the other three sides costs \$3 per metre. The farmer creates an enclosure so that the cost is a minimum. Find this minimum cost.

Nov 09  
P2

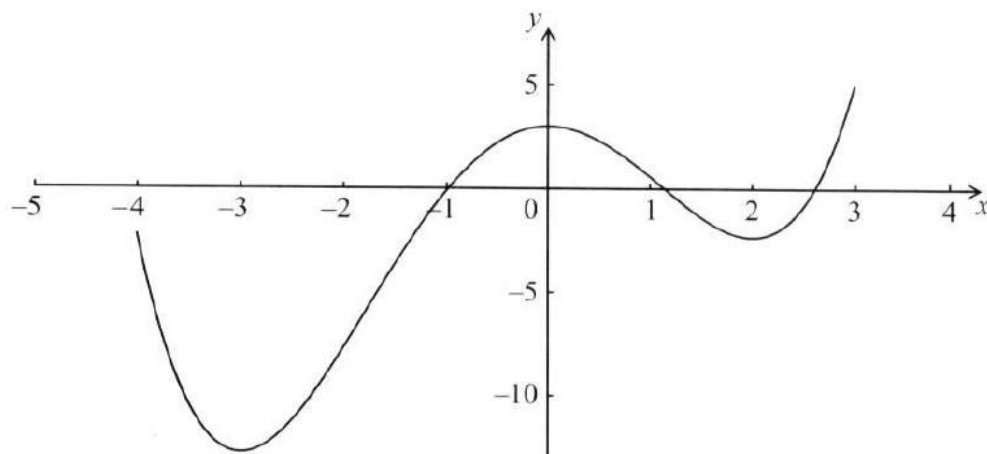
Consider the curve with equation  $f(x) = px^2 + qx$ , where  $p$  and  $q$  are constants. The point  $A(1, 3)$  lies on the curve. The tangent to the curve at  $A$  has gradient 8. Find the value of  $p$  and of  $q$ .

Nov 09  
P2Let  $f(x) = \cos 2x$  and  $g(x) = \ln(3x-5)$ .

- (a) Find  $f'(x)$ .
- (b) Find  $g'(x)$ .
- (c) Let  $h(x) = f(x) \times g(x)$ . Find  $h'(x)$ .

Mayo 10  
TZ2  
P1#7

Una función  $f$  está definida en el intervalo  $-4 \leq x \leq 3$ . A continuación se muestra la gráfica de  $f$ .



La gráfica presenta un máximo local para  $x = 0$ , y mínimos locales para  $x = -3$ ,  $x = 2$ .

- (a) Escriba las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de la función **derivada**,  $f'$ .
- (b) Escriba todos los valores de  $x$  para los cuales  $f'(x)$  es positiva.
- (c) En el punto D, perteneciente a la gráfica de  $f$ , la coordenada  $x$  es  $-0,5$ . Explique por qué en el punto D  $f''(x) < 0$ .

Mayo 10  
TZ2  
P1#5

Sea  $f(x) = kx^4$ . El punto  $P(1, k)$  pertenece a la curva de  $f$ . En P, la recta normal a la curva es paralela a  $y = -\frac{1}{8}x$ . Halle el valor de  $k$ .

Mayo 10  
TZ2  
P1#8

Considere la función  $f$ , cuya derivada segunda es  $f''(x) = 3x - 1$ . La gráfica de  $f$  tiene un punto mínimo en  $A(2, 4)$  y un punto máximo en  $B\left(-\frac{4}{3}, \frac{358}{27}\right)$ .

- (a) Utilice la derivada segunda para justificar que B es un máximo.
- (b) Sabiendo que  $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + p$ , compruebe que  $p = -4$ .
- (c) Halle  $f(x)$ .

Mayo 10  
TZ1  
P1#9

Let  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ , for  $\sin x \neq 0$ .

- (a) Use the quotient rule to show that  $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ .
- (b) Find  $f''(x)$ .

In the following table,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = p$  and  $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = q$ . The table also gives approximate values of  $f'(x)$  and  $f''(x)$  near  $x = \frac{\pi}{2}$ .

| $x$      | $\frac{\pi}{2} - 0.1$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} + 0.1$ |
|----------|-----------------------|-----------------|-----------------------|
| $f'(x)$  | -1.01                 | $p$             | -1.01                 |
| $f''(x)$ | 0.203                 | $q$             | -0.203                |

- (c) Find the value of  $p$  and of  $q$ .
- (d) Use information from the table to explain why there is a point of inflexion on the graph of  $f$  where  $x = \frac{\pi}{2}$ .

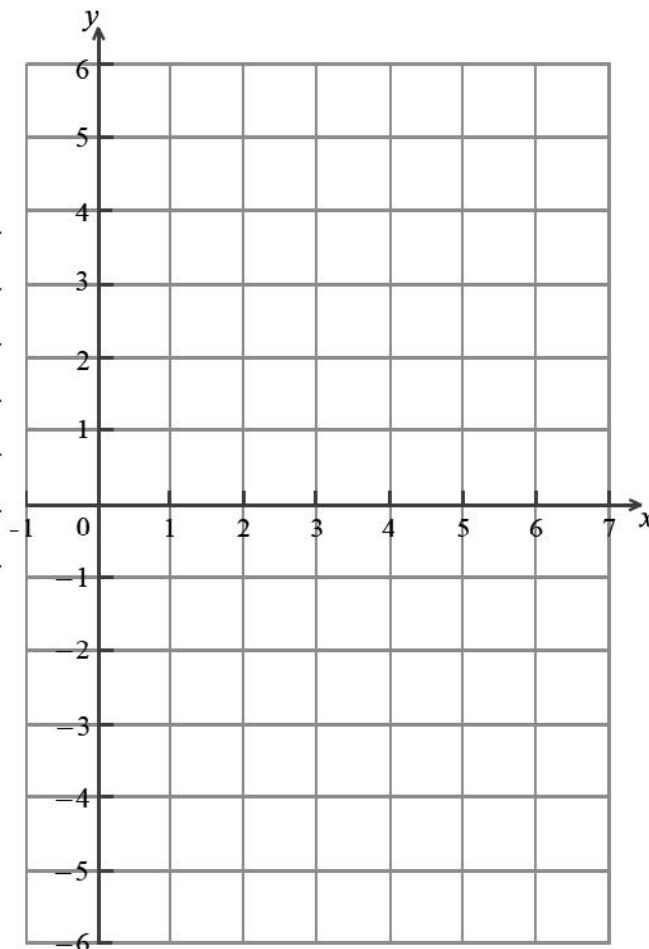
Mayo 10  
TZ1  
P2#3

Let  $f(x) = x \cos x$ , for  $0 \leq x \leq 6$ .

- (a) Find  $f'(x)$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

- (b) On the grid below, sketch the graph of  $y = f'(x)$ .



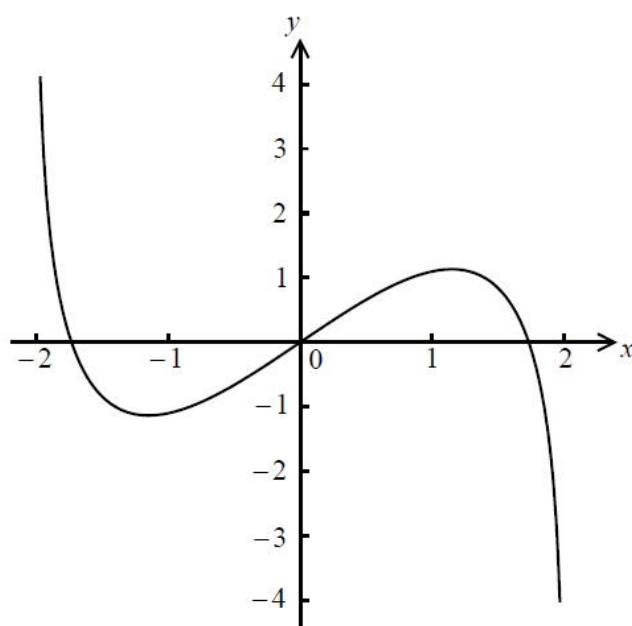
Mayo 10  
TZ2  
P2#7

El número  $n$  de bacterias que hay en un plato en el instante  $t$  minutos viene dado por  $n = 800e^{0,13t}$ .

- Halle el valor de  $n$  para  $t = 0$ .
- Halle la tasa de variación a la que está aumentando  $n$  en el instante  $t = 15$ .
- Transcurridos  $k$  minutos, la tasa de incremento de  $n$  es mayor que 10 000 bacterias por minuto. Halle el valor mínimo de  $k$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Mayo 10  
TZ2  
P2#10

Considere  $f(x) = x \ln(4 - x^2)$ , para  $-2 < x < 2$ . A continuación se muestra la gráfica de  $f$ .



- Sean P y Q puntos pertenecientes a la curva de  $f$  en los cuales la tangente a la gráfica de  $f$  es paralela al eje  $x$ .
  - Halle la coordenada  $x$  de P y de Q.
  - Considere  $f(x) = k$ . Escriba todos los valores de  $k$  para los cuales existen exactamente dos soluciones.

Sea  $g(x) = x^3 \ln(4 - x^2)$ , para  $-2 < x < 2$ .

- Compruebe que  $g'(x) = \frac{-2x^4}{4 - x^2} + 3x^2 \ln(4 - x^2)$ .
- Dibuje aproximadamente la gráfica de  $g'$ .
- Considere  $g'(x) = w$ . Escriba todos los valores de  $w$  para los cuales existen exactamente dos soluciones.

Nov 10  
P1#2Sea  $g(x) = 2x \sin x$ .

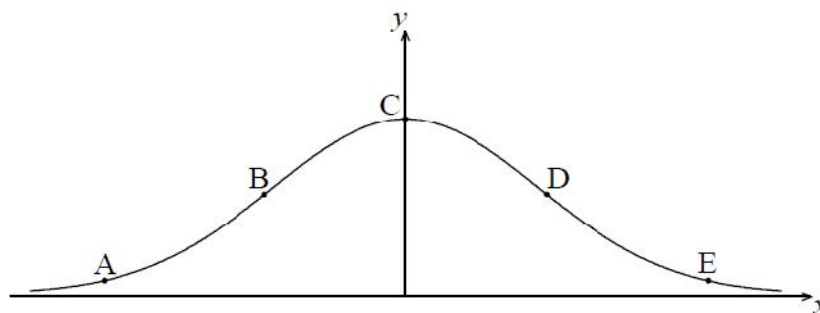
- (a) Halle  $g'(x)$ .
- (b) Halle la pendiente de la gráfica de  $g$  para  $x = \pi$ .

Nov 10  
P2#7Sea  $f'(x) = -24x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ .

- (a) En la gráfica de  $f$  hay dos puntos de inflexión. Escriba las coordenadas  $x$  de estos puntos.
- (b) Sea  $g(x) = f''(x)$ . Explique por qué en la gráfica de  $g$  no hay ningún punto de inflexión.

Mayo 11  
TZ1  
P1#5Let  $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , for  $x > 0$ .

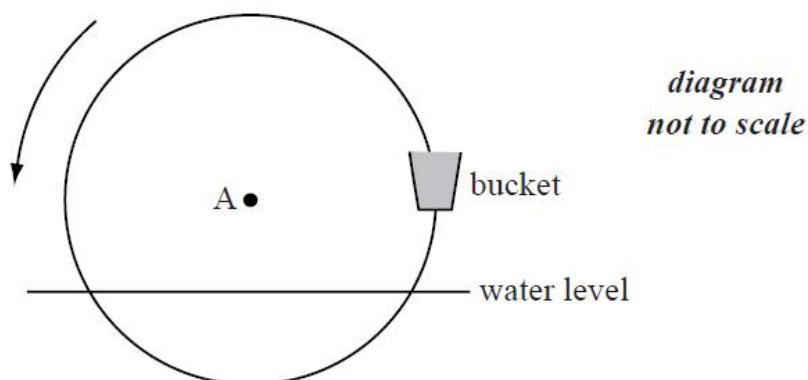
- (a) Use the quotient rule to show that  $g'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ .
- (b) The graph of  $g$  has a maximum point at A. Find the  $x$ -coordinate of A.

Mayo 11  
TZ2  
P1#4Sea  $h(x) = \frac{6x}{\cos x}$ . Halle  $h'(0)$ .Mayo 11  
TZ1  
P2#9The following diagram shows the graph of  $f(x) = e^{-x^2}$ .The points A, B, C, D and E lie on the graph of  $f$ . Two of these are points of inflexion.

- (a) Identify the **two** points of inflexion.
- (b) (i) Find  $f'(x)$ .
- (ii) Show that  $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ .
- (c) Find the  $x$ -coordinate of each point of inflexion.
- (d) Use the second derivative to show that one of these points is a point of inflexion.

Mayo 11  
TZ1  
P2#8

The following diagram shows a waterwheel with a bucket. The wheel rotates at a constant rate in an anticlockwise (counterclockwise) direction.



The diameter of the wheel is 8 metres. The centre of the wheel, A, is 2 metres above the water level. After  $t$  seconds, the height of the bucket above the water level is given by  $h = a \sin bt + 2$ .

(a) Show that  $a = 4$ .

The wheel turns at a rate of one rotation every 30 seconds.

(b) Show that  $b = \frac{\pi}{15}$ .

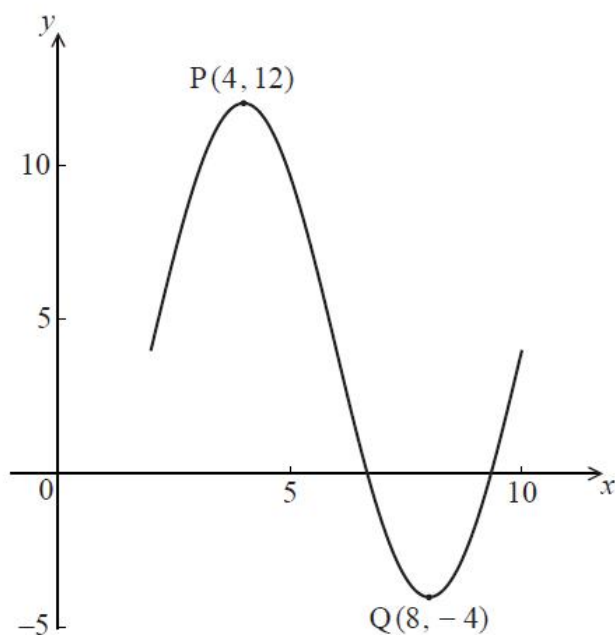
In the first rotation, there are two values of  $t$  when the bucket is **descending** at a rate of  $0.5 \text{ ms}^{-1}$ .

(c) Find these values of  $t$ .

(d) Determine whether the bucket is underwater at the second value of  $t$ .

Nov 11  
P1#9

La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de  $f(x) = a \operatorname{sen}(b(x-c)) + d$  para  $2 \leq x \leq 10$ .



Hay un máximo en  $P(4, 12)$  y un mínimo en  $Q(8, -4)$ .

(a) Utilice la gráfica para escribir el valor de:

(i)  $a$ ;

(ii)  $c$ ;

(iii)  $d$ .

(b) Compruebe que  $b = \frac{\pi}{4}$ .

(c) Halle  $f'(x)$ .

(d) En el punto R, la pendiente es igual a  $-2\pi$ . Halle la coordenada  $x$  de R.

Nov 11

P2#10

Sea  $f(x) = \frac{20x}{e^{0,3x}}$ , para  $0 \leq x \leq 20$ .

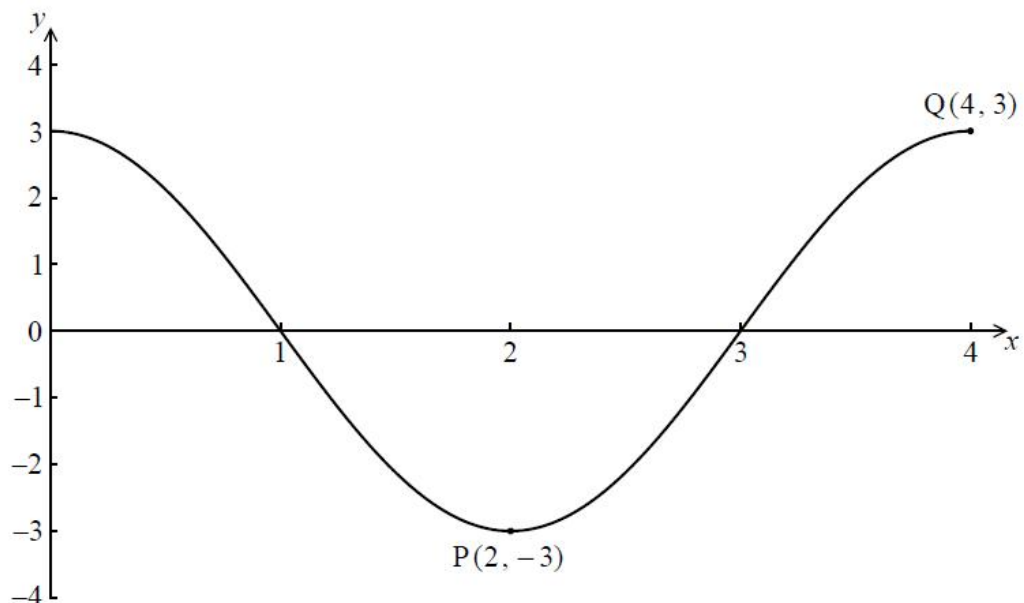
- (a) Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f$ .
- (b) (i) Escriba la coordenada  $x$  del punto máximo en la gráfica de  $f$ .
- (ii) Escriba el intervalo en el cual  $f$  es creciente.
- (c) Compruebe que  $f'(x) = \frac{20-6x}{e^{0,3x}}$ .
- (d) Halle el intervalo en el cual la razón de cambio de  $f$  es creciente.

Mayo 12

TZ2

P1#3

La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de  $f(x) = a \cos(bx)$ , para  $0 \leq x \leq 4$ .



Hay un mínimo en  $P(2, -3)$  y un máximo en  $Q(4, 3)$ .

- (a) (i) Escriba el valor de  $a$ .
- (ii) Halle el valor de  $b$ .
- (b) Escriba la pendiente de la curva en  $P$ .
- (c) Escriba la ecuación de la normal a la curva en  $P$ .

Mayo 12  
TZ1  
P1#3

Let  $f(x) = e^{6x}$ .

(a) Write down  $f'(x)$ .

The tangent to the graph of  $f$  at the point  $P(0, b)$  has gradient  $m$ .

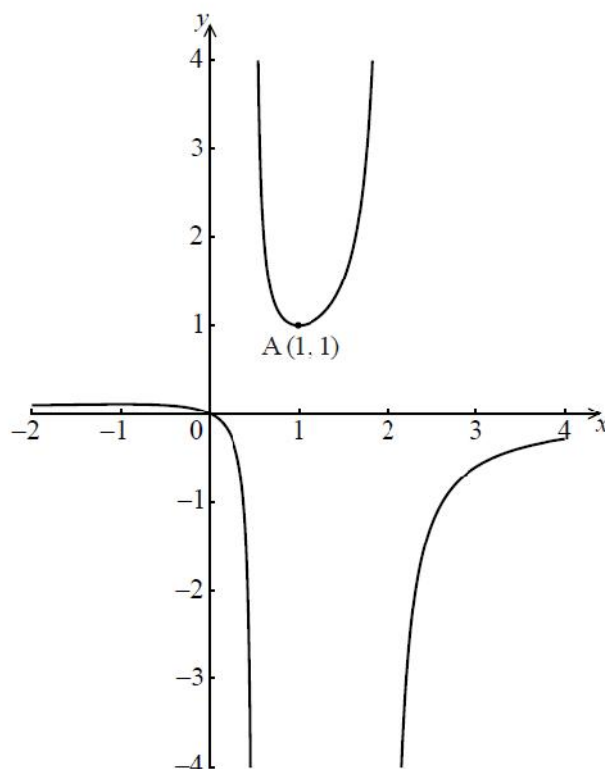
(b) (i) Show that  $m = 6$ .

(ii) Find  $b$ .

(c) Hence, write down the equation of this tangent.

Mayo 12  
TZ2  
P1#10

Sea  $f(x) = \frac{x}{-2x^2 + 5x - 2}$ , para  $-2 \leq x \leq 4$ ,  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $x \neq 2$ . A continuación se muestra la gráfica de  $f$ .



La gráfica de  $f$  presenta un mínimo local en  $A(1, 1)$  y un máximo local en B.

(a) Utilice la regla del cociente para comprobar que  $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(-2x^2 + 5x - 2)^2}$ .

(b) A partir de lo anterior, halle las coordenadas de B.

(c) Sabiendo que la recta  $y = k$  no corta a la gráfica de  $f$ , halle los posibles valores de  $k$ .

Mayo 12

TZ2

P2#2

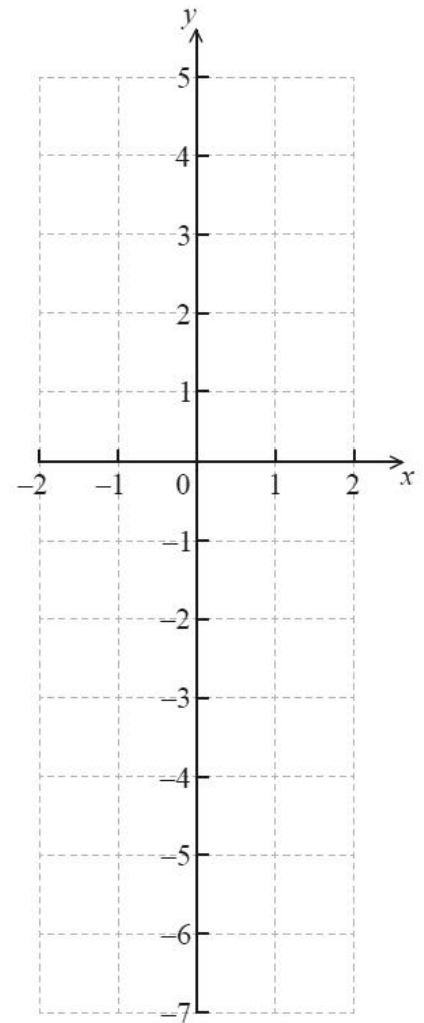
Sea  $f(x) = \cos(e^x)$ , para  $-2 \leq x \leq 2$ .(a) Halle  $f'(x)$ .

.....

.....

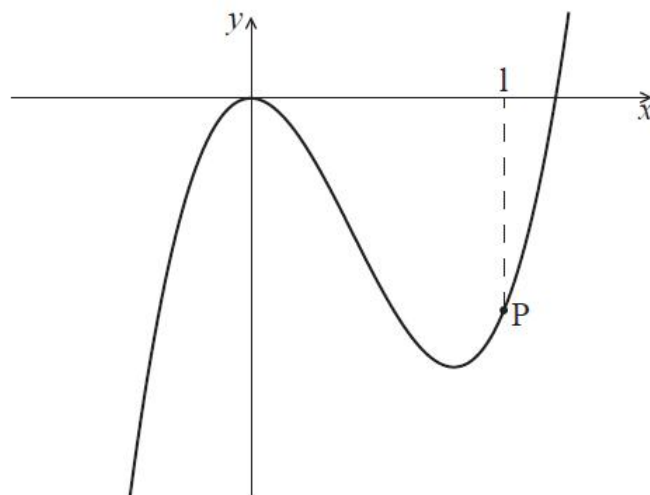
.....

.....

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f'(x)$  en la cuadrícula que aparece a continuación.

Nov 12

P1#4

A continuación se muestra una parte de la gráfica de  $f(x) = ax^3 - 6x^2$ .El punto P pertenece a la gráfica de  $f$ . En P,  $x = 1$ .(a) Halle  $f'(x)$ .(b) En el punto P, la pendiente de la gráfica de  $f$  es igual a 3. Halle el valor de  $a$ .

Mayo 12  
TZ2  
P2#9

Sea  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. La gráfica de  $f$  pasa por el punto  $(2, 9)$ .

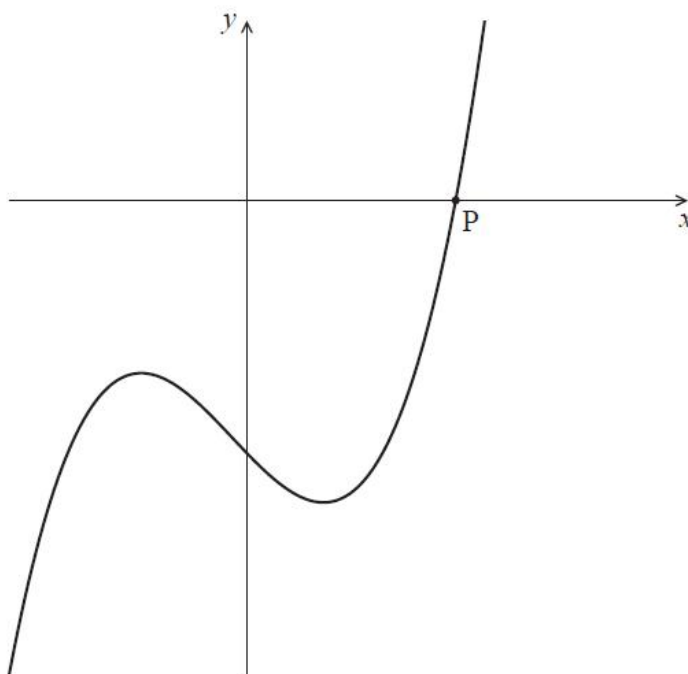
- (a) Compruebe que  $8a + 4b + c = 9$ .

La gráfica de  $f$  presenta un mínimo local en  $(1, 4)$ .

- (b) Halle otras dos ecuaciones que relacionen  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; exprese sus respuestas de una forma similar a la del apartado (a).
- (c) Halle el valor de  $a$ , el de  $b$  y el de  $c$ .

Nov 12  
P2#3

Sea  $f(x) = x^3 - 2x - 4$ . La figura que aparece a continuación muestra una parte de la curva de  $f$ .



La curva corta al eje  $x$  en el punto P.

- (a) Escriba la coordenada  $x$  de P.
- (b) Escriba la pendiente de la curva en P.
- (c) Halle la ecuación de la normal a la curva en P; exprese la ecuación de la forma  $y = ax + b$ .

Mayo 13  
TZ1  
P1#3

Consider  $f(x) = x^2 \sin x$ .

- (a) Find  $f'(x)$ .
- (b) Find the gradient of the curve of  $f$  at  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Mayo 13  
TZ1  
P1#10

Consider  $f(x) = \ln(x^4 + 1)$ .

- (a) Find the value of  $f(0)$ .
- (b) Find the set of values of  $x$  for which  $f$  is increasing.

The second derivative is given by  $f''(x) = \frac{4x^2(3 - x^4)}{(x^4 + 1)^2}$ .

The equation  $f''(x) = 0$  has only three solutions, when  $x = 0, \pm\sqrt[4]{3}$  ( $\pm 1.316\dots$ ).

- (c) (i) Find  $f''(1)$ .
- (ii) **Hence**, show that there is no point of inflexion on the graph of  $f$  at  $x = 0$ .
- (d) There is a point of inflexion on the graph of  $f$  at  $x = \sqrt[4]{3}$  ( $x = 1.316\dots$ ). Sketch the graph of  $f$ , for  $x \geq 0$ .

Mayo 13  
TZ2  
P1#9

Sea  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ .

- (a) Halle  $f'(x)$ .

Sea  $g$  una función cuadrática tal que  $g(0) = 5$ . La recta  $x = 2$  es el eje de simetría de la gráfica de  $g$ .

- (b) Halle  $g(4)$ .

La función  $g$  se puede expresar de la forma  $g(x) = a(x - h)^2 + 3$ .

- (c) (i) Escriba el valor de  $h$ .
- (ii) Halle el valor de  $a$ .
- (d) Halle el valor de  $x$  para el cual la tangente a la gráfica de  $f$  es paralela a la tangente a la gráfica de  $g$ .

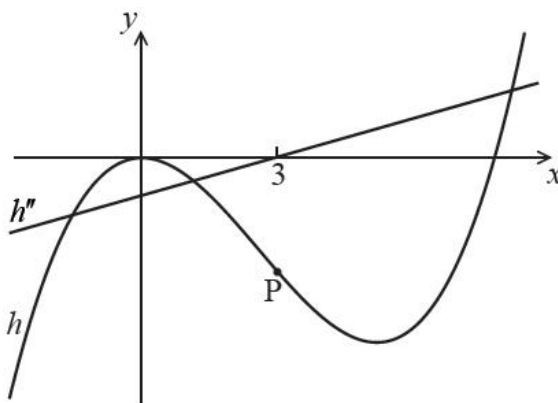
Mayo 13  
TZ2  
P1#10

Considere las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$ . La siguiente tabla muestra algunos valores asociados a estas funciones.

|          |     |     |
|----------|-----|-----|
| $x$      | 2   | 3   |
| $f(x)$   | 2   | 3   |
| $g(x)$   | -14 | -18 |
| $f'(x)$  | 1   | 1   |
| $g'(x)$  | -5  | -3  |
| $h''(x)$ | -6  | 0   |

- (a) Escriba el valor de  $g(3)$ , de  $f'(3)$ , y de  $h''(2)$ .

La siguiente figura muestra una parte de las gráficas de  $h$  y  $h''$ .



En la gráfica de  $h$  hay un punto de inflexión en P, para  $x = 3$ .

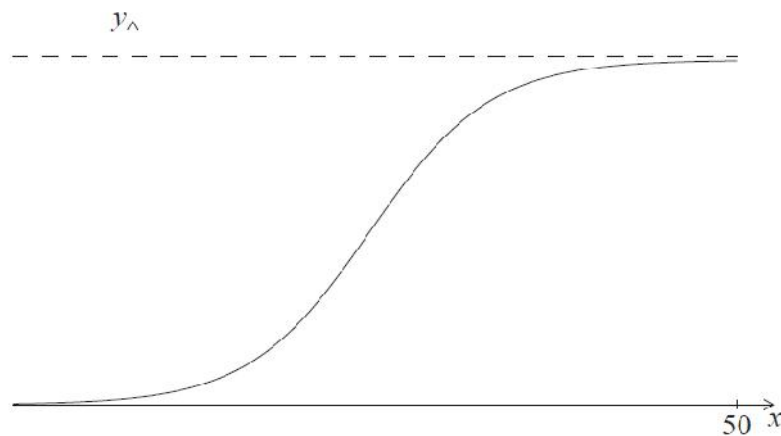
- (b) Explique por qué P es un punto de inflexión.

Sabiendo que  $h(x) = f(x) \times g(x)$ ,

- (c) halle la coordenada y de P;  
(d) halle la ecuación de la normal a la gráfica de  $h$  en P.

Mayo 13  
TZ1  
P2#9

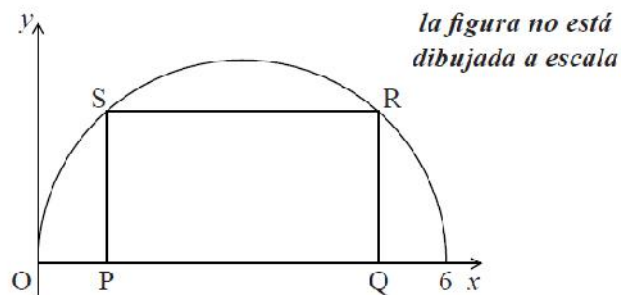
Let  $f(x) = \frac{100}{(1 + 50e^{-0.2x})}$ . Part of the graph of  $f$  is shown below.



- Write down  $f(0)$ .
- Solve  $f(x) = 95$ .
- Find the range of  $f$ .
- Show that  $f'(x) = \frac{1000e^{0.2x}}{(1 + 50e^{-0.2x})^2}$ .
- Find the maximum rate of change of  $f$ .

Nov 13  
P2#7

Considere la gráfica del semicírculo cuya ecuación es  $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ , para  $0 \leq x \leq 6$ . Se dibuja un rectángulo PQRS, de modo tal que R y S pertenecen a la gráfica de  $f$ , y PQ está situado sobre el eje  $x$ , tal y como se muestra en la siguiente figura.



- Sea  $OP = x$ .
  - Halle PQ en función de  $x$ .
  - A partir de lo anterior, escriba una expresión para el área del rectángulo en función de  $x$ .
- Halle la razón de cambio del área para  $x = 2$ .
  - El área es decreciente para  $a < x < b$ . Halle el valor de  $a$  y el de  $b$ .

Nov 13

P1#6

Sea  $f(x) = e^{2x}$ . La recta  $L$  es la tangente a la curva de  $f$  en  $(1, e^2)$ .

Halle la ecuación de  $L$  en la forma  $y = ax + b$ .

Muestra

14

P1#7

Given that  $f(x) = \frac{1}{x}$ , answer the following.

(a) Find the first four derivatives of  $f(x)$ .

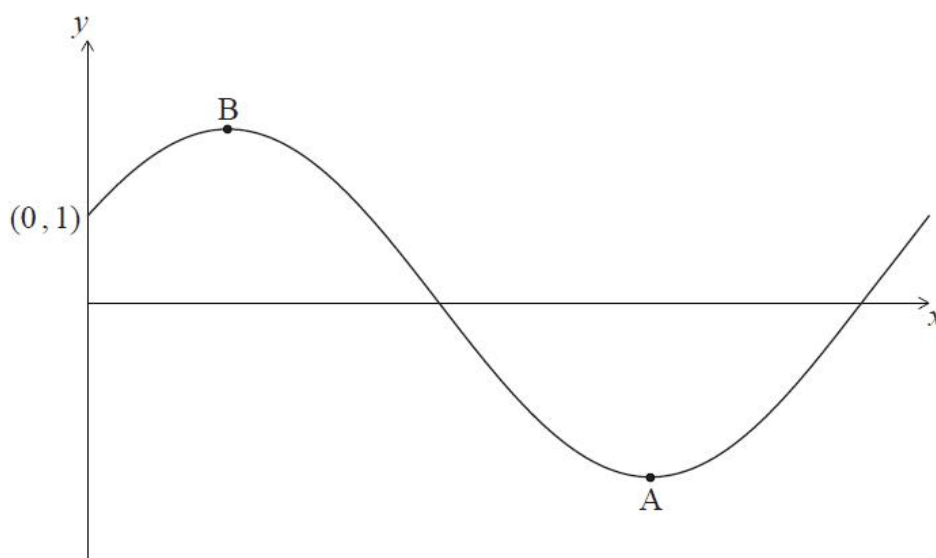
(b) Write an expression for  $f^{(n)}(x)$  in terms of  $x$  and  $n$ .

Muestra

14

P1#10

Let  $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ . The following diagram shows the graph of  $f$ .



The  $y$ -intercept is at  $(0, 1)$ , there is a minimum point at  $A(p, q)$  and a maximum point at  $B$ .

(a) Find  $f'(x)$ .

(b) Hence

(i) show that  $q = -2$ ;

(ii) verify that  $A$  is a minimum point.

(c) Find the maximum value of  $f(x)$ .

The function  $f(x)$  can be written in the form  $r \cos(x - a)$ .

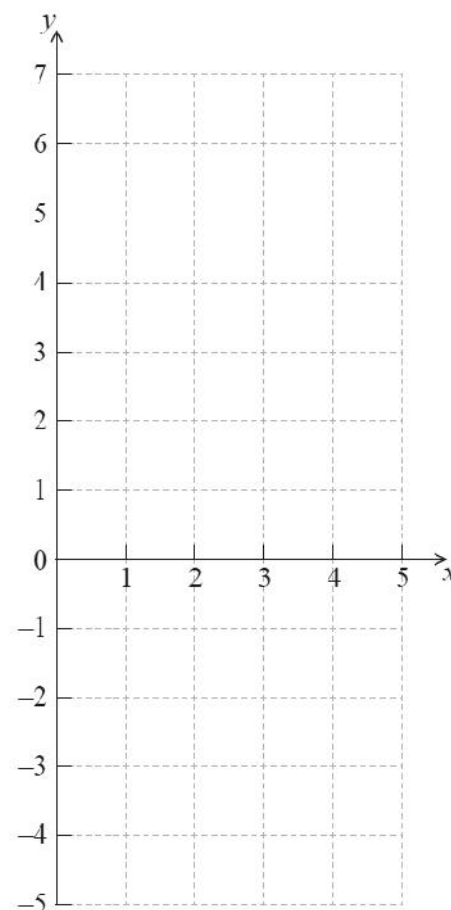
(d) Write down the value of  $r$  and of  $a$ .

**Muestra  
14**

**P2#2**

Let  $f(x) = 4x - e^{x-2} - 3$ , for  $0 \leq x \leq 5$ .

- Find the  $x$ -intercepts of the graph of  $f$ .
- On the grid below, sketch the graph of  $f$ .
- Write down the gradient of the graph of  $f$  at  $x = 3$ .



**Mayo 14  
TZ1  
P1#7**

Let  $f(x) = px^3 + px^2 + qx$ .

- Find  $f'(x)$ .
- Given that  $f'(x) \geq 0$ , show that  $p^2 \leq 3pq$ .

**Mayo 14  
TZ1  
P2#10**

Let  $f(x) = \frac{3x}{x-q}$ , where  $x \neq q$ .

- Write down the equations of the vertical and horizontal asymptotes of the graph of  $f$ .

The vertical and horizontal asymptotes to the graph of  $f$  intersect at the point  $Q(1, 3)$ .

- Find the value of  $q$ .

- The point  $P(x, y)$  lies on the graph of  $f$ . Show that  $PQ = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{3}{x-1}\right)^2}$ .

- Hence find the coordinates of the points on the graph of  $f$  that are closest to  $(1, 3)$ .

**Mayo 14  
TZ1  
P2#7**

Let  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ , where  $g(2) = 18$ ,  $h(2) = 6$ ,  $g'(2) = 5$ , and  $h'(2) = 2$ . Find the equation of the normal to the graph of  $f$  at  $x = 2$ .

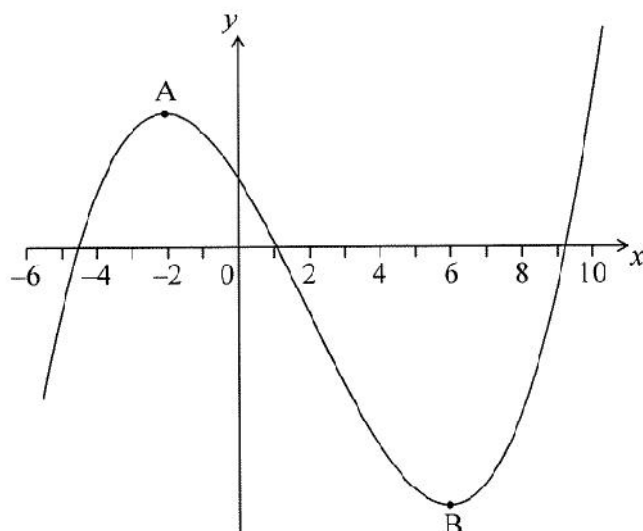
Mayo 14  
TZ1  
P2#5

The population of deer in an enclosed game reserve is modelled by the function  $P(t) = 210\sin(0.5t - 2.6) + 990$ , where  $t$  is in months, and  $t = 1$  corresponds to 1 January 2014.

- (a) Find the number of deer in the reserve on 1 May 2014.
- (b) (i) Find the rate of change of the deer population on 1 May 2014.
- (ii) Interpret the answer to part (i) with reference to the deer population size on 1 May 2014.

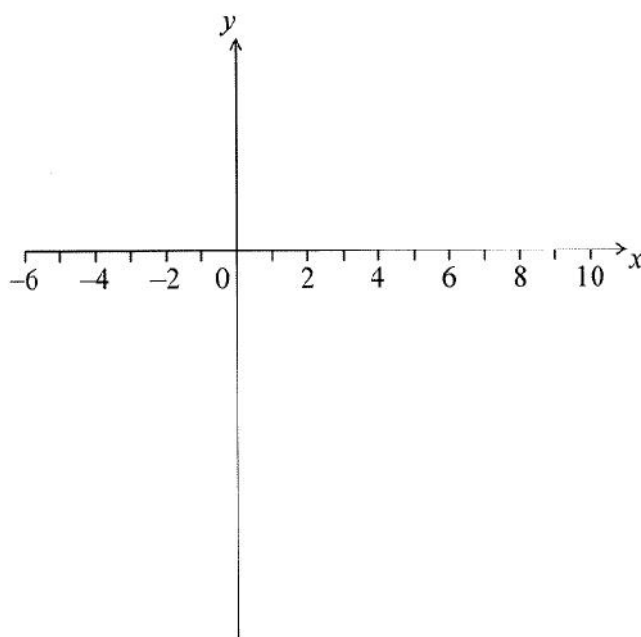
Mayo 14  
TZ2  
P1#6

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de  $y = f(x)$ .



El gráfico tiene un máximo local en A, donde  $x = -2$ , y un mínimo local en B, donde  $x = 6$ .

- (a) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = f'(x)$ .



- (b) Escriba las siguientes expresiones ordenándolas de menor a mayor:  $f(0)$ ,  $f'(6)$ ,  $f''(-2)$ .

Nov 14

P1#5

Sea  $f(x) = p + \frac{9}{x-q}$ , para  $x \neq q$ . La recta  $x = 3$  es una asíntota vertical al gráfico de  $f$ .

(a) Escriba el valor de  $q$ .

El gráfico de  $f$  tiene una intersección con el eje  $y$  en  $(0, 4)$ .

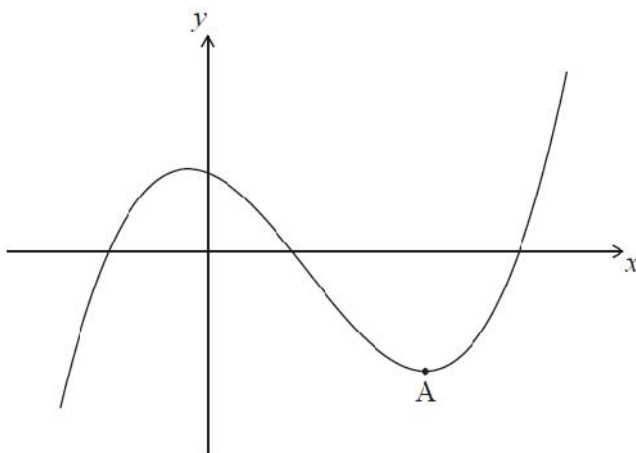
(b) Halle el valor de  $p$ .

(c) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal del gráfico de  $f$ .

Nov 14

P1#9

La siguiente figura muestra el gráfico de la función  $f$ . Hay un punto mínimo local en A, donde  $x > 0$ .



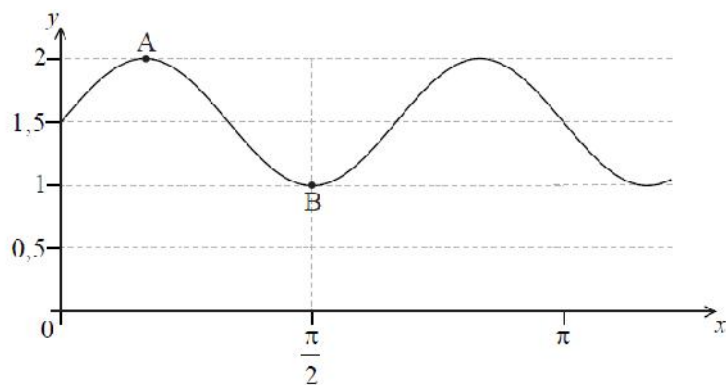
La derivada de  $f$  viene dada por  $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$ .

(a) Halle la coordenada  $x$  de A.

(b) La intersección del gráfico con el eje  $y$  está en  $(0, 6)$ . Halle una expresión para  $f(x)$ .

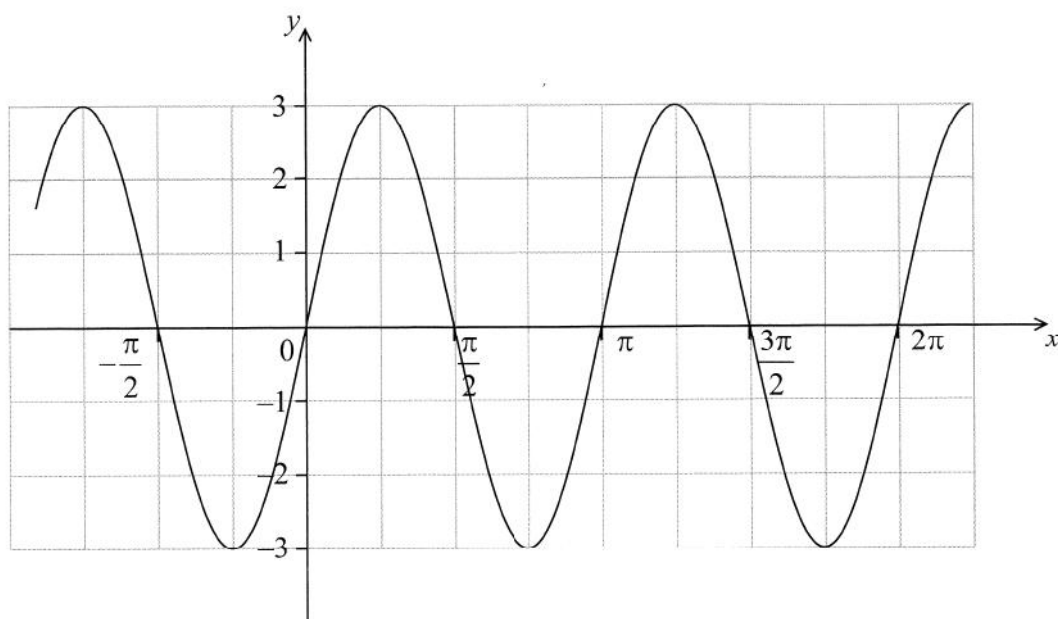
El gráfico de una función  $g$  se obtiene realizando una simetría del gráfico de  $f$  respecto al eje  $y$ , seguida de una traslación por el vector  $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ .

(c) Halle la coordenada  $x$  del punto mínimo local del gráfico de  $g$ .

Nov 14  
P2#5La siguiente figura muestra una parte del gráfico de  $y = p \operatorname{sen}(qx) + r$ .

El punto  $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$  es un punto máximo y el punto  $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  es un punto mínimo.  
Halle el valor de

- (a)  $p$ ;
- (b)  $r$ ;
- (c)  $q$ .

Mayo 15  
TZ2  
P1#2Sea  $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ , donde  $b > 0$ . La siguiente figura muestra una parte del gráfico de  $f$ .

- (a) (i) Halle el período de  $f$ .
- (ii) Escriba la amplitud de  $f$ .
- (b) (i) Escriba el valor de  $a$ .
- (ii) Halle el valor de  $b$ .

Mayo 15  
TZ2  
P1#5

Sea  $f(x) = e^{-2x}$ .

(a) Escriba  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  y  $f^{(3)}(x)$ .

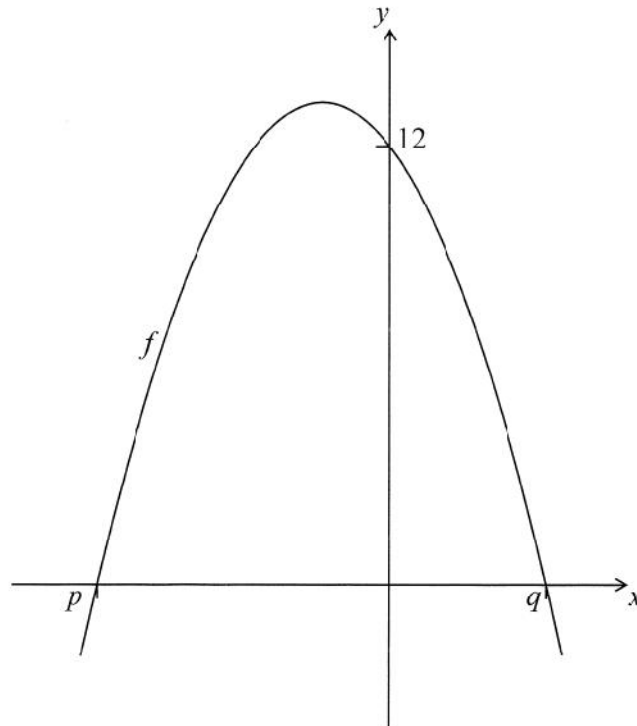
(b) Halle una expresión para  $f^{(n)}(x)$ .

Mayo 15  
TZ2  
P1#7

Sea  $f(x) = ax^3 + bx$ . En  $x = 0$ , la pendiente de la curva de  $f$  es igual a 3. Sabiendo que  $f^{-1}(7) = 1$ , halle el valor de  $a$  y el de  $b$ .

Mayo 15  
TZ2  
P1#8

Sea  $f(x) = a(x+3)(x-1)$ . La siguiente figura muestra una parte del gráfico de  $f$ .



El gráfico tiene intersecciones con el eje  $x$  en  $(p, 0)$  y  $(q, 0)$  y una intersección con el eje  $y$  en  $(0, 12)$ .

(a) (i) Escriba el valor de  $p$  y el de  $q$ .

(ii) Halle el valor de  $a$ .

(b) Halle la ecuación del eje de simetría del gráfico de  $f$ .

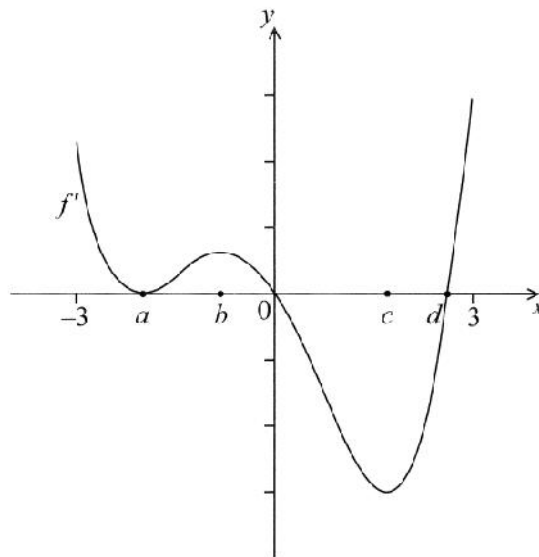
(c) Halle el mayor valor de  $f$ .

La función  $f$  también se puede escribir de la forma  $f(x) = a(x-h)^2 + k$ .

(d) Halle el valor de  $h$  y el de  $k$ .

Mayo 15  
TZ2  
P1#10

Considere una función  $f$  cuyo dominio sea  $-3 < x < 3$ . La siguiente figura muestra el gráfico de  $f'$ , la derivada de  $f$ .

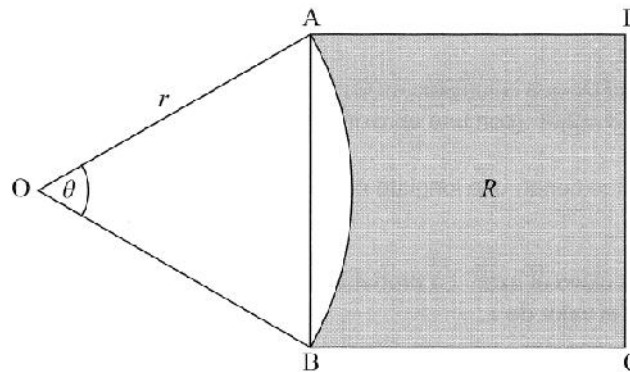


El gráfico de  $f'$  tiene puntos de intersección con el eje  $x$  en  $x=a$ ,  $x=0$ , y  $x=d$ . Hay un máximo local en  $x=b$  y hay mínimos locales en  $x=a$  y en  $x=c$ .

- (a) Halle todos los posibles valores de  $x$  para los cuales el gráfico de  $f$  es decreciente.
- (b) (i) Halle el valor de  $x$  para el cual el gráfico de  $f$  tiene un mínimo local.
- (ii) Justifique su respuesta.

Mayo 15  
TZ2  
P2#10

La siguiente figura muestra un cuadrado ABCD, y un sector circular OAB de un círculo de centro O y radio  $r$ . Una parte del cuadrado está sombreada y lleva el rótulo  $R$ .

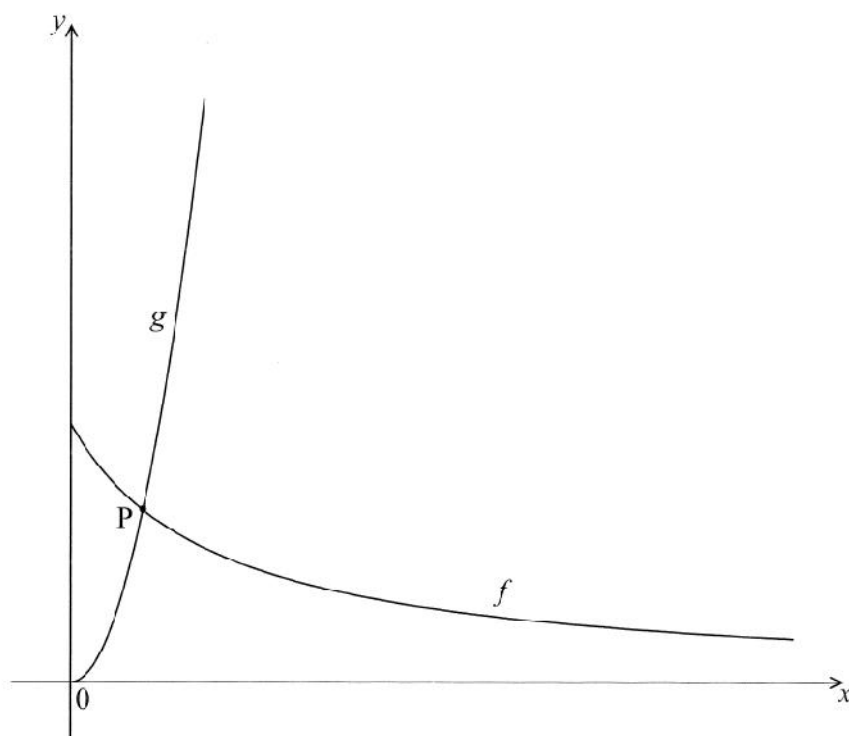


$$\widehat{AOB} = \theta, \text{ donde } 0,5 < \theta < \pi.$$

- (a) Muestre que el área del cuadrado ABCD es igual a  $2r^2(1 - \cos \theta)$ .
- (b) Cuando  $\theta = \alpha$ , el área del cuadrado ABCD es igual al área del sector circular OAB.
  - (i) Escriba el área del sector circular cuando  $\theta = \alpha$ .
  - (ii) A partir de lo anterior, halle  $\alpha$ .
- (c) Cuando  $\theta = \beta$ , el área de  $R$  es más del doble del área del sector circular. Halle todos los posibles valores de  $\beta$ .

Mayo 15  
TZ2  
P2#8

Sean  $f(x) = \frac{9}{x+2}$  y  $g(x) = 3x^2$ , para  $x \geq 0$ . La siguiente figura muestra partes de los gráficos de  $f$  y  $g$ .



El gráfico de  $f$  y el de  $g$  se cortan en el punto  $P(p, q)$ .

(a) Halle el valor de  $p$  y el de  $q$ .

(b) Escriba  $f'(p)$ .

Sea  $L$  la normal al gráfico de  $f$  en  $P$ .

(c) (i) Halle la ecuación de  $L$ , de la forma  $y = ax + b$ .

(ii) Escriba el punto de intersección de  $L$  con el eje  $y$ .

Mayo 15  
TZ1  
P2#6

Let  $f(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$ , for  $0 < x \leq 5$ .

Points  $P(0.25, 0)$  and  $Q$  are on the curve of  $f$ . The tangent to the curve of  $f$  at  $P$  is perpendicular to the tangent at  $Q$ . Find the coordinates of  $Q$ .

Mayo 15  
TZ1  
P1#9

A function  $f$  has its derivative given by  $f'(x) = 3x^2 - 2kx - 9$ , where  $k$  is a constant.

(a) Find  $f''(x)$ .

The graph of  $f$  has a point of inflexion when  $x = 1$ .

(b) Show that  $k = 3$ .

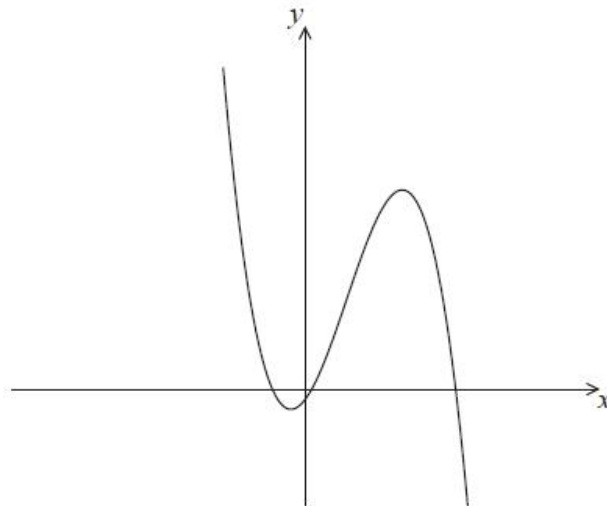
(c) Find  $f'(-2)$ .

(d) Find the equation of the tangent to the curve of  $f$  at  $(-2, 1)$ , giving your answer in the form  $y = ax + b$ .

(e) Given that  $f'(-1) = 0$ , explain why the graph of  $f$  has a local maximum when  $x = -1$ .

Mayo 15  
TZ1  
P2#7

The following diagram shows part of the graph of  $f(x) = -2x^3 + 5.1x^2 + 3.6x - 0.4$ .



(a) Find the coordinates of the local minimum point.

(b) The graph of  $f$  is translated to the graph of  $g$  by the vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ . Find all values of  $k$  so that  $g(x) = 0$  has exactly one solution.

Nov 15  
P2#7

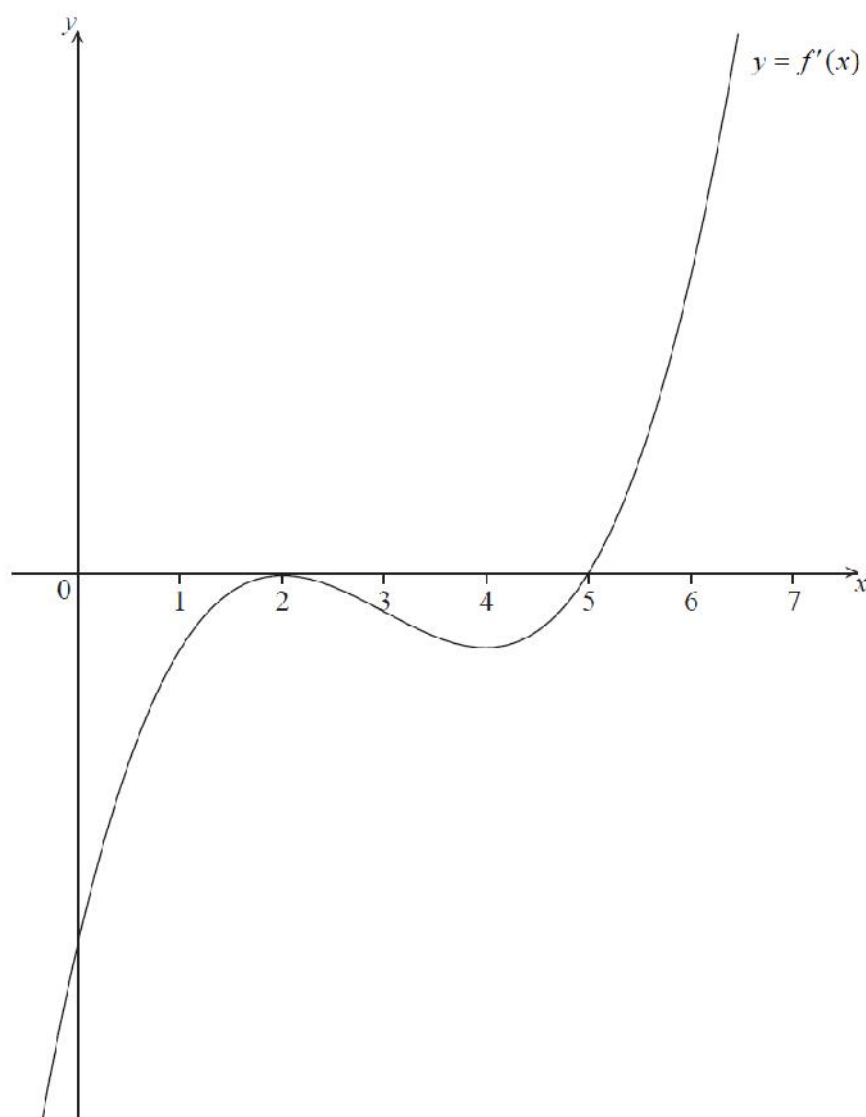
Let  $f(x) = \ln(x^2)$ , for  $x \neq 0$ .

(a) Show that  $f'(x) = \frac{2}{x}$ .

(b) The tangent to the graph of  $f$  at a point  $P(d, f(d))$  passes through another point  $Q(1, -3)$ . Find the value of  $d$ .

Nov 15  
P1#10ab

Let  $y = f(x)$ , for  $0.5 \leq x \leq 6.5$ . The following diagram shows the graph of  $f'$ , the derivative of  $f$ .



The graph of  $f'$  has a local maximum when  $x = 2$ , a local minimum when  $x = 4$ , and it crosses the  $x$ -axis at the point  $(5, 0)$ .

- Explain why the graph of  $f$  has a local minimum when  $x = 5$ .
- Find the set of values of  $x$  for which the graph of  $f$  is concave down.

Mayo 16  
TZ1  
P1#10

Let  $f(x) = \sqrt{4x+5}$ , for  $x \geq -1.25$ .

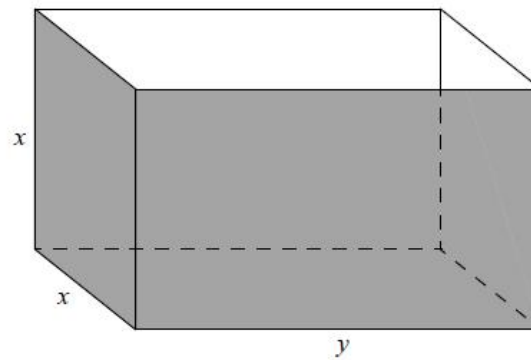
- Find  $f'(1)$ .

Consider another function  $g$ . Let  $R$  be a point on the graph of  $g$ . The  $x$ -coordinate of  $R$  is 1. The equation of the tangent to the graph at  $R$  is  $y = 3x + 6$ .

- Write down  $g'(1)$ .
- Find  $g(1)$ .
- Let  $h(x) = f(x) \times g(x)$ . Find the equation of the tangent to the graph of  $h$  at the point where  $x = 1$ .

Mayo 16  
TZ2  
P1#9

Fred fabrica un contenedor de metal abierto con forma de ortoedro, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



El contenedor tiene  $x$  m de altura,  $x$  m de ancho y una longitud de  $y$  m. El volumen es igual a  $36\text{ m}^3$ .

Sea  $A(x)$  el área de la superficie externa del contenedor.

- Muestre que  $A(x) = \frac{108}{x} + 2x^2$ .
- Halle  $A'(x)$ .
- Sabiendo que el área de la superficie externa tiene un valor mínimo, halle la altura del contenedor.
- Fred pinta la parte externa del contenedor. Una lata de pintura da para cubrir una superficie de  $10\text{ m}^2$  y cuesta \$20. Halle el costo total de las latas que se necesitan para pintar el contenedor.

Mayo 16  
TZ2  
P2#9

Sea  $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ , para  $x > 1$ .

- Escriba la ecuación de la asíntota horizontal del gráfico de  $f$ .
- Halle  $f'(x)$ .

Sea  $g(x) = ae^{-x} + b$ , para  $x \geq 1$ . El gráfico de  $f$  y el de  $g$  tienen la misma asíntota horizontal.

- Escriba el valor de  $b$ .
- Sabiendo que  $g'(1) = -e$ , halle el valor de  $a$ .
- Hay un valor de  $x$ , para  $1 < x < 4$ , para el cual el gráfico de  $f$  y el de  $g$  tienen la misma pendiente. Halle dicha pendiente.

Mayo 16  
TZ1  
P1#5

Consider  $f(x) = x^2 + qx + r$ . The graph of  $f$  has a minimum value when  $x = -1.5$ . The distance between the two zeros of  $f$  is 9.

- Show that the two zeros are 3 and  $-6$ .
- Find the value of  $q$  and of  $r$ .

Nov 16  
P1#10Let  $f(x) = \cos x$ .

- (a) (i) Find the first four derivatives of  $f(x)$ .
- (ii) Find  $f^{(19)}(x)$ .

Let  $g(x) = x^k$ , where  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

- (b) (i) Find the first three derivatives of  $g(x)$ .
- (ii) Given that  $g^{(19)}(x) = \frac{k!}{(k-p)!} (x^{k-19})$ , find  $p$ .

Let  $k = 21$  and  $h(x) = (f^{(19)}(x) \times g^{(19)}(x))$ .

- (c) (i) Find  $h'(x)$ .
- (ii) Hence, show that  $h'(\pi) = \frac{-21!}{2} \pi^2$ .

Nov 16  
P2#2Let  $f(x) = 0.225x^3 - 2.7x$ , for  $-3 \leq x \leq 3$ . There is a local minimum point at A.

- (a) Find the coordinates of A.
- (b) On the following grid,
- (i) sketch the graph of  $f$ , clearly indicating the point A;
- (ii) sketch the tangent to the graph of  $f$  at A.

