JUN 94

$$G(x) = \begin{cases} 0'02x - 1 & 0 \le x < 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & x > 100 \end{cases} \longrightarrow G'(x) = \begin{cases} 0'02 & 0 < x < 100 \\ \dfrac{30(2x+2300) - 30x \cdot 2}{(2x+2300)^2} = \dfrac{2300}{(2x+2300)^2} & x > 100 \end{cases}$$

$\boxed{\text{dom } G = [0, +\infty)}$

a) $\lim_{x \to 100^-} G(x) = 0'02 \cdot 100 - 1 = 1$

$G(100) = 0'02 \cdot 100 - 1 = 1$

$\lim_{x \to 100^+} G(x) = \dfrac{30 \cdot 100}{2 \cdot 100 + 2300} = \dfrac{3000}{2500} = 1'2$

$\longrightarrow$ $G(x)$ es discontinua en $x = 100$: Como $\lim_{x \to 100^-} G(x) \neq \lim_{x \to 100^+} G(x)$ el gasto es distinto si los ingresos son inferiores o superiores a 100.000 ptas.

$0'02x - 1$ es continua por ser polinómica ✓

$\dfrac{30x}{2x+2300}$ es continua salvo en $x = -1150$, en donde se anula el denominador, pero ese valor de x no pertenece al dominio de $G(x)$ ✓

Por lo tanto: $\boxed{G(x) \text{ es continua en } [0, +\infty) - \{100\}}$

b) $G'(x) = 0'02 > 0$ ✓

$G'(x) = \dfrac{2300}{(2x+2300)^2} > 0$ ✓

$\longrightarrow$ $\boxed{G(x) \text{ es siempre creciente}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{30x}{2x+2300} = \dfrac{30}{2} = 15$

Como $G(x)$ es creciente, y tiende en $x \to +\infty$ a 15.000 ptas. significa que $G(x) \le 15.000$. Ninguna familia pasará de este gasto.

JUN 94 a) $R(x) = -0'001x^2 + 0'5x + 2'5 \longrightarrow R'(x) = -0'002x + 0'5$

$R'(x) = 0 \Rightarrow 0 = -0'002x + 0'5$; $x = \dfrac{0'5}{0'002} = 250$

	0	250	$+\infty$
R'	+	−	
R	↗	↘	
		MAX	

$R(x)$ es creciente en $[0, 250)$

" " decreciente en $(250, +\infty)$

" tiene un máximo relativo en $x = 250$

Al cliente le conviene invertir $\boxed{250.000 \text{ ptas}}$, puesto que la rentabilidad es máxima.

b) $x = 250 \longrightarrow R(250) = 65$ $\boxed{\text{La rentabilidad sería de } 65.000 \text{ ptas.}}$

SEPT 94

a) $P(x) = \begin{cases} x/3 & 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0'2x+3} & x > 15 \end{cases}$

$0'2x+3=0 \longrightarrow x = -\dfrac{3}{0'2} = -15$

P(x) no estaría definida en -15 pero este valor de x no pertenece a su dominio $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{dom}\,P = [0,+\infty)}$

$$P'(x) = \begin{cases} 1/3 & 0<x<15 \\ \dfrac{2(0'2x+3) - 2x\cdot 0'2}{(0'2x+3)^2} = \dfrac{6}{(0'2x+3)^2} & x>15 \end{cases}$$

$P'(x) = 1/3 > 0$ ✓

$P'(x) = \dfrac{6}{(0'2x+3)^2} > 0$ ✓

$\boxed{\text{Luego } P(x) \text{ es creciente en todo su dominio}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 15^-} P(x) = \dfrac{15}{3} = 5 \\ P(15) = \dfrac{15}{3} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 15^+} P(x) = \dfrac{2\cdot 15}{0'2\cdot 15+3} = \dfrac{30}{6} = 5 \end{array}\right\} P(x) \text{ es continua en } x=15$$

Al ser P(x) continua y creciente, para $x<15$, tomará valores menores que $P(15)=5$:

$\boxed{x<15 \Longrightarrow P(x) < P(15) = 5}$

Es decir, con menos de 15h de preparación, la calificación será inferior a 5.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{0'2x+3} = \dfrac{2}{0'2} = 10$

Al ser P(x) creciente y tiende a 10 cuando $x\to+\infty$, la puntuación P(x) no superará nunca 10. $\boxed{P(x) < 10}$

JUN 95

a) $Q(x) = (x+1)^2(32-x) \longrightarrow Q'(x) = 2(x+1)(32-x) + (x+1)^2\cdot(-1) = (x+1)\cdot(64-2x-x-1) =$
$= (x+1)\cdot(63-3x)$

dom $Q = \mathbb{R}$

$Q'(x) = 0 \longrightarrow (x+1)(63-3x) = 0 \Longrightarrow x = -1 \;;\; \dfrac{63}{3} = 21$

		-1		21	
Q'	$-$		$+$		$-$
Q	↘		↗		↘
		MIN		MAX	

Q(x) es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(21,+\infty)$
" " creciente en $(-1,21)$
" tiene un mínimo relativo en $x=-1$
" " " máximo relativo en $x=21$

Pensando que, en la producción de hortalizas, la temperatura no debería ser negativa, el máximo absoluto de Q(x) sería el máximo relativo en $x=21$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Deberían mantenerse a } 21^\circ C}$

b) $x=21 \Longrightarrow Q(21) = (21+1)^2(32-21) = \boxed{5324 \text{ Kg}}$ se producirían.

SEPT 95 a)
$$I(t) = \frac{90t}{t^2+9}$$

$t^2+9=0$; $t^2=-9$ $\Rightarrow$ dom $I = \mathbb{R}$, en realidad : $\boxed{\text{dom } I(t) = [0,+\infty)}$

$$I'(t) = \frac{90(t^2+9) - 90t \cdot 2t}{(t^2+9)^2} = \frac{90t^2+810-180t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{810-90t^2}{(t^2+9)^2}$$

$I'(t)=0 \Rightarrow 810-90t^2=0$; $-90t^2=-810$; $t^2=9$; $t = \begin{cases} \cancel{-3} \\ 3 \end{cases}$

	0		3		$+\infty$
I'		+		−	
I		↗	MAX	↘	

$I(t)$ creciente en $[0,3)$
" decreciente en $(3,+\infty)$
" tiene un máximo relativo en $t=3$

Le conviene prestar a $\boxed{3 \text{ años}}$, ya que el tipo de interés es máximo.

b) $$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{90t}{t^2+9} = 0$$

Como $I(t)$ es decreciente para $t>3$, y en el $t\to+\infty$ tiende a cero, significa que $\boxed{I(t) \text{ nunca será negativo}}$

JUN96 a)
$$G(x) = \frac{20x}{x^2+1}$$

$x^2+1=0$; $x^2=-1$ $\rightarrow$ dom $G = \mathbb{R}$, en realidad : $\boxed{\text{dom } G = [0,+\infty)}$

$$G'(x) = \frac{20(x^2+1) - 20x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{20-20x^2}{(x^2+1)^2}$$

$G'(x)=0 \Rightarrow 20-20x^2=0$; $x^2=1$; $x = \begin{cases} \cancel{-1} \\ 1 \end{cases}$

	0		1		$+\infty$
G'		+		−	
G		↗	MAX	↘	

$G(x)$ es creciente en $[0,1)$
" " decreciente en $(1,+\infty)$
" tiene un máximo relativo en $x=1$

El mayor gasto será entonces para un salario de $\boxed{100\,000 \text{ ptas}}$

b) $$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{20x}{x^2+1} = 0$$

Como $G(x)$ es decreciente para $x>1$, y el límite cuando $x\to+\infty$ es 0 , $\boxed{\text{el gasto para salarios suficientemente altos tenderá a } 0}$.

SEPT 96

a) Ingresos por x juguetes: $\boxed{I(x) = 8000x}$

b) Beneficios por x juguetes: $B(x) = I(x) - C(x) = 8000x - (10x^2 + 2000x + 250000) =$

$= \boxed{-10x^2 + 6000x - 250000}$

c) $B(x) = -10x^2 + 6000x - 250000 \qquad (x \geq 0)$

$B'(x) = -20x + 6000$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -20x + 6000 = 0 \quad ; \quad x = 300$

	0		3000		$+\infty$
B'		+		−	
B		↗		↘	
			MAX		

Tendrá máximo beneficios fabricando $\boxed{300 \text{ juguetes}}$

El beneficio será de:

$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 60000 \cdot 300 - 250000 = \boxed{16.850.000 \text{ ptas}}$

JUN 97

a) $G(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 20 \\ 0'1t & 20 \leq t \leq 100 \\ \dfrac{40t - 1000}{2t + 100} & t > 100 \end{cases}$

$2t + 100 = 0$; $t = -50$; $G(t)$ no estaría definida en $t = -50$, pero no pertenece a su dominio $\Rightarrow \boxed{\text{dom } G = [0, +\infty)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 20^-} G(t) = 0 \\ G(20) = 0'1 \cdot 20 = 2 \\ \lim\limits_{t \to 20^+} G(t) = 0'1 \cdot 20 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $G(t)$ es discontinua en $t = 20$, tiene un $\boxed{\text{salto finito}}$.

En consecuencia hay una diferencia de 2000 ptas entre los que dedican 'un poco menos' de 20 horas a 'un poco más' de 20 horas en ver la TV.

$G'(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 20 \\ 0'1 & 20 < t < 100 \\ \dfrac{40(2t+100) - (40t - 1000) \cdot 2}{(2t+100)^2} = \dfrac{6000}{(2t+100)^2} & 100 < t \end{cases}$

Vemos que $G'(t) > 0$ para todo t, por lo que G es creciente.

Para $t > 100$, $G(t)$ tomará valores mayores que $\lim\limits_{t \to 100} G(t)$:

$\lim\limits_{t \to 100} G(t) = \lim\limits_{t \to 100} \dfrac{40t - 1000}{2t + 100} = \dfrac{4000 - 1000}{200 + 100} = \dfrac{3000}{300} = 10 \longrightarrow 10.000$ ptas

Por lo tanto, si dedican a ver la TV más de 100 h, el gasto en alquiler de videos será mayor de 1000 ptas.

Nota: No influye, pero en $t = 100$ la función es continua, ya que $G(100) = 0'1 \cdot 100 = 10$ que coincide con $\lim\limits_{t \to 100^+} G(t) = 10$.

SEPT 97

a)

$C(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad$ dom $C = \mathbb{R}$, en realidad $\boxed{\text{dom } C = [0, +\infty)}$

$C'(x) = 2ax + b$

$C''(x) = 2a$

$$\left.\begin{array}{l} C(1000) = 43000 \longrightarrow a\cdot 1000^2 + b\cdot 1000 + c = 43000 \\ c(2000) = 36000 \longrightarrow a\cdot 2000^2 + b\cdot 2000 + c = 36000 \\ c'' = 2 \longrightarrow 2a = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow a = 1$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} 1000b + c = 43000 - 1000000 \\ 2000b + c = 36000 - 4000000 \end{array}\right\} ; \quad \begin{array}{l} 1000b + c = -957000 \\ 2000b + c = -3964000 \\ \hline 1000b \quad = -3007000 \end{array}$$

$b = -3007 \longrightarrow c = -957000 + 3007000 = 2050000$

$$\boxed{C(x) = x^2 - 3007x + 2050000}$$

b)

$C'(x) = 2x - 3007$

$C'(x) = 0 \implies x = \frac{3007}{2} = 1503'5$

	0		1503'5		$+\infty$
c'		$-$		$+$	
c		$\searrow$	MIN	$\nearrow$	

$C(x)$ crece en $x \in (1503'5, +\infty)$
" decrece " $x \in (0, 1503'5)$
" Tiene un mínimo relativo en $x = 1503'5$

c) Los costes medios serán mínimos para una producción de $\boxed{1503'5 \text{ miles de Toneladas}}$, y resultan ser de:

$$\boxed{C(1503'5) = -210512'25 \text{ miles de ptas}}$$

JUN98

a)

$$F(x) = \begin{cases} 15'5 - 1'1x & 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{5x+45}{x+2} & x > 5 \end{cases}$$

$x + 2 = 0$; $x = -2$; $F(x)$ no está definida en $x = -2$ pero no pertenece a su dominio, por lo tanto: $\boxed{\text{dom } F = [0, +\infty)}$

$F(x)$ es continua en $[0, 5)$ por tratarse de una expresión polinómica y continua en $(5, +\infty)$ por ser una función racional con denominador distinto de cero.

En $x = 5$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} F(x) = 15'5 - 1'1\cdot 5 = 10 \\ F(5) = 15'5 - 1'1\cdot 5 = 10 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} F(x) = \dfrac{5\cdot 5+45}{5+2} = \dfrac{70}{7} = 10 \end{array}\right\} \implies F(x) \text{ es continua en } x = 5.$$

Por lo tanto $\boxed{F(x) \text{ es continua en } [0, +\infty)}$

b) $F'(x) = \begin{cases} -1'1 & 0<x<5 \\ \dfrac{5(x+2)-(5x+45)}{(x+2)^2} = \dfrac{-35}{(x+2)^2} & x>5 \end{cases}$

Vemos que $F'(x)<0$ en todos los x, por lo que $\boxed{F(x) \text{ es decreciente}}$

Como $F(5)=10$, siendo $F(x)$ continua y decreciente, para $x>5$ será $F(x)<10$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+45}{x+2} = \dfrac{5}{1} = 5$

Al ser F decreciente, al ser $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=5$, tendremos que $F(x)>5$ para todo x.

SEPT 98 a) $C(x) = x^3+x^2-8x+73$ dom $C=\mathbb{R}$, en realidad $\boxed{\text{dom}\, C=[0,+\infty)}$

$C'(x) = 3x^2+2x-8$

$C'(x)=0 \implies 3x^2+2x-8=0$; $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+96}}{6} = \dfrac{-2\pm10}{6} \begin{cases} \frac{8}{6}=\frac{4}{3} \\ \cancel{-2} \end{cases}$

	0		4/3		+∞
C'		−		+	
C		↘	MIN	↗	

$C(x)$ decrece en $(0, 4/3)$
$C(x)$ crece en $(4/3, +\infty)$
$C(x)$ tiene un mínimo en $x=4/3$

Se minimizarán costes para un almacenamiento $\boxed{4/3 \text{ millones de } m^3}$

b) $x=\frac{4}{3} \implies C(4/3) = \boxed{66'4815 \text{ ptas de coste mínimo}}$

$C(3)-C(4/3) = \boxed{67'0741 \text{ ptas}}$ de más que se han gastado

JUN 99 a)
$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & 0\le x\le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2 & x>30 \end{cases}$

$x+30=0$; $x=-30$ anularía el denominador, pero no pertenece al dominio

$(x-5)(x-15)=0$; $x= \begin{cases} 5 \\ 15 \end{cases}$ anularían el denominador, pero no pertenecen al dominio

Por lo tanto $\boxed{\text{dom}\, T = [0,+\infty)}$

$T(x)$ es continua en $[0,30)$ porque es una expresión racional con denominador $\neq 0$.

$T(x)$ es continua en $(30,+\infty)$ porque es otra expresión racional con denominador $\neq 0$

En $x=30$:

$\lim\limits_{x\to30^-} T(x) = \dfrac{300}{30+30} = 5$

$T(x) = \dfrac{300}{30+30} = 5$

$\lim\limits_{x\to30^+} T(x) = \dfrac{1125}{(30-5)(30-15)}+2 = 5$

$\rightarrow$ $T(x)$ es continua en $x=30$

Por lo tanto, $\boxed{T(x) \text{ es continua en } [0,+\infty)}$

b) $T'(x) = \begin{cases} \dfrac{-300}{(x+30)^2} & 0<x<30 \\ \dfrac{-1125\,(2x-20)}{(x-5)(x-15)} & x>30 \end{cases}$

$T'(x)=0 \to \dfrac{-300}{(x+30)^2}=0$ ✗ No se anula en $0<x<30$

$\to \dfrac{-1125(2x-20)}{(x-5)(x-15)}=0 \to x=\cancel{10}$. No sirve porque $10 \not> 30$. Por lo tanto tampoco se anula en $x>30$.

	0	30	$+\infty$
T'	$-$	$-$	
T	↘	↘	

T es decreciente en $[0,+\infty)$

Por lo tanto cuanto más se entrene, menor será el tiempo en realizar la prueba.

$\lim_{x\to+\infty} T(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2\right) = 0+2=2$

$T(0) = \dfrac{300}{0+30} = 10$

Al ser T decreciente con $T(0)=10$, el tiempo mayor será 10 minutos, $\boxed{\text{ningún atleta}}$ tardará más de 10 minutos.

c) Como T es decreciente y $\lim_{x\to+\infty} T = 2$, $\boxed{\text{no se podrá bajar de 2 minutos, ni obviamente de 1 minuto.}}$

SBPT99

$F(x) = (x-2)^2(1-2x) + 252x + 116 \quad (0\leq x\leq 10)$ $\quad \boxed{\text{dom} f = [0,10]}$

a) $F'(x) = 2(x-2)(1-2x) - 2\cdot(x-2)^2 + 252 = 2x-4x^2-4+8x-2x^2+8x-8+252 =$

$= -6x^2+18x+240$

$F'(x)=0 \to -6x^2+18x+240=0$

$x^2-3x-40=0 \;;\; x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+160}}{2} = \dfrac{3\pm 13}{2}$ → 8 ; $\cancel{-5}$

	0	8	$+\infty$
F'	$+$	$-$	
F	↗	↘	
		MAX	

F es creciente en $[0,8)$
F es decreciente en $(8,+\infty)$
F tiene un máximo relativo en $x=8$

b) El mayor valor de su cartera hubiese sido en $x=8$.

Si espera a $x=10$, pierde:

$F(8)-F(10) = \left[(8-2)^2(1-16)+252\cdot 8+116\right] - \left[(10-2)^2(1-20)+252\cdot 10+116\right] = 172$

$\boxed{\text{perdería 172}}$

JUN 00

$$F(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad \boxed{\text{dom} F = \mathbb{R}}$$

a) $\lim_{x\to 1^-} F(x) = 1+1=2$

$F(1)=1+1=2$

$\lim_{x\to 1^+} F(x) = 3-a\cdot 1^2 = 3-a$

$2=3-a \;;\; \boxed{a=1}$ Para $a=1$, $F(x)$ será continua en $x=1$.

$F(x)$ es continua en $x<1$ y en $x>1$ por tener expresiones polinómicas.

Si $a=1$, $F(x)$ es continua en todo su dominio.

b) $F(x)$ continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} F(x)$

En consecuencia es falso pues $\nexists \lim_{x\to x_0} F(x)$.

SEPT 00

$f(x)=3x^2e^{-4x}$

$f'(x)=6xe^{-4x}+3x^2\cdot e^{-4x}\cdot(-4) = 6xe^{-4x}(1-2x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6xe^{-4x}(1-2x)=0 \quad \begin{cases} \boxed{x=0} \\ e^{-4x}=0 \quad \times \\ 1-2x=0 \rightarrow \boxed{x=1/2} \end{cases}$

JUN 01

$f(x)=8'5+\dfrac{3x}{1+x^2} \qquad x\ge 0$

El $\boxed{\text{dom} f = [0,+\infty)}$ porque el denominador $1+x^2$ no se anula.

a) $f'(x)=\dfrac{3(1+x^2)-3x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \;;\; x = \begin{cases} \cancel{-1} \\ 1 \end{cases}$

	0		1		$+\infty$
f'		+		−	
f		↗	MAX	↘	

$f(x)$ es creciente en $[0,1)$
" " decreciente en $(1,+\infty)$
" tiene un máximo relativo en $x=1$.

b) El rendimiento máximo será en $\boxed{x=1} \rightarrow f(1)=8'5+\dfrac{3\cdot 1}{1+1^2} = \boxed{10}$

c) $f(0)=8'5$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(8'5+\dfrac{3x}{1+x^2}\right) = 8'5+0 = 8'5$

El rendimiento, cuando era nuevo el producto, era de $8'5$, crece hasta un rendimiento 10 al año y a partir de ese momento irá decreciendo hasta el $8'5$ en $x\to+\infty$. En consecuencia el rendimiento $\boxed{\text{no bajará de } 8'5}$.

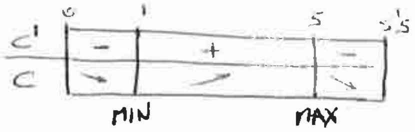
SEPT 01

a) $C(t) = (-t^2+1)(t-9) - 16t + 59 \quad (0 < t < 5'5)$

$C'(t) = -2t(t-9) + (-t^2+1) - 16 = -3t^2+18t-15$

$C'(t)=0 \rightarrow -3t^2+18t-15=0$

$t^2-6t+5=0 \; ; \; t = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$



$\boxed{\begin{array}{l} C(t) \text{ es creciente en } (1,5) \\ \text{" " decreciente en } [0,1) \cup (5, 5'5] \\ \text{" Tiene un mínimo relativo en } x=1 \\ \text{" " " máximo " " } x=5 \end{array}}$

b) Para hallar la cotización más baja, compararemos la del mínimo relativo en $x=1$ con la del final de dominio, en $x=5'5$, al ser un tramo decreciente:

$C(1) = (-1^2+1)(1-9) - 16\cdot 1 + 59 = \boxed{43}$

$C(5'5) = (-5'5^2+1)(5'5-9) - 16\cdot 5'5 + 59 = 73'375$

La cotización más baja fue en $x=1$: $\boxed{43 \text{ ptas}}$

Para hallar la cotización más alta, compararemos la del máximo relativo en $x=5$ con la del inicio, en $x=0$;

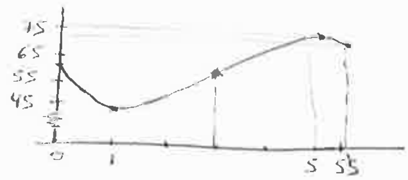
$C(5) = (-5^2+1)(5-9) - 16\cdot 5 + 59 = 75$

$C(0) = 59$

La cotización más alta fue en $x=5$: $\boxed{75 \text{ ptas}}$

c)

	t	C
	0	59
MIN	1	43
MAX	5	75
	5'5	73'375



Entre el mínimo y máximo relativos deberá haber un punto de inflexión, estará en:

$C''(t) = -6t+18$

$C''(t)=0 \rightarrow -6t+18=0 \; ; \; t=3 \longrightarrow C(3)=59$

Tiene $\boxed{\text{una inflexión en } t=3}$

JUN 02 $P(x) = (x^2-55x)(x+1) + 1015x - 5542$ $x \in [13,21]$

a] $P'(x) = (2x-55)(x+1) + (x^2-55x) + 1015 =$

$= 3x^2 - 108x + 960$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 108x + 960 = 0$

$x^2 - 36x + 320 = 0$

$x = \dfrac{36 \pm \sqrt{1296 - 1280}}{2} = \dfrac{36 \pm 4}{2} \begin{cases} 20 \\ 16 \end{cases}$

	13 — 16	16 — 20	20 — 21
P'	+	−	+
P	↗	↘	↗

MAX (16) MIN (20)

c] $P(x)$ crece en $[13,16) \cup (20,21]$
" decrece en $(16,20)$
" tiene un máximo relativo en $x=16$
" " " mínimo relativo en $x=20$

b] Para hallar la mayor ocupación, compararemos el máximo relativo de $x=16$ con lo que sucede en $x=21$:

$P(16) = \boxed{90}$
$P(21) = 65$

La mayor ocupación es del 90% a las 16h

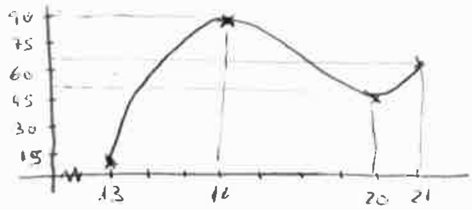
Para hallar la menor ocupación, compararemos el mínimo relativo de $x=20$ con el punto inicial en $x=13$:

$P(20) = 58$
$P(13) = \boxed{9}$

La menor ocupación es del 9% a las 13h

d]

	x	P
	13	9
MAX	16	90
MIN	20	58
	21	65



SEPT 02

a] $P(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{50t - 62'5}{0'5t+5} & t > 5 \end{cases}$

$0'5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -10$, no estando definida $P(t)$, pero este valor no pertenece al dominio.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom} P = [0, +\infty)}$

t^2 es continua en $[0,5)$ por ser una expresión polinómica.
$\dfrac{50t-62'5}{0'5t+5}$ es continua en $(5,+\infty)$ " " " " racional con denominador $\neq 0$.

En $x=5$:

$\lim_{t \to 5^-} P(t) = 5^2 = 25$
$P(5) = 5^2 = 25$
$\lim_{t \to 5^+} P(t) = \dfrac{50 \cdot 5 - 62'5}{0'5 \cdot 5 + 5} = 25$

$\Rightarrow$ $P(t)$ es continua en $t=5$.
Por lo tanto $\boxed{P \text{ es continua en } [0,+\infty)}$

b] $P'(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 5 \\ \dfrac{50(0'5t+5) - (50t-62'5) \cdot 0'5}{(0'5t+5)^2} = \dfrac{31'25}{(0'5t+5)^2} & t > 5 \end{cases}$

$P'(t) = 0 \begin{cases} 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \dfrac{31'25}{(0'5t+5)^2} = 0 \quad \times \end{cases}$

	0 — 5	5 —
P'	+	+
P	↗	↗

P es siempre creciente. El peligro del virus crece a medida que pasa el tiempo.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{50t-62'5}{0'5t+5} = \dfrac{50}{0'5} = 100$

$P(0) = 0^2 = 0$

La peligrosidad comienza en 0, y crece indefinidamente, con valor 100 cuando $t\to+\infty$. Por lo tanto $\boxed{\text{nunca superará la peligrosidad 100, pero sí 95.}}$

JUN 03 a) $P(t) = \begin{cases} 50-t^2 & 0\le t\le 3 \\ 56-\dfrac{20t}{t+1} & t>3 \end{cases}$

$t+1=0 \to t=-1$, $P(t)$ no estaría definida en $t=-1$ pero no pertenece al dominio.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom } P = [0,+\infty)}$

$50-t^2$ es continua en $[0,3)$ por ser una expresión polinómica.

$56-\dfrac{20t}{t+1}$ " " " $(3,+\infty)$ " " " " racional con denominador $\neq 0$

En $x=3$:

$\lim\limits_{x\to 3^-} P(t) = 50-3^2 = 41$

$P(3) = 50-3^2 = 41$

$\lim\limits_{t\to 3^+} P(t) = 56-\dfrac{20\cdot 3}{3+1} = 41$

$\Rightarrow$ P es continua en $x=3$.

Por lo tanto: $\boxed{\text{P es continua en } [0,+\infty)}$

$P'(t) = \begin{cases} -2t & 0<t<3 \\ -\dfrac{20(t+1)-20t}{(t+1)^2} = \dfrac{-20}{(t+1)^2} & t>3 \end{cases}$

$P'(t)=0 \to -2t=0 \;;\; t=0$

$\to \dfrac{-20}{(t+1)^2} = 0$ ✗

	0	3	$+\infty$
P'	−	−	
P	↘	↘	

P es siempre decreciente.

$\boxed{\text{Por lo tanto, la plancha aguantará cada vez menos peso.}}$

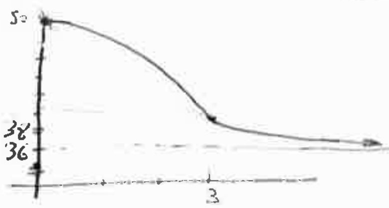
b) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(56-\dfrac{20t}{t+1}\right) = 56-20 = 36$

$P(0) = 50.$

La plancha comienza soportando 50 toneladas, cada vez soportará menos peso, hasta 36 toneladas cuando $t\to+\infty$. Por lo tanto, la plancha aguantará siempre 36 toneladas, $\boxed{\text{pero no podrá con 40 toneladas}}$

c)

t	P
0	50
3	41
$+\infty$	36



$P''(t) = \begin{cases} -2 & 0<t<3 \\ +\dfrac{20\cdot 2(t+1)}{(t+1)^4} = \dfrac{+40}{(t+1)^3} & t>3 \end{cases}$

	0	3	$+\infty$
P	−	+	
P''	convexa	cóncava	

SEPT 03 $V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \qquad t \in [0,6]$

a) $V' = 24 - 30t + 6t^2$

$V' = 0 \longrightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0 \; ; \; t^2 - 5t + 4 = 0 \; ; \; t = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

	0 – 1	1 – 4	4 – 6
V'	+	−	+
V	↗	↘	↗
		MAX (t = 1)	MIN (t = 4)

$V(t)$ es creciente en $[0,1) \cup (4,6]$
" " decreciente en $(1,4)$
" tiene un máximo relativo en $t=1$
" " " mínimo relativo en $t=4$

b) $V'' = -30 + 12t$

$V'' = 0 \longrightarrow -30 + 12t = 0 \; ; \; t = \frac{30}{12} = 2'5$

	0 – 2'5	2'5 – 6
V''	−	+
V	Convexa	Cóncava

$V(t)$ es convexa en $[0, 2'5)$
" " cóncava en $(2'5, 6]$

$V(t)$ tiene un punto de inflexión en $t = 2'5$

Para buscar el momento de mayor velocidad, compararemos el máximo relativo con el de $t=6$:

$V(1) = 24 \cdot 1 - 15 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 + 100 = 111$

$V(6) = 24 \cdot 6 - 15 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 + 100 = \boxed{136}$ La máxima velocidad se produce en $t=6$, y fue de 136.

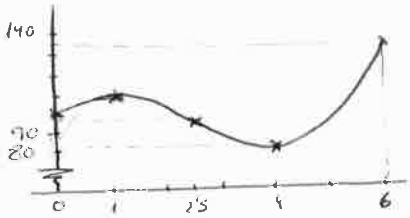
Para buscar el momento de menor velocidad, compararemos el mínimo relativo con lo sucedido en $t=0$:

$V(0) = 100$

$V(4) = 24 \cdot 4 - 15 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + 100 = \boxed{84}$ La menor velocidad se produce en $t=4$ y fue de 84.

c)

	t	V
	0	100
MAX	1	111
	2'5	97'5
MIN	4	84
	6	136



Máximo Absoluto : $(6, 140)$
" Relativo : $(1, 111)$
Mínimo Absoluto y Relativo : $(4, 8)$
Punto de Inflexión : $(2'5, 97'5)$

JUN 04

a) $P(t) = \begin{cases} t^2-8t+50 & 0\le t\le 10 \\ \dfrac{38t-100}{0'4t} & t>10 \end{cases}$

$0'4t=0 \rightarrow t=0$, P(t) no estaría definida en $t=0$ pero este valor no pertenece a dicho dominio.

Por lo tanto $\boxed{\text{dom } P = [0,+\infty)}$

$$P'(t) = \begin{cases} 2t-8 & 0<t<10 \\ \dfrac{38\cdot 0'4t-(38t-100)\cdot 0'4}{(0'4t)^2} = \dfrac{40}{0'16t^2} = \dfrac{250}{t^2} & t>10 \end{cases}$$

$P'(t)=0 \rightarrow 2t-8=0 \; ; \; t=4$

$\rightarrow \dfrac{250}{t^2}=0$ ✗

	0 — 4	4 — 10	10 — $+\infty$
P'	−	+	+
P	↘	↗	↗

MIN (t = 4)

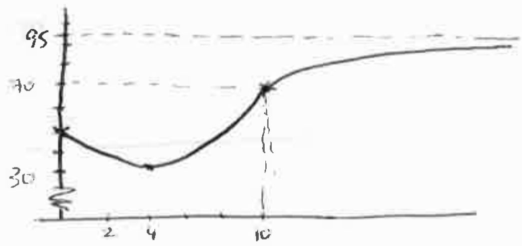
El porcentaje crecerá a partir de $t=4$: $\boxed{4 \text{ meses}}$

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{38t-100}{0'4t} = \frac{38}{0'4} = 95$$

No llegará a alcanzar el 95%, pero se irá aproximando progresivamente a él

b)

t	P
0	50
MIN 4	34
10	70
10^+	70
$+\infty$	95



SEPT 04

$S(t) = -t^3+36t^2-420t+1596$ $\quad t\in[11,15]$

a) $S'(t) = -3t^2+72t-420$

$S'(t)=0 \rightarrow -3t^2+72t-420=0 \; ; \; t^2-24t+140=0 \; ; \; t = \dfrac{24\pm\sqrt{576-560}}{2} = \dfrac{24\pm 4}{2}$ → 14 ; → $\cancel{10}$ no pertenece al dominio

	11 — 14	14 — 15
S'	+	−
S	↗	↘

MAX (t = 14)

S(t) crece en [11,14)

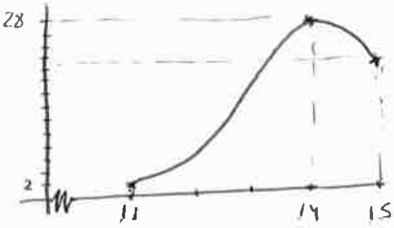
" decrece en (14,15]

" tiene un máximo relativo en $t=14$

$S(14) = -14^3+36\cdot14^2-420\cdot14+1596 = 28$ El mayor share es del 28%, como no alcanza el 30%, $\boxed{\text{dejará de emitirse.}}$

b)

t	S
11	1
MAX 14	28
15	21



SEPT 04

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x - 3x^2$$

$$f'(-1) = -10 \Rightarrow -\frac{a}{(-1)^2} + 6\cdot(-1) - 3\cdot(-1)^2 = -10 \ ; \ -a-6-3=-10 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

JUN 05

$$P(x) = -0'000025x^3 + 0'045x^2 - 2'4x + 50 \qquad x \in [40,100]$$

a) $P'(x) = -0'000075x^2 + 0'09x - 2'4$

$P'(x) = 0 \rightarrow -0'000075x^2 + 0'09x - 2'4 = 0$

$x^2 - 120x + 3200 = 0 \ ; \ x = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 12800}}{2} = \frac{120 \pm 40}{2} \begin{cases} 80 \\ 40 \end{cases}$

	40 – 80	80 – 100
P'	+	−
P	↗	↘

MAX (en 80)

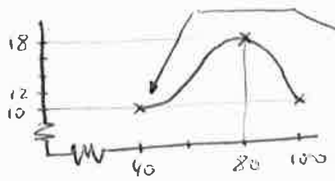
P(x) es creciente en (40,80)
" " decreciente en (80,100]
" Tiene un máximo relativo en x=80

El mayor porcentaje de votantes se produce para x=80:

$P(80) = -0'00075\cdot 80^2 + 0'045\cdot 8^2 - 2'4\cdot 80 + 50 = 18 < 20 \Rightarrow$ El dirigente tendrá que dimitir.

b)

	x	P
	40	10
MAX	80	18
	100	10



(En x=40, la derivada se anulaba)

JUN 05

$$f'(x) = \frac{-4\cdot 2x}{x^4} + 8 - 2x = \frac{-8}{x^3} + 8 - 2x$$

$$f'(2) = \frac{-8}{2^3} + 8 - 2\cdot 2 = -1 + 8 - 4 = \boxed{3}$$

SEPT 05

$$G(x) = \begin{cases} 6 + 2x - \frac{x^2}{6} & 0 \le x \le 9 \\ 3 + \frac{75x + 5400}{10x^2} & x > 9 \end{cases}$$

$10x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, G(x) no estaría definida en x=0, pero ese valor no pertenece a ese trozo, por lo que: $\boxed{\text{dom } G = [0, +\infty)}$

a) $6 + 2x - \frac{x^2}{6}$ es continua en $[0,9)$ por ser una expresión polinómica.

$3 + \frac{75x+5400}{10x^2}$ " " " $(9,+\infty)$ " " " " racional con denominador distinto de 0.

En x=9:

$\lim_{x\to 9^-} G(x) = 6 + 2\cdot 9 - \frac{9^2}{6} = 10'5$

$G(9) = 6 + 2\cdot 9 - \frac{9^2}{6} = 10'5$

$\lim_{x\to 9^+} G(x) = 3 + \frac{75\cdot 9 + 5400}{10\cdot 9^2} = 10'5$

$\rightarrow$ G(x) es continua en x=9.

Por lo tanto $\boxed{G(x) \text{ es continua en } [0,+\infty)}$

b)

$$G'(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2x}{6} = 2 - \frac{x}{3} & 0 \le x < 9 \\ \frac{75\cdot 10x^2 - (75x+5400)\cdot 20x}{100x^4} = \frac{-75x^2 - 10800x}{10x^4} = \frac{-15x - 1080}{x^3} & x > 9 \end{cases}$$

$G'(x) = 0$:
- $2 - \frac{x}{3} = 0 \rightarrow x = 6$
- $\frac{-15x - 1080}{x^3} = 0 \rightarrow -15x - 1080 = 0 \ ; \ x = \cancel{-72}$ no pertenece al dominio.

	0		6		9		$+\infty$
G'		+		−		−	
G		↗		↘		↘	
			MAX				

$G(x)$ es creciente en $[0,6)$
" " decreciente en $(6,+\infty)$
" Tiene un máximo relativo en $x=6$

c) El menor valor de G podrá estar en $x=0$ ó cuando $x \to +\infty$:

$$G(0) = 6+2\cdot 0 - \frac{0^2}{6} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{75x+5400}{10x^2}\right) = 3+0 = 3$$

En consecuencia, sí $\boxed{\text{llegará a ser inferior a } 400€}$, ya que irá decreciendo hasta 300 €, sin alcanzarlo.

JUN 06

$R(x) = 2943 - 780x + 69x^2 - 2x^3$ $\boxed{\mathrm{dom}\, R = [9,14]}$

a) $R'(x) = -780 + 138x - 6x^2$

$R'(x) = 0 \to -6x^2+138x-780 = 0$; $x^2 - 23x + 130 = 0$; $x = \frac{23\pm\sqrt{529-520}}{2} = \frac{23\pm 3}{2}$ → 13, 10

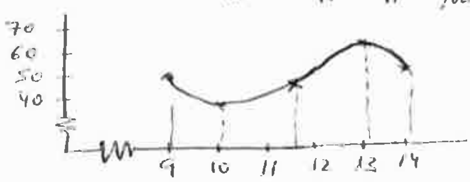
	9		10		13		14
R'		−		+		−	
R		↘		↗		↘	
			MIN		MAX		

El ruido crece de 10h a 13h
" " decrece de 9h a 10h y de 13h a 14h

$R(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=10$
" " " máximo relativo en $x=13$

b)

	X	R
	9	54
MIN	10	43
MAX	13	70
	14	59



Vemos que el máximo ruido es de 70db (a las 13h), que sí supera el límite de 65db, por lo tanto $\boxed{\text{se debe activar}}$ un plan de choque.

c) Que $R''(11'5) = 0$ significa que tiene un punto de inflexión en $x = 11'5$.
Es decir, que a esa hora el ruido, que sigue aumentando, empieza a crecer más lentamente.

JUN 06

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 53x + 150$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^4} - 53 = 2x - \frac{2}{x^3} - 53$$

$$f'(-0'5) = 2\cdot(-0'5) - \frac{2}{(-0'5)^3} - 53 = \boxed{-38}$$

SEPT 06

a)

$$R(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<600\\ 40+\dfrac{400+56x}{1640+0'1x} & x\ge 600\end{cases}$$

$164+0'1x=0 \longrightarrow x=\frac{-164}{0'1}=-1640$, R(x) no estaría definida en $x=-1640$, pero ese valor de x no pertenece al dominio $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{dom}\, R=[0,+\infty)}$

0 es obviamente continua en $[0,600)$ por ser constante

$40+\frac{400+56x}{1640+0'1x}$ es continua en $(600,+\infty)$ por ser una expresión racional con denominador distinto de 0

En $x=600$:

$\lim_{x\to 600^-} R(x)=0$

$R(600)=40+\frac{400+56\cdot 600}{1640+0'1\cdot 600}=60$

$\lim_{x\to 600^+} R(x)=\lim_{x\to 600^+}\left(40+\frac{400+56x}{1640+0'1x}\right)=60$

$\boxed{\text{R es discontinua en } x=600}$. Tiene una discontinuidad de salto finito. Se puede entender como que no reinvierte nada en bolsa con capitales menores que 600 €, pero a partir de ese momento ya invierte algo de dinero (al menos 60 €)

b)

$$R'(x)=\begin{cases}0 & 0<x<600\\ \dfrac{56(1640+0'1x)-(400+56x)\cdot 0'1}{(1640+0'1x)^2}=\dfrac{91800}{(1640+0'1x)^2} & x>600\end{cases}$$

$R'(x)=0 \longrightarrow \frac{91800}{(1640+0'1x)^2}=0$; $91800=0$ ✗

	0 — 600	600 — $+\infty$
R'	0	+
R	→	↗

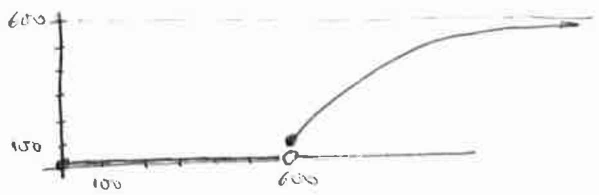
$\boxed{\text{R(x) no decrece para ningún valor de x}}$

$\lim_{x\to+\infty} R(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(40+\frac{400+56x}{1640+0'1x}\right)=40+\frac{56}{0'1}=600$

La cantidad reinvertida va aumentando hasta un máximo de 600€, por lo tanto $\boxed{\text{no superará los 1000 €}}$

c)

x	R
0	0
600^-	0
600	60
$+\infty$	600



JUN 07

$$P(t) = \begin{cases} 2+t^2 & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} & t > 1 \end{cases}$$

$2t^2 = 0 \rightarrow t = 0$. P(t) no estaría definida por anularse el denominador pero $t=0$ no pertenece al 2º trozo.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom } P = [0, +\infty)}$

a) $2+t^2$ es continua en $[0,1)$ por ser una expresión polinómica.

$\dfrac{8t^2-t-1}{2t^2}$ " " " $(1, +\infty)$ " " " " racional con denominador distinto de cero.

En $t=1$:

$\lim\limits_{t\to 1^-} P(t) = 2+1^2 = 3$

$P(1) = 2+1^2 = 3$

$\lim\limits_{t\to 1^+} P(t) = \dfrac{8\cdot 1^2 - 1 - 1}{2\cdot 1^2} = 3$

$\Longrightarrow$ P(t) es continua en $t=1$.

Por lo tanto $\boxed{P(t) \text{ es continua en } [0, +\infty)}$

b) $$P'(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ \dfrac{(16t-1)(2t^2) - (8t^2-t-1)\cdot 4t}{(2t^2)^2} = \dfrac{\cancel{32t^3} - 2t^2 - \cancel{32t^3} + 4t^2 + 4t}{4t^4} = \dfrac{2t^2+4t}{4t^4} = \dfrac{t+2}{2t^3} & t > 1 \end{cases}$$

$P'(t) = 0$ $\rightarrow$ $2t = 0 \rightarrow t = 0$

$\rightarrow$ $\dfrac{t+2}{2t^3} = 0 \rightarrow \cancel{t = -2}$ no pertenece al dominio

	0	1	$+\infty$
P'	+	+	
P	↗	↗	

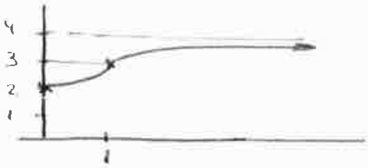
$\boxed{\text{La profundidad no disminuirá nunca}}$

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = \frac{8}{2} = 4.$$

La profundidad aumentará progresivamente sin alcanzar los 4m, por lo tanto $\boxed{\text{no se precisa elevar}}$ la altura del paseo marítimo.

c)

t	P
0	2
1	3
$+\infty$	4



JUN 07

$$f(x) = 4x - x^2 + \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 4 - 2x + \frac{-2\cdot 3x^2}{x^6} = 4 - 2x - \frac{6}{x^4}$$

$$f'(-2) = 4 - 2(-2) - \frac{6}{(-2)^4} = 4 + 4 - \frac{6}{4} = \boxed{6'5}$$

SEPT 07

a) $I(x) = \begin{cases} 4 - 0'025x & 0 \leq x \leq 60 \\ \dfrac{750+3x}{20+10x} & x > 60 \end{cases}$

$20+10x = 0 \rightarrow x=-2$ $I(x)$ no estaría definida en $x=-2$ por anularse el denominador, pero $x=-2$ no pertenece a su dominio. Por lo tanto: $\boxed{\text{dom } I = [0,+\infty)}$

$4-0'025x$ es continua en $[0,60)$ por ser una expresión polinómica.

$\dfrac{750+3x}{20+10x}$ " " " $(60,+\infty)$ " " " " racional con denominador distinto de 0.

En $x=60$:

$\lim\limits_{x\to 60^-} (4-0'025x) = 4-0'025\cdot 60 = 2'5$

$I(60) = 4-0'025\cdot 60 = 2'5$

$\lim\limits_{x\to 60^+} \dfrac{750+3x}{20+10x} = \dfrac{750+3\cdot 60}{20+10\cdot 60} = 1'5$

$\boxed{I(x) \text{ no es continua en } x=60}$, tiene una discontinuidad de salto finito. Puede explicarse como que la empresa tiene una política de ahorro distinta dependiendo de que su saldo sea menor o mayor que 60.000 €

b) $I'(x) = \begin{cases} -0'025 & 0<x<60 \\ \dfrac{3(20+10x)-(750+3x)\cdot 10}{(20+10x)^2} = \dfrac{-7440}{(20+10x)^2} & x>60 \end{cases}$

$I'(x)=0 \rightarrow -0'025 = 0$ ✗

$\rightarrow \dfrac{-7440}{(20+10x)^2} = 0$; $-7440 = 0$ ✗

$I(x)$ no se anula.

	0 — 60	60 — $+\infty$
$I'(x)$	−	−
$I(x)$	↘	↘

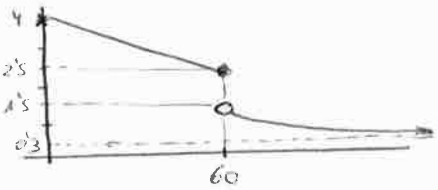
$\boxed{I(x) \text{ es siempre decreciente.}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} I(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{750+3x}{20+10x} = \dfrac{3}{10} = 0'3 \rightarrow 300$ €

La cantidad ingresada será cada vez menor, al aumentar el saldo a fin de mes, pero irá disminuyendo sin bajar nunca de 300 €. Por lo tanto, nunca ingresará menos de 100 € pero sí ingresará menos de 400 €.

c)

t	I
0	4
60	2'5
60^+	1'5
$+\infty$	0'3



JUN 08

$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4'5x^2 + 18x + 15 \qquad 0 \le x \le 7 \quad ; \quad R'(x) = \frac{3x^2}{3} - 9x + 18 = x^2 - 9x + 18$

a) $R'(x) = 0 \longrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \; ; \; x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$

	0 — 3	3 — 6	6 — 7
R'	+	−	+
R	↗	↘	↗
		MAX (3)	MIN (6)

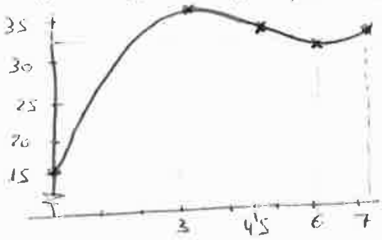
$\boxed{\begin{array}{l} R(x) \text{ es creciente en } [0,3) \cup (6,7] \\ \text{" " decreciente en } (3,6) \end{array}}$

" Tiene un máximo relativo en x = 3

" " " mínimo " " x = 6

b)

	X	R
	0	15
MAX	3	37'5
MIN	6	33
	7	34'83̂



Vemos que el mayor porcentaje de roca fragmentada se da a los 3 km de la boca y es de 37'5%, que no supera el 40% por lo que $\boxed{\text{no es necesario reforzar la estructura.}}$

c) Máximo Absoluto y Relativo en x = 3 : (3, 37'5)

Mínimo Absoluto en x = 0 : (0, 15)

" Relativo en x = 6 : (6, 33)

$R''(x) = 2x - 9$

$R''(x) = 0 \longrightarrow 2x - 9 = 0 \; ; \; x = 4'5 \longrightarrow \boxed{\text{Punto de Inflexión : } (4'5, 35'25)}$

SEPT 08

a) $V(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 34 \qquad 0 \le x \le 4'5$

$V'(x) = -3x^2 + 18x - 24$

$V'(x) = 0 \longrightarrow -3x^2 + 18x - 24 = 0 \; ; \; x^2 - 6x + 8 = 0 \; , \; x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

	0 — 2	2 — 4	4 — 4'5
V'	−	+	−
V	↘	↗	↘
		MIN (2)	MAX (4)

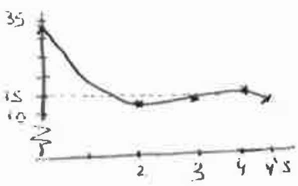
$\boxed{\begin{array}{l} \text{El volumen de agua decrece en } [0,2) \cup (4, 4'5] \\ \text{" " " " crece en } (2,4) \end{array}}$

V(x) Tiene un mínimo relativo en x = 2

" " " máximo relativo en x = 4

b)

	X	V
	0	34
MIN	2	14
MAX	4	18
	4'5	17'125
	3	16



Vemos que baja de 15 en un entorno de x = 2, donde baja incluso a 14, por lo tanto $\boxed{\text{si llegará a verse la Torre.}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l} \text{Mínimo Absoluto y Relativo en } x = 2 : (2, 14) \\ \text{Máximo Absoluto en } x = 0 : (0, 34) \\ \text{" Relativo en } x = 4 : (4, 18) \end{array}}$

$V''(x) = -6x + 18$

$V''(x) = 0 \longrightarrow -6x + 18 = 0 \; ; \; x = 3$

$\boxed{\text{Punto de Inflexión en } x = 3 : (3, 16)}$

JUN 09

a) $T(x) = 37\frac{x^2}{2} - 342x - \frac{x^3}{3} + 2124 \qquad 17 \le x \le 20$

$T'(x) = 37x - 342 - x^2$

$T'(x) = 0 \longrightarrow -x^2 + 37x - 342 = 0 \ ; \quad x = \frac{-37 \pm \sqrt{1369 - 1368}}{-2} = \frac{-37 \pm 1}{-2}$ → 18, 19

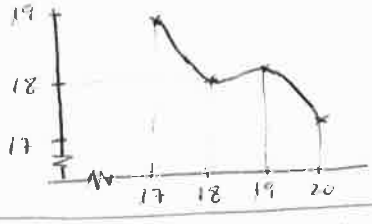
	17 – 18	18 – 19	19 – 20
T'	−	+	−
T	↘	↗	↘
	MIN (18)	MAX (19)	

$\boxed{\text{La Temperatura subió en } (18,19) \quad \text{" " bajó en } [17,18) \cup (19,20]}$

T(x) tiene un mínimo relativo en x = 18
" " " máximo " " x = 19

b)

	X	T
	17	$18'8\widehat{3}$
MIN	18	18
MAX	19	$18'1\widehat{6}$
	20	$17'\widehat{3}$



$\boxed{\text{La Temperatura más alta fue a las 17h : } 18{,}8\widehat{3}^{\circ} \quad \text{" " " baja fue a las 20h : } 17'\widehat{3}^{\circ}}$

c) $\boxed{\text{Ni el máximo relativo ni el mínimo relativo son absolutos}}$

SEPT 09

$P(x) = -12x^3 + 90x^2 - 144x + 84 \qquad 2 \le x \le 5$

a) $P'(x) = -36x^2 + 180x - 144$

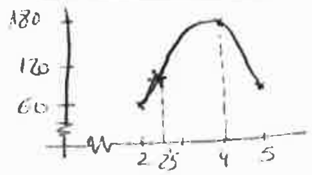
$P'(x) = 0 \longrightarrow 0 = -36x^2 + 180x - 144 \ ; \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \ ; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ → 4, ~~1~~ No pertenece al dominio

	2 – 4	4 – 5
P'	+	−
P	↗	↘
	MAX (4)	

$\boxed{\text{P(x) es creciente en } [2,4) \quad \text{" " decreciente en } (4,5] \quad \text{" tiene un máximo relativo en } x = 4}$

b)

	X	P
	2	60
MAX	4	180
	5	114



$\boxed{\text{La máxima potencia se alcanza para 4000 rev/min y es de 180 CV.}}$

$P''(x) = -72x + 180$

$P''(x) = 0 \longrightarrow 0 = -72x + 180 \ ; \quad x = \frac{180}{72} = 2'5$ $\quad \boxed{\text{Punto de inflexión en } x = 2'5 : (2'5, 99)}$

JUN 09

$f(x) = \frac{a}{x^2} + x^2$

$f'(x) = \frac{-2ax}{x^4} + 2x = \frac{-2a}{x^3} + 2x$

$f'(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-2a}{8} + 4 \ ; \quad 8 = -2a + 32 \ ; \quad 2a = 24 \ ; \quad \boxed{a = 12}$

JUN 10 fase General

a) $f(x) = \begin{cases} 56-6x & 0 \le x \le 5 \\ 20+\frac{30}{x} & x>5 \end{cases}$

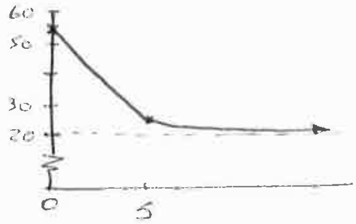
No estando definida en $x=0$, pero no pertenece a este trozo. Por lo tanto: $\boxed{\mathrm{dom} f = [0,+\infty)}$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 56-6\cdot 5 = 26$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 20+\frac{30}{5} = 26$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(20+\frac{30}{x}\right) = 20$

x	f
0	56
5	26
5^+	26
$+\infty$	20



$f'(x) = \begin{cases} -6 & 0<x<5 \\ -\frac{30}{x^2} & x>5 \end{cases}$

$f'(x)=0 \to -6=0$ ✗

$\to \frac{-30}{x^2}=0 \to -30=0$ ✗

No tiene extremos relativos.

	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	−	−	
$f(x)$	↘	↘	

$\boxed{f(x) \text{ es siempre decreciente}}$

Al ser f decreciente, su máximo valor es en $x=0$.

$\boxed{\text{La máxima temperatura es de } 60° \text{ en } x=0}$

b) La f(x) es siempre decreciente, la temperatura irá disminuyendo progresivamente sin llegar nunca a 20°C. $\boxed{\text{No será necesario recalentar el plato}}$

JUN 10 fase Específica

$f(x) = 2+x+\frac{9}{x}$ $\quad x\in(0,+\infty)$

$f'(x) = 1-\frac{9}{x^2}$

$f'(x)=0 \to 1-\frac{9}{x^2}=0 ; \quad 1=\frac{9}{x^2} ; \quad x^2=9 ; \quad x = \cancel{-3}$ no pertenece al dominio. $\to 3$

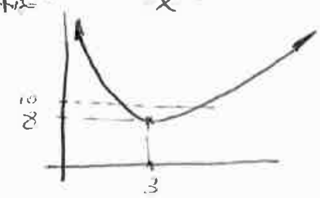
	0	3	$+\infty$
f'	−	+	
f	↘	↗	
		MIN	

f es decreciente en $(0,3)$
" " creciente en $(3,+\infty)$
" tiene un mínimo relativo en $x=3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2+x+\frac{9}{x}\right) = 2+0+\frac{9}{0^+} = 2+0+\infty = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(2+x+\frac{9}{x}\right) = 2+\infty+\frac{9}{+\infty} = 2+\infty+0 = +\infty$

	x	y
	0^+	$+\infty$
MIN	3	8
	$+\infty$	$+\infty$



El coste medio aumenta para más de 3Kg de alimento
Para minimizar el coste medio hay que producir 3Kg.

b) El coste medio puede ser inferior a 10 € en un entorno de $x=3$.

$\boxed{\text{No se necesita reajustar el proceso}}$

SEPT 10
Fase General

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{360}(120x - x^2) & 0 \le x < 60 \\ \frac{1200}{x} - 10 & 60 \le x \le 120 \end{cases}$

No estaría definida en $x=0$ por anularse de denominador, pero $x=0$ no pertenece a este trozo.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom} f = [0, 120]}$

$\frac{1}{360}(120x-x^2)$ es continua en $[0,60)$ por tratarse de una expresión polinómica.

$\frac{1200}{x}-10$ " " " $(60,120]$ " " " " " racional con denominador $\neq 0$.

En $x = 60$:

$\lim_{x\to 60^-} f(x) = \lim_{x\to 60^-} \frac{1}{360}(120x-x^2) = \frac{1}{360}(120\cdot 60 - 60^2) = 10$

$f(60) = \frac{1200}{60} - 10 = 10$

$\lim_{x\to 60^+} f(x) = \lim_{x\to 60^+}\left(\frac{1200}{x} - 10\right) = \frac{1200}{60} - 10 = 10$

$f(x)$ es continua en $x=60$.

Por lo tanto, $\boxed{f(x) \text{ es continua en } [0,120]}$

b) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{360}(120 - 2x) & 0 < x < 60 \\ -\frac{1200}{x^2} & 60 < x < 120 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \begin{cases} \frac{1}{360}(120-2x) = 0 \;;\; 120 - 2x = 0 \;;\; x = 60 \\ -\frac{1200}{x^2} = 0 \;;\; 1200 = 0 \;\; \times \end{cases}$

NOTA: En realidad, la derivada de f en $x=60$ no está definida, ya que f' no toma el mismo valor a izquierda y derecha de $x=60$, pero a efectos de estudio de signo de f' nos puede servir.

	0 – 60	60 – 120
f'	+	−
f	↗	↘

$\boxed{\text{La altura del agua empieza a decrecer pasados 60 minutos}}$

SEPT 10
Fase Específica

a) $f(x) = 270x^2 - 30x^3 \quad 0 \le x \le 9$

$f'(x) = 540x - 90x^2$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 540x - 90x^2 = 0 \;;\; 90x(6-x) = 0 \;;\; x = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$

	0 – 6	6 – 9
f'	+	−
f	↗	↘

$\boxed{\text{La ganancia crece en los 6 primeros años para decrecer a continuación.}}$

b) La mayor ganancia será en el $\boxed{6^\circ \text{ año}}$.

$x = 6 \longrightarrow f(6) = 270\cdot 6^2 - 30\cdot 6^3 = 3240$

Ganará entonces $\boxed{3240\ €}$

JUN 11 fase general

a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 < x < 30 \\ 2x+30 & \text{si } x \geq 30 \end{cases} \longrightarrow$ $\text{dom} f = (0,30) \cup [30,+\infty) = (0,+\infty)$ por sus expresiones polinómicas.

$3x$ y $2x+30$ son polinómicas, por lo tanto continuas en $\mathbb{R}$.

Esto implica que $f(x)$ es continua en $(0,30)$ y en $(30,+\infty)$

Veamos en $x = 30$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 30^-} f(x) = 3 \cdot 30 = 90 \\ f(30) = 2 \cdot 30 + 30 = 90 \\ \lim_{x \to 30^+} f(x) = 2 \cdot 30 + 30 = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 30$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ es continua en } (0,+\infty)}$

La velocidad es una función continua del tiempo.

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(30^-) = 3 \\ f'(30^+) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 30$$

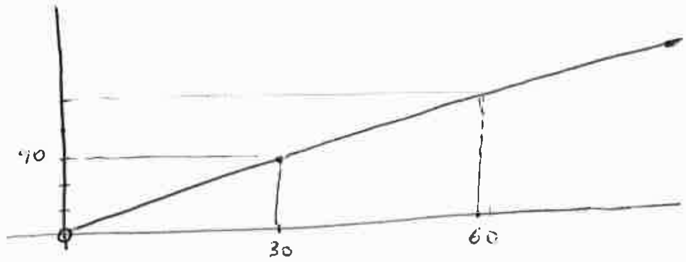
$f'(x) = 0$ → $3 = 0$ si $0 < x < 30$; → $2 = 0$ si $x > 30$. No hay puntos críticos.

	0		30		$+\infty$
f'		+		+	
f		↗		↗	

$\boxed{f(x) \text{ es creciente en } (0,30) \cup (30,+\infty). \; f(x) \text{ también es creciente en } x=3 \text{ pero tiene un punto anguloso.}}$

x	y
0^+	0
30^-	90
30	90
60	150
$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (2x+3) = +\infty$



JUN 11 fase específica

a) $f(x) = \begin{cases} 110 + 12x + 6x^2 & \text{Si } 1 \leq x \leq 3 \\ 350 - \frac{450}{x} & \text{Si } x > 3 \end{cases}$

$110 + 12x + 6x^2$ es polinómica, por lo que está definida, es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

$350 - \frac{450}{x}$ es racional, por lo que está definida, es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que en $x=0$ se anula el denominador.

Como $0 \not> 3 \Rightarrow \operatorname{dom} f = [0,3] \cup (3,+\infty) = [0,+\infty)$

Veamos la continuidad en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 110 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 = 200 \\ f(3) = 110 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 = 200 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 350 - \frac{450}{3} = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=3$$

Por lo tanto, $\boxed{f(x) \text{ es continua en } [1,+\infty)}$, la velocidad es una función continua del tiempo.

b) $f'(x) = \begin{cases} 12 + 12x & \text{Si } 1 < x < 3 \\ -\frac{-450 \cdot 1}{x^2} = \frac{450}{x^2} & \text{Si } x > 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 12 + 12 \cdot 3 = 48 \\ f'(3^+) = \frac{450}{3^2} = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=3\text{, tiene un punto anguloso.}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12 + 12x = 0$ (Si $1 < x < 3$) $\rightarrow \cancel{x=-1}$ No sirve porque $x=-1 \notin (1,3)$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{450}{x^2} = 0$ (Si $x > 3$) $\rightarrow 450 = 0$ ✗

$f(x)$ no tiene puntos críticos.

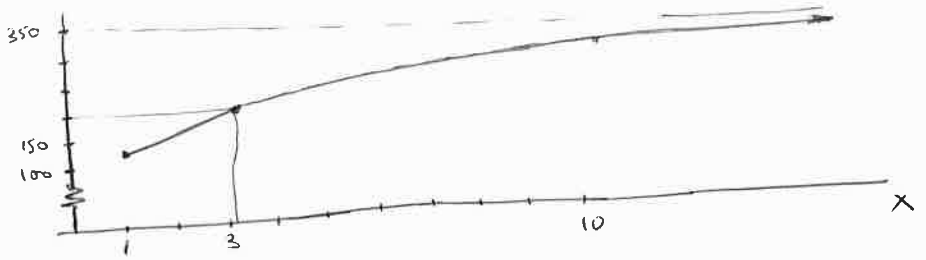
	1 — 3	3 — $+\infty$
f'	+	+
f	↗	↗

$f(x)$ es siempre creciente, por lo que su máximo valor lo tendrá en el extremo derecho de su dominio, que es $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(350 - \frac{450}{x}\right) = 350 - \frac{450}{+\infty} = 350 - 0 = 350$$

Por lo tanto, al pasar el tiempo la velocidad irá aumentando tendiendo al valor de 350 km/h, que no alcanzará nunca.

x	y
1	128
3	200
3^+	200
10	305
$+\infty$	350



SEPT 11
Fase
General

a) $f(x) = 2 + \frac{x}{90} + \frac{90}{x}$. $x > 10$

$f(x)$: consumo en l a una velocidad de x Km/h

a) $2 + \frac{x}{90} + \frac{90}{x} \longrightarrow$ dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$, pero $0 \not> 10 \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = (10, +\infty)}$

$f(x)$ es una función racional está definida, es continua y derivable en $(10, +\infty)$

$f(10^+) = 2 + \frac{10}{90} + \frac{90}{10} = 11'1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{x}{90} + \frac{90}{x}\right) = 2 + \frac{+\infty}{90} + \frac{90}{+\infty} = 2 + \infty + 0 = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{90} - \frac{90}{x^2}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{90} = \frac{90}{x^2}$; $x^2 = 8100$; $x = \pm\sqrt{8100}$ — 90 Punto crítico; $\cancel{-90} \notin (10, +\infty)$

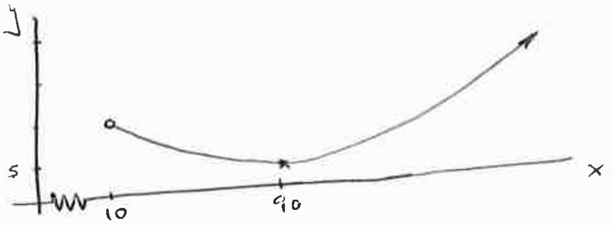
	10		90		$+\infty$
Signo f'		$-$		$+$	
f		↘	MIN	↗	

f es decreciente en $(10, 90)$

f " creciente en $(90, +\infty)$

f tiene un máximo relativo en $x = 90 \longrightarrow f(90) = 2 + \frac{90}{90} + \frac{90}{90} = 4$

	x	y
	10^+	$11'1$
MIN	90	4
	$+\infty$	$+\infty$



Debe circular a 90 Km/h para consumir la menor cantidad de combustible posible, que es de 4 l

b) Por encima de 90 Km/h el consumo aumenta al aumentar la velocidad. Como el mínimo consumo es de 4 l, no puede circular consumiendo menos.

b]

$y=10x-x^2$

$y'=10-2x$

$y'=0 \rightarrow x=5$

	0	5	8
y'	+	-	
y	↗	↘	
		MAX	

Tiene un máximo relativo en $x=5$.

$y=\dfrac{1024}{x^2}$

$y'=\dfrac{-1024\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{-1024}{x^3}$

$y'=0 \rightarrow$ No se anula

	8	12
y'	-	
y	→	

Es siempre decreciente.

Por lo tanto el momento en que la placa produce más energía es a las $\boxed{5h}$, produciendo $f(5)=10\cdot 5-5^2=\boxed{25}$

JUN 12 fase específica

$y=12-x^2$

$x_v=\dfrac{-0}{-2}=0 \rightarrow y_v=12$

$x=0 \rightarrow y=12$

$y=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{12}$

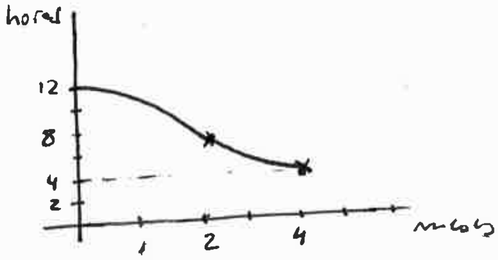
$y=(x-4)^2+4=x^2-8x+20$

$x_v=\dfrac{+8}{2}=4 \rightarrow y_v=4$

$x=0 \rightarrow y=20$

$y=0 \rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-80}}{2}$ ✗

	x	$f(x)$
V.	0	12
	2	8
	2^+	8
V	4	4



a] $12-x^2$, $(x-4)^2+4$ son continuas por ser polinómicas.

Veamos en $x=2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=12-2^2=8$

$f(2)=12-2^2=8$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=(2-4)^2+4=8$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=2$

Por lo tanto $f(x)$ es $\boxed{\text{continua en } [0,4]}$

b] Vemos que toma el valor mínimo de $\boxed{4 \text{ horas}}$ para un empleado que lleva $\boxed{4 \text{ meses}}$.

Como $(4,4)$ es el vértice de la 2ª parábola, el mínimo está en 4 horas y $\boxed{\text{no podrá ser de 3 horas}}$

También:

$y=3 \Rightarrow$

$\nearrow 12-x^2=3$; $x^2=9$; $x=\cancel{\pm 3}$ debe ser $0<x\leq 2$

$\searrow (x-4)^2+4=3$; $x^2-8x+20=3$; $x^2-8x+17=0$;

$x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-68}}{2}$ ✗ Sin solución.

JUL 12 fase general

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 10x^2 - 69x + 200 \qquad 0 \le x \le 10$$

a) $f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + 20x - 69 = x^2 + 20x - 69$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 20x - 69 = 0$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400+276}}{2} = \frac{-20 \pm 26}{2} = \begin{cases} 3 \\ \cancel{-23} \end{cases} \text{ (debe ser } 0 \le x \le 10)$$

	0	3	10
f'	−	+	
f	↘	↗	
		MIN	

$\boxed{f(x) \text{ decrece en } [0,3) \text{ y crece en } (3,10]}$

b) El mínimo es a los $\boxed{3 \text{ años}}$ y vale: $\frac{3^3}{3} + 10\cdot 3^2 - 69\cdot 3 + 200 = \boxed{92}$

JUL 12 fase específica

$$f(x) = 250 - \frac{250}{x+1} - 10x \qquad 0 \le x \le 24$$

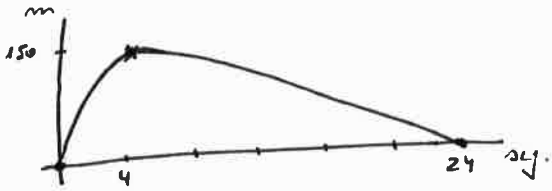
$\frac{250}{x+1}$ no estaría definido en $x=-1$, pero debe ser $0 \le x \le 24$

a) $f'(x) = 0 - \frac{0-250}{(x+1)^2} - 10 = \frac{250}{(x+1)^2} - 10$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{250}{(x+1)^2} = 10$; $25 = (x+1)^2$; $\pm 5 = x+1$; $x = \begin{cases} 4 \\ \cancel{-6} \end{cases}$ (debe ser $0 \le x \le 24$)

	0	4	24
f'	+	−	
f	↗	↘	
		MAX	

	x	y
	0	0
MAX	4	150
	24	0



Empieza a caer a los $\boxed{4 \text{ segundos}}$ del lanzamiento

b) Como vemos en la gráfica, alcanzando como máximo 150 m, por lo que $\boxed{\text{no llegaría a } 250\text{ m}}$

También:

$y = 250 \Rightarrow \cancel{250} = \cancel{250} - \frac{250}{x+1} - 10x$; $10x = -\frac{250}{x+1}$;

$10x^2 + 10x + 250 = 0$

$x^2 + x + 25 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-100}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-99}}{2}$ Sin solución real

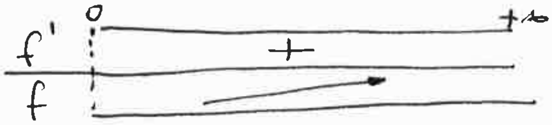
JUN 13 fase general

$$f(x) = \frac{900x+200}{x+10}, \quad x>0$$

$f(x)$ no está definida en $x=-10$, pero no cumple que $x>0$.

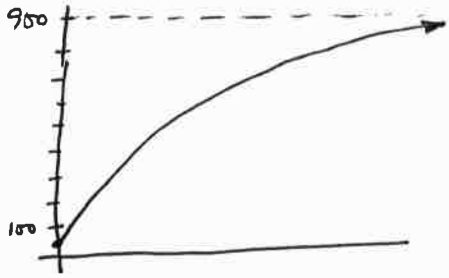
$$f'(x) = \frac{900(x+10)-(900x+200)}{(x+10)^2} = \frac{\cancel{900x}+9000-\cancel{900x}-200}{(x+10)^2} = \frac{8800}{(x+10)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{8800}{(x+10)^2}=0 \; ; \; 8800=0 \; \nexists \quad f' \text{ no se anula.}$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{900x+200}{x+10} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{900+\frac{200}{x}}{1+\frac{10}{x}} = \frac{900+0}{1+0} = 900$$

x	y
0^+	20
$+\infty$	900



a) La temperatura siempre está aumentando

b) La temperatura tiende a 900°C, pero sin alcanzarla. La temperatura no llegará a 1000°C y no habrá nunca. Por lo tanto no llegará a que apagar el horno.

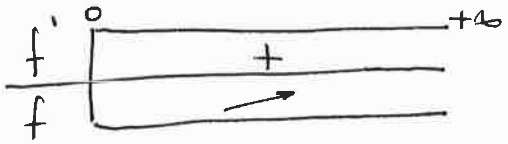
JUN 13 fase específica

$$f(x) = 10\,\frac{3x+4}{2x+5}, \quad x\geq 0$$

$f(x)$ no está definida en $x=-5/2$ que no es $x\geq 0$.

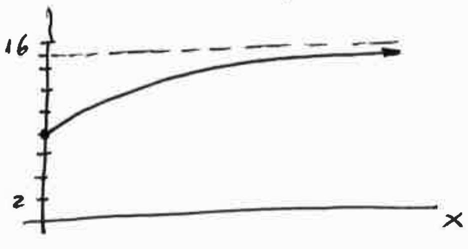
$$f'(x) = 10\,\frac{3(2x+5)-(3x+4)\cdot 2}{(2x+5)^2} = 10\,\frac{\cancel{6x}+15-\cancel{6x}-8}{(2x+5)^2} = \frac{70}{(2x+5)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{70}{(2x+5)^2}=0 \; ; \; 70=0 \; \nexists \quad f' \text{ no se anula.}$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 10\,\frac{3x+4}{2x+5} = 10\cdot\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} 10\,\frac{3+4/x}{2+5/x} = 10\cdot\frac{3+0}{2+0} = 15$$

x	y
0	8
$+\infty$	15



a) La temperatura no disminuye en ningún momento

b) La temperatura inicial $(x=0)$ es de 8°C. La temperatura que puede alcanzar es de 16°, como la máxima temperatura que puede alcanzar no llegará a 20°C. No hay riesgo de que se deteriore la pieza.

JUL 13
fase
General

$f(x) = 20x - 5x^2 + 60 \quad ; \quad x \geq 0$

$f'(x) = 20 - 10x$

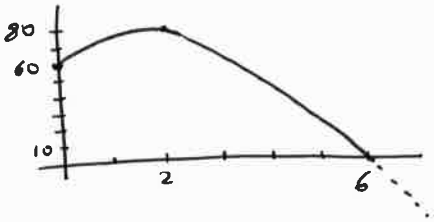
$f'(x) = 0 \longrightarrow x = 2$

	0		2		$+\infty$
f'		+		−	
f		↗	MAX	↘	

	x	y
	0	60
MAX	2	80
	6	0

$y = 0 \Rightarrow 20x - 5x^2 + 60 = 0$

$x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{-10} = \dfrac{-20 \pm 40}{-10} = \begin{cases} \cancel{-2} & \text{porque no es } \geq 0 \\ 6 \end{cases}$



a) La altura máxima es de 80m, que alcanza a los 2 segundos

b) Para $(x=0)$, la altura es de 60m, es que lanzamos la pelota.

Llega al suelo $(y=0)$ a los 6 segundos de lanzarla.

JUL 13
fase
específica

$f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0'6 \\ 180(1-x) & \text{si } 0'6 < x \leq 1 \end{cases}$

a) $300x(1-x)$, $180(1-x)$ son continuas porque son polinómicas.

Veamos en $x = 0'6$:

$\lim\limits_{x \to 0'6^-} f(x) = 300 \cdot 0'6(1-0'6) = 72$

$f(0'6) = 300 \cdot 0'6(1-0'6) = 72$

$\lim\limits_{x \to 0'6^+} f(x) = 180(1-0'6) = 72$

$\Rightarrow$ Es continua en $x = 0'6$

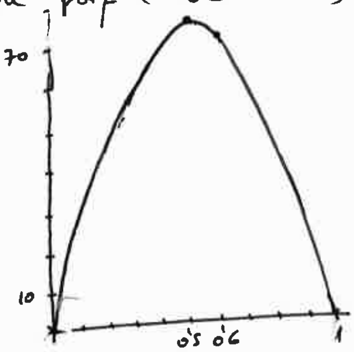
c) Por lo tanto el rendimiento es continuo en el tiempo.

b) $f'(x) = \begin{cases} 300(1-x) + 300x \cdot (-1) \\ 180 \cdot (-1) \end{cases} = \begin{cases} -600x + 300 & \text{si } 0 < x < 0'6 \\ -180 & \text{si } 0'6 < x < 1 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} -600x + 300 = 0 \Rightarrow x = 0'5 \ ✓ \ (\text{vale, porque } 0 < 0'5 < 0'6) \\ -180 = 0 \ \times \end{cases}$

	0		0'5		0'6		1
f		+		−		−	
f'		↗	MAX	↘		↘	

	x	y
	0	0
MAX	0'5	75
	0'6	72
	$0'6^+$	72
	1	0



El rendimiento aumenta la 1ª media hora, para disminuir a continuación hasta el final del examen.

El mayor rendimiento es 75 para $x = 0'5$ h

JUN 14 fase General

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{2-x} & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{ax+b} & \text{si } 0\le x<1 \\ 1-\frac{x^2}{3} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

a)

- Para que f sea continua en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2} \\ f(0) = \frac{2}{a\cdot 0+b} = \frac{2}{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{2}{a\cdot 0+b} = \frac{2}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{b} \; ; \; \boxed{b=4}$$

- Para que f sea continua en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{a+b} \\ f(1) = 1-\frac{1^2}{3} = \frac{2}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1-\frac{1^2}{3} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{a+b} \; ; \; a+b=3 \; ; \; a+4=3 \; ; \; \boxed{a=-1}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{2-x} & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{4-x} & \text{si } 0\le x<1 \\ 1-\frac{x^2}{3} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

- Veamos los restantes valores de x:

$\frac{1+x}{2-x}$ es continua salvo en $x=2$, pero $2 \not< 0$.

$\frac{2}{4-x}$ es continua salvo en $x=4$, pero $4\notin[0,1)$

$1-\frac{x^2}{3}$ es continua en todos los reales por ser polinómica.

Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

b)

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1\cdot(2-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2} & \text{si } x<0 \\ \frac{0-2\cdot(-1)}{(4-x)^2} = \frac{2}{(4-x)^2} & \text{si } 0<x<1 \\ -\frac{2x}{3} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$

- $\frac{3}{(2-x)^2}=0$; $3=0$ ✱ no se anula en $(-\infty,0)$
- $\frac{2}{(4-x)^2}=0$; $2=0$ ✱ no se anula en $(0,1)$
- $-\frac{2x}{3}=0$; $x=0$ ✱ no es válido porque $0\not>1$, por lo tanto, no se anula en $(1,+\infty)$

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
f'	+	+	−
f	↗	↗	↘

MAX (en $x=1$)

f es creciente en $(-\infty,1)$

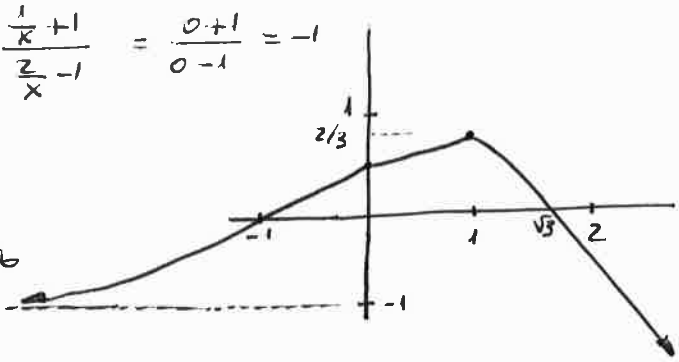
f es decreciente en $(1,+\infty)$

Es un máximo relativo, pero la derivada en él no se anula por no ser derivable, hay cambio del 2º al 3er trozo

x	y
$-\infty$	-1
-1	0
0^-	$1/2$
0	$1/2$
1^-	$2/3$
1	$2/3$
$\sqrt{3}$	0
$+\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{2-x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{x^2}{3}\right) = 1-\infty = -\infty$$



JUN 14
fase
Específica

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 12x + 100 \quad (x \geq 0)$$

a) $f'(x) = 3x^2 - 20x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-144}}{6} = \frac{20 \pm 16}{6} \begin{cases} 6 \\ 2/3 \end{cases}$$

	0	$2/3$	6	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		MAX	MIN	

El coste disminuye produciendo $\boxed{\text{entre } 2/3 \text{ y } 6 \text{ artículos}}$.

b) El coste mínimo, observando el diagrama anterior, puede ser en $x=0$ ó en $x=6$:

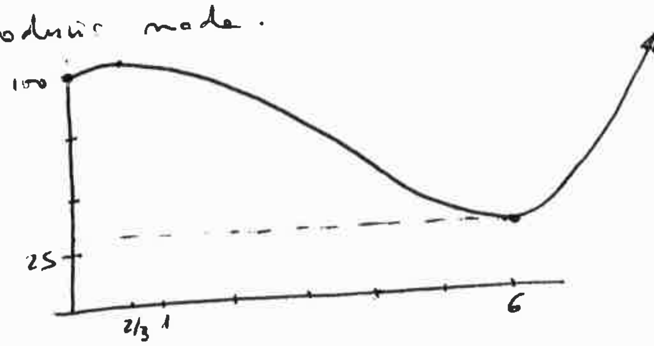
$f(0) = 100$

$f(6) = \boxed{28} \longleftarrow$ Mínimo coste $= 28$ para 6 artículos producidos.

c) $f(0) = \boxed{100}$ es el coste sin producir nada.

La gráfica sería:

x	y
0	100
MAX $2/3$	$101'63$
MIN 6	28
$+\infty$	$+\infty$



JUL 14 fase General

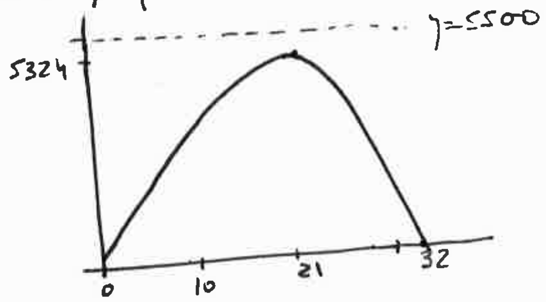
a) $f(x) = (x+1)^2(32-x) \quad (0 \leq x \leq 32)$

$f'(x) = 2(x+1)(32-x) + (x+1)^2\cdot(-1) = (x+1)(64-2x-x-1) = (x+1)(63-3x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x = \begin{cases} \cancel{-1} & \text{no es válido porque } -1 \notin [0,32] \\ 21 \end{cases}$

	0 – 21	21 – 32
f'	+	−
f	↗	↘

x	y
0	32
21	5324
32	0



Se maximiza la producción a 21° llegando a 5324.

b) Como el máximo absoluto está en 5324, no sobrepasará 5500.

JUL 14 fase Específica

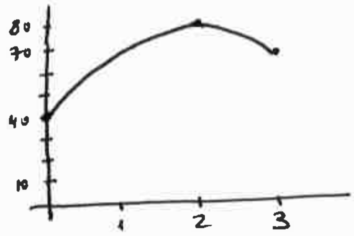
a) $f(x) = -10x^2+40x+40 \quad (0 \leq x \leq 3)$

$f'(x) = -20x+40$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

	0 – 2	2 – 3
f'	+	−
f	↗	↘
	MAX	

	x	y
	0	40
MAX	2	80
	3	70



Se presta la máxima atención (80) a los 2 minutos.

b) Se presta la mínima atención (40) al comienzo del anuncio

c) Al final del anuncio el nivel de atención es de 70.

JUN 15 fase General

$y = \frac{x^2}{10} - 2x + 300 \quad (18 \leq x \leq 50)$

Vértice: $x_v = \frac{+2}{2\cdot\frac{1}{10}} = 10 \rightarrow y_v = 290$

El vértice está fuera del intervalo $18 \leq x \leq 50$

x	y
18	296'4
50	450

$y = -x^2 + 134x - 3750 \quad (50 < x \leq 70)$

Vértice: $x_v = \frac{-134}{-2} = 67 \rightarrow y_v = 739$

	x	y
	50	450
V.	67	739
	70	730

Vamos que resulta ser continua en $x=50$ porque:

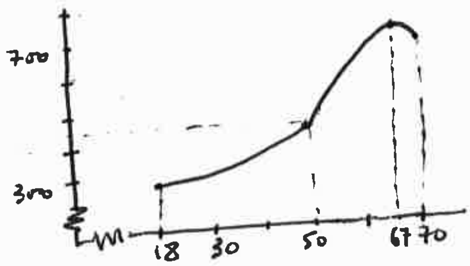
$\lim_{x\to 50^-} f(x) = f(50) = +\frac{50^2}{10} - 2\cdot 50 + 300 = 450$

$\lim_{x\to 50^+} f(x) = -50^2 - 2\cdot 50 + 300 = 450$

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x=50$

b) El máximo absoluto es en $x=67$, que será la edad a la que los clientes requieren más tiempo de atención, concretamente 739 min

El mínimo absoluto está en $x=18$, edad a la que los clientes necesitan menos tiempo, 296'4 min



JUN 15 fase específica

$$f(x) = \begin{cases} 1000 & si\ 0 \le x < 1 \\ 900 + 100x & si\ 1 \le x < 3 \\ 890 + \dfrac{691x+5}{x+2} & si\ x \ge 3 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < x < 1 \\ 100 & si\ 1 < x < 3 \\ \dfrac{+691(x+2) - (691x+5)}{(x+2)^2} = \dfrac{1277}{(x+2)^2} & si\ x > 3 \end{cases}$$

- f es continua en $[0,1)$ por ser una función constante,
- f " " " $(1,3)$ " " " " polinómica,
- f " " " $(3,+\infty)$ " " " " racional y no anularse el denominador, ya que $-2 \notin (3,+\infty)$

Veamos ahora $x=1$, $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1000 \\ f(1) = 900 + 100\cdot 1 = 1000 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 900 + 100\cdot 1 = 1000 \end{array}\right| \longrightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = 900 + 100\cdot 3 = 1200 \\ f(3) = 890 + \dfrac{691\cdot 3+5}{3+2} = 1305'6 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 890 + \dfrac{691\cdot 3+5}{3+2} = 1305'6 \end{array}\right| \longrightarrow f \text{ es discontinua en } x=3 \text{ de tipo Salto Finito}$$

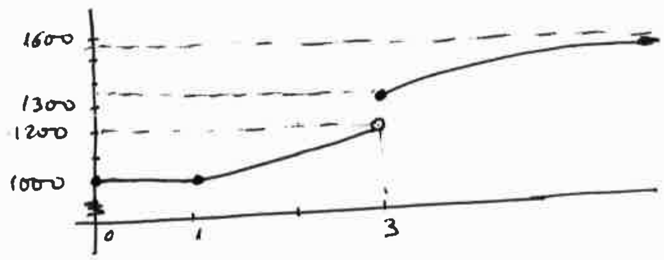
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \ \checkmark \\ 100 = 0 \ \text{Absurdo} \\ \dfrac{1277}{(x+2)^2} = 0 \to 1277 = 0 \ \text{Absurdo.} \end{cases}$$

	0 – 1	1 – 3	3 – $+\infty$
f'	0	+	+
f	Horiz.	↗	↗

f no decrece en ningún intervalo de su dominio.

x	y
0	1000
1^-	1000
1	1000
3^-	1200
3	1305'6
$+\infty$	1581

$$\longleftarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(890 + \frac{691x+5}{x+2}\right) = 890 + \frac{691}{1} = 1581$$



Su sueldo mínimo será de 1000 € durante el primer mes de formación. A partir del 1er mes y hasta el 3º, va aumentando su sueldo linealmente. En el 3er mes tiene una abrupta subida de 1200 a 1305'6 €, para ir aumentando de 1581 € progresivamente sin subir nunca de 1581 €

b) Podría llegar a cobrar 1500 €, pero no 1600 €. Su máximo es 1581 €.

$y = 1500$ € $\Rightarrow 1500 = 890 + \dfrac{691x+5}{x+2}$; $610 = \dfrac{691x+5}{x+2}$; $610x + 1220 = 691x + 5$;

$1215 = 81x$; $x = 15 \Rightarrow \boxed{15 \text{ meses}}$ para ganar 1500 €

JUL 15 fase General

$f(x) = x^2+2x \quad (x>0) \longrightarrow f'(x)=2x+2$

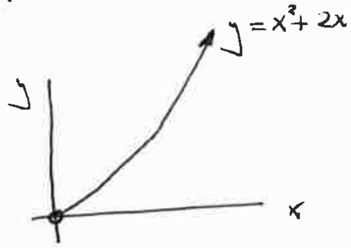
a) $f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0$; $\cancel{x=-1}$ que está fuera de su dominio.

	0		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

Por lo tanto f es creciente en su dominio. No decrecerá nunca la temperatura.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	y
0^+	0
$+\infty$	$+\infty$



b) $y=120 \Rightarrow x^2+2x=120$; $x^2+2x-120=0$

$x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+480}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{484}}{2} = \dfrac{-2\pm22}{2} \begin{cases} 10 \\ \cancel{-12} \end{cases}$

Se detendrá para $\boxed{x=10 \text{ minutos}}$

JUL 15 fase Específica

$f(x) = -\dfrac{x^2}{30}+3x-5 \quad (18\le x\le 65) \longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x}{15}+3$

a) $f'(x)=0 \Rightarrow -\dfrac{x}{15}+3=0$; $x=45$

	18		45		65
f'		$+$		$-$	
f		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

El gasto disminuye a partir de los 45 años

b) El mayor gasto sería a los 45 años y sería: $-\dfrac{45^2}{30}+3\cdot45-5=\boxed{62'5\ €}$

El menor gasto podría estar en 18 años ó en 65 años, tenemos que comparar:

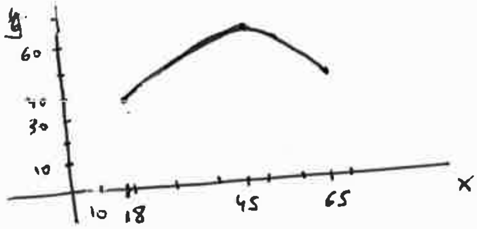
$f(18) = -\dfrac{18^2}{30}+3\cdot18-5 = 38'2$

$f(65) = -\dfrac{65^2}{30}+3\cdot65-5 = 49'16$

→ El menor gasto, 36'4 €, estaría en los 18 años

c)

	x	y
	18	38'2
MAX	45	62'5
	65	49'16



Junio 16 fase General

$$f(x)=\begin{cases}10x-\dfrac{5x^2}{4}+1800 \\ 1805\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases}10-\dfrac{5x}{2} & \text{si } 0<x<10 \\ 0 & \text{si } x>10\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 10-\frac{5x}{2}=0 \;;\; 10=\frac{5x}{2} \;;\; 20=5x \;;\; x=4$$

	0 — 4	4 — 10	10 — $+\infty$
f'	+	−	0
f	↗	↘	→

MAX (en $x=4$)

$$\lim_{x\to 10^-} f(x) = 10\cdot 10-\frac{5\cdot 10^2}{4}+1800 = 1775$$

$$f(10)= 10\cdot 10-\frac{5\cdot 10^2}{4}+1800 = 1775$$

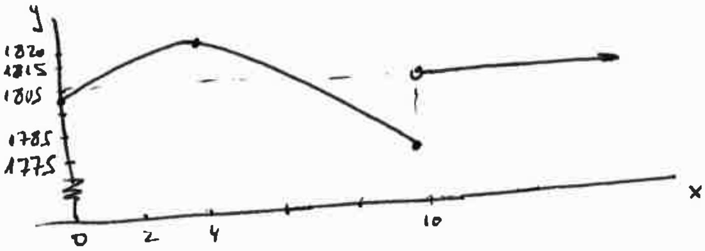
$$\lim_{x\to 10^+} f(x) = 1805$$

Al tener expresiones polinómicas, f(x) es continua en todos los valores de x, salvo en x=10, donde tiene una discontinuidad de salto finito

$f(0)=1800$
$f(10)=1775$
$f(x)=1805 \; (x>10)$

→ El valor mínimo es de $x=10$.

El beneficio mensual es mínimo vendiendo 10 Toneladas, va creciendo vendiendo hasta 4 Toneladas, pero baja vendiendo desde 4 hasta 10 Toneladas. Por encima de 10 Toneladas el beneficio mensual es constante.



x	y
0	1800
MAX 4	1820
10	1775

El beneficio máximo, vendiendo 4 toneladas, es de 1820.000 €

Por lo tanto no se podrían alcanzar beneficios de 1900000 €, pero sí de 1815000 €:

$$1815 = 10x-\frac{5x^2}{4}+1800 \;;\; \frac{5x^2}{4}-10x+15=0 \;;\; 5x^2-40x+60=0 \;;\; x^2-8x+12=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2} \begin{cases}6\\2\end{cases}$$

Vendiendo 2 ó 6 Toneladas, el beneficio sería de 1815000 €

Junio 16 fase Específica

$$f(x)=40-6x+x^2 \longrightarrow f'(x)=-6+2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -6+2x=0 \;;\; x=3$$

	0 — 3	3 — $+\infty$
f'	−	+
f	↘	↗

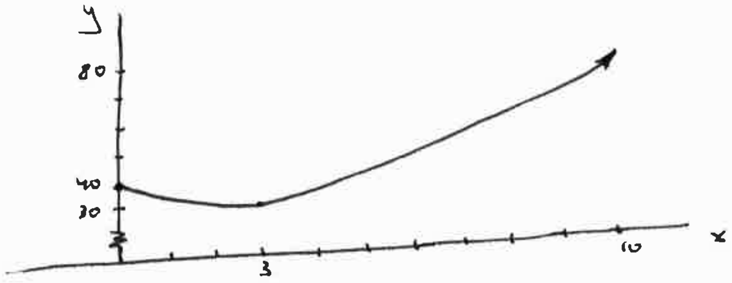
MIN (en $x=3$)

Los costes disminuyen fabricando hasta 3 artículos. De 3 en adelante los costes aumentan indefinidamente.

El mínimo coste, produciendo 3 artículos es: $f(3)=40-6\cdot 3+3^2=\boxed{31}$

Si no se produce ningún artículo, los costes son: $f(0) = \boxed{40}$

x	y
0	40
3	31
10	80



Julio 16 fase General

$f(t) = 48t - 6t^2 \quad (0 \le t \le 8)$

a) $f(t) = 0 \Rightarrow 48t - 6t^2 = 0 \; ; \; 6t \cdot (8-t) = 0$ → $t=0$; $t=8$

El rendimiento es nulo al inicio $(t=0)$ y al final $(t=8)$ de su jornada de trabajo.

b) $f'(t) = 48 - 12t$

$f'(t) = 0 \Rightarrow 48 - 12t = 0 \; ; \; t = 4$

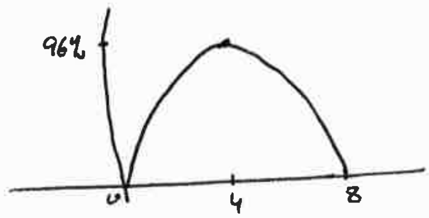
	0	4	8
f'	+	−	
f	↗	↘	
		MAX	

El rendimiento va aumentando hasta la mitad de la jornada $(x=4)$ disminuyendo a partir de ese momento.

El rendimiento es máximo a las 4 h : $f(4) = 48 \cdot 4 - 6 \cdot 4^2 = \boxed{96\%}$

c)

x	y
0	0
4	96
8	0



Julio 16 fase Específica

$$f(x) = \begin{cases} 16x - x^2 & 0 \le x \le 10 \\ 10 + \frac{500}{x} & 10 < x \le 30 \end{cases}$$

a) Las dos expresiones de $f(x)$ nos indican la continuidad en ambos trozos, la del 2º trozo no estaría definida en $x=0$, pero este valor es del 1er trozo. Veamos la continuidad en $x=10$:

$\lim_{x \to 10^-} f(x) = 16 \cdot 10 - 10^2 = 60$

$f(10) = 16 \cdot 10 - 10^2 = 60$

$\lim_{x \to 10^+} f(x) = 10 + \frac{500}{10} = 60$

$f(x)$ es continua en $x=10$.

Por lo tanto la temperatura es una función continua del tiempo.

$$f'(x) = \begin{cases} 16-2x & 0<x<10 \\ -\dfrac{500}{x^2} & 10<x<30 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 16-2x=0 \ ; \ x=8$$

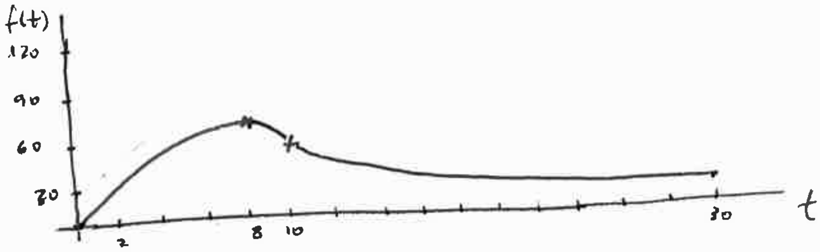
$$\rightarrow -\frac{500}{x^2}=0 \ ; \ -500=0 \quad \underline{\text{Absurdo}}$$

	0 – 8	8 – 10	10 – 30
f'	+	−	−
f	↗	↘	↘

La temperatura máxima se alcanza a los 8 minutos y es: $f(8) = 16\cdot 8 - 8^2 = \boxed{64\ ºC}$

b)

t	f(t)
0	0
8	112
10	60
30	26'6



Modelo 17 Ver junio 16 fase General