Cálculo Integral en exámenes BI - NM

Mayo 00 P2#4

(a) Sketch the graph of $y = \pi \sin x - x$, $-3 \le x \le 3$, on millimetre square paper, using a scale of 2 cm per unit on each axis.

Label and number both axes and indicate clearly the approximate positions of the x-intercepts and the local maximum and minimum points.

(b) Find the solution of the equation

$$\pi \sin x - x = 0, \qquad x > 0.$$

(c) Find the indefinite integral

$$\int (\pi \sin x - x)\mathrm{d}x$$

and hence, or otherwise, calculate the area of the region enclosed by the graph, the x-axis and the line $x = 1$.

Nov 00 P2#3

In this question you should note that radians are used throughout.

(a) (i) Sketch the graph of $y = x^2 \cos x$, for $0 \le x \le 2$ making clear the approximate positions of the positive x-intercept, the maximum point and the end-points.

(ii) Write down the **approximate** coordinates of the positive x-intercept, the maximum point and the end-points.

(b) Find the **exact value** of the positive x-intercept for $0 \le x \le 2$.

Let R be the region in the first quadrant enclosed by the graph and the x-axis.

(c) (i) Shade R on your diagram.

(ii) Write down an integral which represents the area of R.

(d) Evaluate the integral in part (c)(ii), either by using a graphic display calculator, or by using the following information.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x) = x^2 \cos x.$$

Mayo 01 P2#4

Let $f(x) = \sin(1 + \sin x)$.

(a) (i) Sketch the graph of $y = f(x)$, for $0 \le x \le 6$.

(ii) Write down the x-coordinates of all minimum and maximum points of f, for $0 \le x \le 6$. Give your answers correct to **four** significant figures.

(b) Let S be the region in the first quadrant completely enclosed by the graph of f and **both** coordinate axes.

(i) Shade S on your diagram.

(ii) Write down the integral which represents the area of S.

(iii) Evaluate the area of S to **four** significant figures.

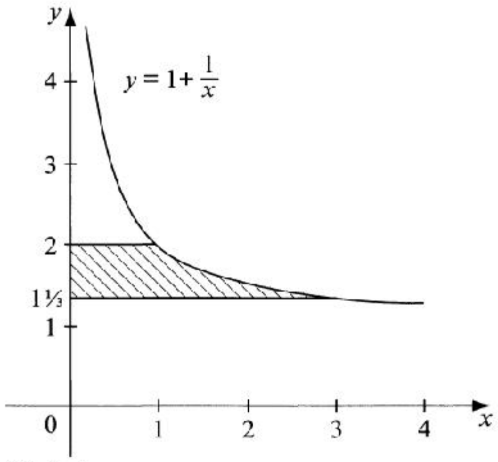
(c) Give reasons why $f(x) \ge 0$ for all values of x.

Mayo 00 P1#9

If $f'(x) = \cos x$, and $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, find $f(x)$.

Nov 00 P1#15

The diagram shows the graph of the function $y = 1 + \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 4$. Find the **exact** value of the area of the shaded region.



Nov 00 P1#8

Given that $f(x) = (2x+5)^3$, find

(a) $f'(x)$;

(b) $\int f(x)\,dx$.

Nov 00 P1#3

A curve with equation $y = f(x)$ passes through the point $(1, 1)$. Its gradient function is $f'(x) = 2x + 3$.

Find the equation of the curve.

Mayo 01 P1#9

Find

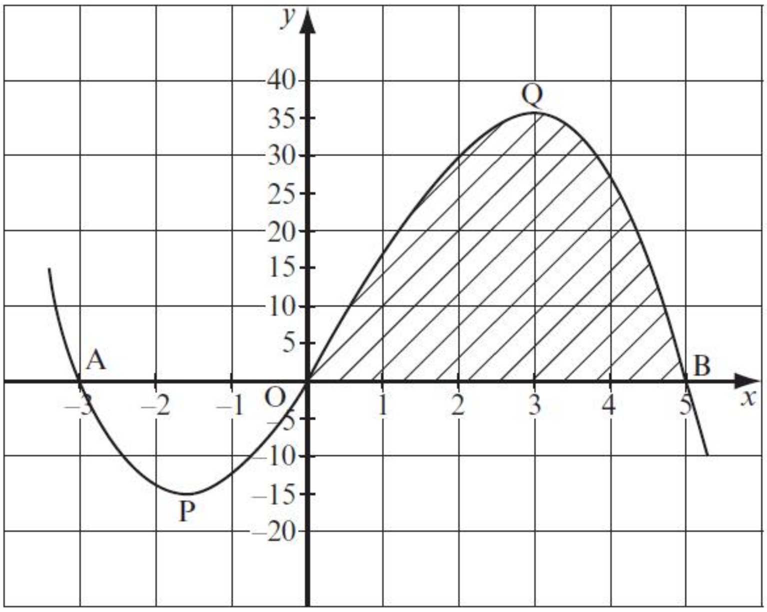
(a) $\int \sin(3x+7)\,dx$;

(b) $\int e^{4x}\,dx$.

Nov 01
A P2#3

The diagram below shows part of the graph of the function

$$f : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 15x .$$



The graph intercepts the x-axis at A$(-3, 0)$, B$(5, 0)$ and the origin, O . There is a minimum point at P and a maximum point at Q .

(a) The function may also be written in the form $f : x \mapsto -x(x-a)(x-b)$, where $a < b$. Write down the value of

(i) a ;

(ii) b .

(b) Find

(i) $f'(x)$;

(ii) the **exact** values of x at which $f'(x) = 0$;

(iii) the value of the function at Q .

(c) (i) Find the equation of the tangent to the graph of f at O .

(ii) This tangent cuts the graph of f at another point. Give the x-coordinate of this point.

(d) Determine the area of the shaded region.

Nov 01 P2#3

The function f is defined by $f: x \mapsto x^3 e^{-x}$.

As x increases from 0, the graph of f rises to a maximum value and then decreases steadily, approaching a limiting value asymptotically.

(a) Sketch the graph of f for $0 \leq x \leq 10$, choosing a suitable scale for the y-axis. (There is no need to draw an accurate, scaled graph.) The y-intercept, the position of the maximum and the asymptotic behaviour should be clear from your graph.

(b) (i) Shade on your graph the area represented by

$$\int_0^5 x^3 e^{-x} dx.$$

(ii) Evaluate this integral.

(c) Give the equation of the horizontal asymptote to the graph of f.

(d) Consider the equation $f(x) = 1$.

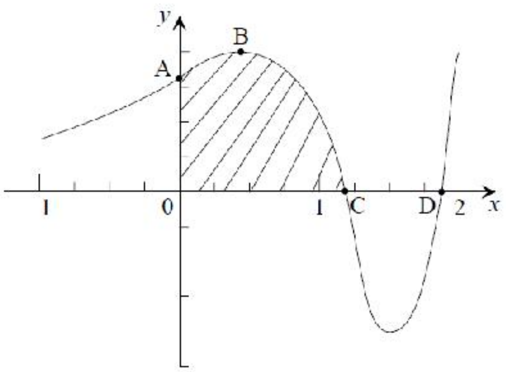
(i) Draw a line on your graph illustrating why this equation has more than one solution.

(ii) Write down the solutions of $f(x) = 1$.

(e) Give the coordinates of the maximum point on the graph of f.

Nov 02 P2#3

El diagrama a continuación muestra un esbozo de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}\left(e^x\right)$ donde $-1 \leq x \leq 2$, y x está en radianes. La gráfica corta al eje de las y en A, y al eje de las x en C y en D. Tiene un punto de máximo en B.



(a) Halle las coordenadas de A.

(b) Las coordenadas de C se pueden expresar como $(\ln k, 0)$. Halle el valor **exacto** de k.

(c) (i) Escriba la ordenada y de B.

(ii) Halle $\frac{dy}{dx}$.

(iii) A partir de allí, muestre que en el punto B, $x = \ln \frac{\pi}{2}$.

(d) (i) Escriba la integral que representa el área de la región sombreada.

(ii) Evalúe esta integral.

(e) (i) Copie el diagrama anterior a su cuadernillo de respuestas. (No es necesario copiar el sombreado.) Trace la gráfica de $y = x^3$ en el diagrama.

(ii) Las dos gráficas se cortan en el punto P. Halle la abscisa x de P.

Nov 01 P2#1

The function f is defined by $f: x \mapsto -0.5x^2 + 2x + 2.5$.

(a) (i) Determine $f'(x)$.

(ii) Evaluate $f'(0)$.

(b) Show that the equation of the line perpendicular to the tangent to the graph of f (i.e. the normal) at the point where the graph intercepts the y-axis may be written as $y = -0.5x + 2.5$.

The equation of the curve may be written as $y = f(x)$. The equation of the normal may be written as $y = g(x)$.

(c) Equate $f(x)$ and $g(x)$ and solve the resulting quadratic equation.

(d) Write down the coordinates of the other point of intersection of the normal and the curve.

(e) Write an expression involving an integral for the area enclosed between the curve and the normal.

(f) Evaluate the expression in part (e).

Nov 01 P1#7

The function f is given by $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, where x is in radians. Find

(a) $f'(x)$;

(b) $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Mayo 02 P2#5

Tomemos funciones de la forma $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

(a) Muestre que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-k})$.

(b) Sea $k = 0{,}5$

(i) Dibuje la gráfica de $y = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$, para $-1 \le x \le 3$ e indique las coordenadas de su intersección con el eje de las y.

(ii) Sombree la región encerrada por esta gráfica, el eje de las y, el eje de las x y la recta $x = 1$.

(iii) Halle el área de esta región.

(c) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de k, siendo $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

El punto P(1, 0,8) yace sobre la gráfica de la función $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

(ii) Halle el valor de k para este caso.

(iii) Halle el gradiente de la tangente a la curva en P.

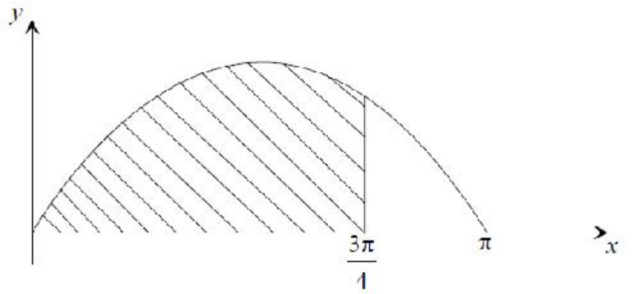
Mayo 02 P1#10

La derivada de la función f es $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 0{,}5\operatorname{sen}x$, para $x \neq -1$.

La gráfica de f pasa por el punto $(0, 2)$. Halle una expresión de $f(x)$.

Nov 02 P1#1

El diagrama muestra parte de la curva $y = \operatorname{sen} x$. La región sombreada está limitada por la curva y por las rectas $y = 0$ y $x = \dfrac{3\pi}{4}$.



Dado que $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcule el área **exacta** de la región sombreada.

Nov 02 P2#1

Sea $f(x) = \sqrt{x^3}$. Halle

(a) $f'(x)$;

(b) $\int f(x)\,dx$.

Mayo 03 P1#9

Sabiendo que $\int_1^3 g(x)\,dx = 10$, deduzca el valor de

(a) $\int_1^3 \frac{1}{2} g(x)\,dx$;

(b) $\int_1^3 (g(x)+4)\,dx$.

Nov 03 P2#4

Considere la función $f(x) = 1 + e^{-2x}$.

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) Explique brevemente por qué el resultado anterior nos permite afirmar que $f(x)$ es una función decreciente para todos los valores de x (es decir, que el valor de $f(x)$ siempre decrece al aumentar el valor de x).

Sea P el punto de la gráfica de f donde $x = -\frac{1}{2}$.

(b) Halle una expresión en función de e para

(i) la ordenada de P;

(ii) la pendiente de la tangente a la curva en P.

(c) Halle la ecuación de la tangente a la curva en P, expresando la respuesta en la forma $y = ax + b$.

(d) (i) Dibuje de forma aproximada la gráfica de f para $-1 \le x \le 2$.

(ii) Trace la tangente en $x = \frac{1}{2}$.

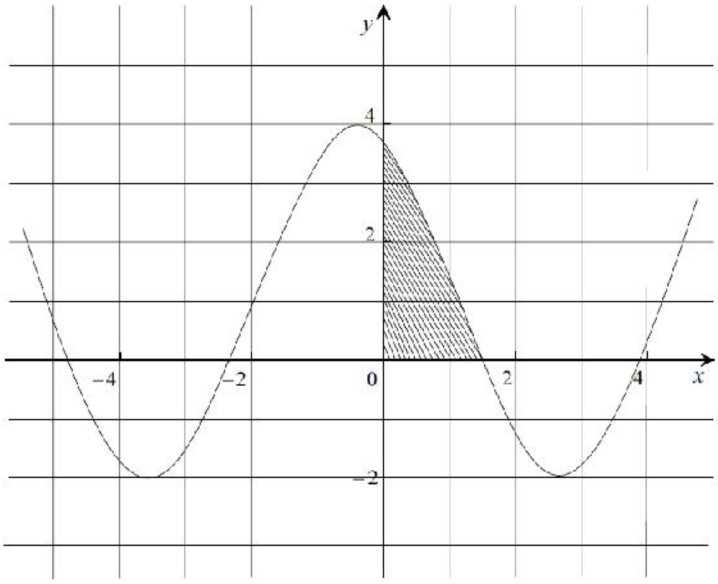
(iii) Sombree el área encerrada por la curva, la tangente y el eje y.

(iv) Halle esta área.

Nov 03 P1#14

(a) Halle $\int(1 + 3\operatorname{sen}(x+2))\,dx$.

(b) La siguiente figura muestra parte de la gráfica de la función $f(x) = 1 + 3\operatorname{sen}(x+2)$. El área de la región sombreada viene dada por $\int_0^a f(x)\,dx$.



Halle el valor de a.

Nov 03 P1#11

Se supone que $\frac{dy}{dx} = x^3 + 2x - 1$ y que $y = 13$ cuando $x = 2$

Halle y en función de x.

Mayo 04 P1#1

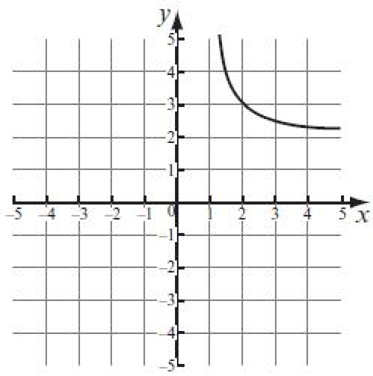
Halle

(a) $\frac{d}{dx}(3x^4 - 5x + 1)$;

(b) $\int (3x^4 - 5x + 1)dx$.

Mayo 04 TZ1 P2#2

(a) Consider the function $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. The diagram below is a sketch of part of the graph of $y = f(x)$.



Copy and complete the sketch of $f(x)$.

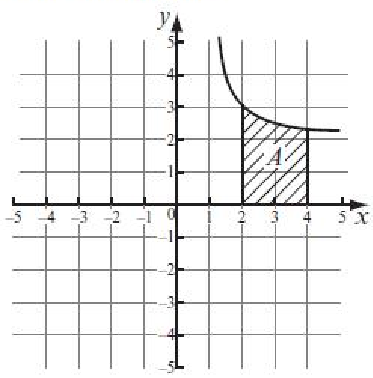
(b) (i) Write down the x-intercepts and y-intercepts of $f(x)$.

(ii) Write down the equations of the asymptotes of $f(x)$.

(c) (i) Find $f'(x)$.

(ii) There are no maximum or minimum points on the graph of $f(x)$. Use your expression for $f'(x)$ to explain why.

The region enclosed by the graph of $f(x)$, the x-axis and the lines $x = 2$ and $x = 4$, is labelled A, as shown below.



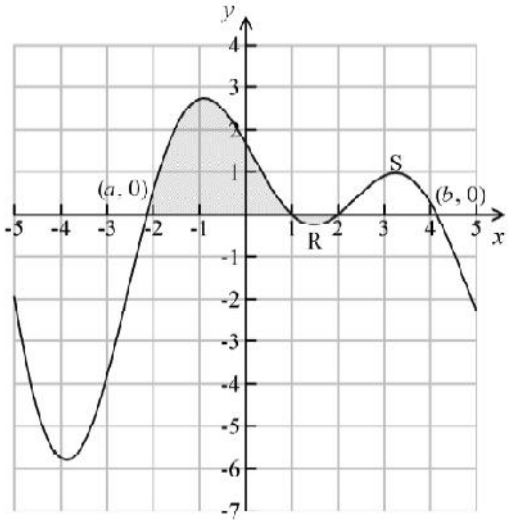
(d) (i) Find $\int f(x)dx$.

(ii) Write down an expression that represents the area labelled A.

(iii) Find the area of A.

Nov 04 P2#5ii

Sea $h(x)=(x-2)\operatorname{sen}(x-1)$ para $-5\le x\le 5$. A continuación se muestra la curva de $h(x)$. Existe un mínimo local en R y un máximo local en S. La curva corta al eje x en los puntos $(a,0)$ $(1,0)$ $(2,0)$ and $(b,0)$.



(a) Halle los valores exactos de

(i) a;

(ii) b.

Las regiones entre la curva y el eje x para $a\le x\le 2$ están sombreadas según se muestra en la figura.

(b) (i) Escriba una expresión que represente el área **total** de las regiones sombreadas.

(ii) Calcule esta área total.

(c) (i) La ordenada de R es $-0,240$. Halle la ordenada de S.

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación $(x-2)\operatorname{sen}(x-1)-k$ tiene **cuatro** soluciones distintas.

Mayo 05 P1#15

La siguiente tabla muestra algunos valores de dos funciones, f y g, y de sus derivadas f' y g'

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	4	-1	3
$g(x)$	1	2	2	5
$f'(x)$	5	6	0	7
$g'(x)$	-6	-4	-3	4

Calcule lo siguiente

(a) $\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)$, cuando $x=4$;

(b) $\int_1^3 \left(g'(x)+6\right)dx$.

Mayo 04 TZ2 P2#2

La derivada de la función f viene dada por $f'(x) = e^x + x - 5$. El punto $(1, e-2)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$.

(a) Compruebe que $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2{,}5$.

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$ para $-3 < x \leq 3$.

(c) Halle el valor mínimo de $f(x)$.

(d) Halle el área encerrada por la gráfica de $y = f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.

Mayo 05 P1#6

Sea $f(x) = (3x+4)^5$. Halle

(a) $f'(x)$;

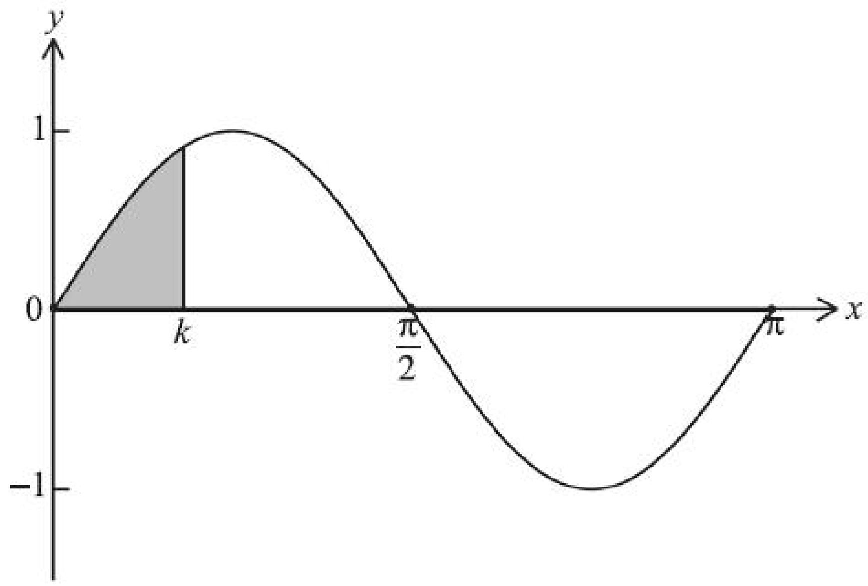
(b) $\int f(x)\,dx$.

Mayo 05 P1#8

La curva $y = f(x)$ pasa por el punto (2, 6).
Sabiendo que $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 5$, halle y en función de x.

Nov 05 P2#5ii

A continuación se muestra la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ para $0 \leq x \leq \pi$.



El área de la región sombreada es 0,85. Halle el valor de k.

Nov 04 P1#13

Sea f una función tal que $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 8$.

(a) Deduzca el valor de

(i) $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int_0^3 (f(x)+2)\,\mathrm{d}x$.

(b) Si $\int_c^d f(x-2)\,\mathrm{d}x = 8$, escriba los valores de c y de d.

Nov 04 P1#12

La derivada de la función f viene dada por $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{1-x}$, $x < 1$.

La gráfica de $y = f(x)$ pasa por el punto $(0, 4)$. Halle una expresión para $f(x)$.

Mayo 05 P2#4

Sea $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \cos x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

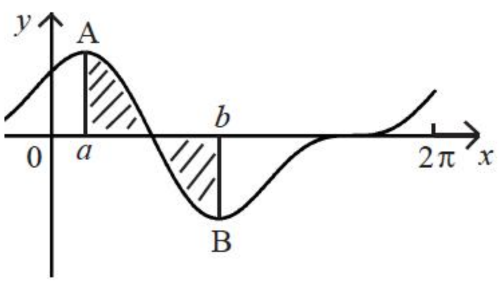
(a) (i) Halle $f'(x)$.

Una forma de escribir $f'(x)$ es $-2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1$.

(ii) Factorice $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1$.

(iii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva $f'(x) = 0$.

A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$.



Existe un máximo en el punto A y un mínimo en el punto B.

(b) Escriba la abscisa, x, del punto A.

(c) La región encerrada por la gráfica, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ aparece sombreada en la figura anterior.

(i) Escriba una expresión que represente el área de esta región sombreada.

(ii) Calcule el área de esta región sombreada.

Nov 05 P1#8

Sabiendo que $\int_3^k \frac{1}{x-2}\,dx = \ln 7$, halle el valor de k.

Mayo 06 TZ1 P2#1

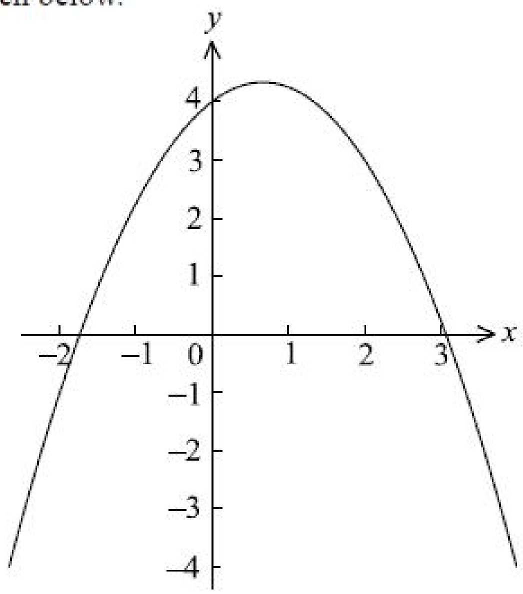
Let $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x + 4$.

(a) (i) Write down $f'(x)$.

(ii) Find the equation of the normal to the curve of f at $(2, 3)$.

(iii) This normal intersects the curve of f at $(2, 3)$ and at one other point P. Find the x-coordinate of P.

Part of the graph of f is given below.



(b) Let R be the region under the curve of f from $x = -1$ to $x = 2$.

(i) Write down an expression for the area of R.

(ii) Calculate this area.

(iii) The region R is revolved through 360° about the x-axis. Write down an expression for the volume of the solid formed.

(c) Find $\int_1^k f(x)\,dx$, giving your answer in terms of k.

Mayo 06
TZ2
P2#2

Considere las funciones f y g donde $f(x)=3x-5$ y $g(x)=x-2$.

(a) Halle la función inversa, f^{-1}.

(b) Dado que $g^{-1}(x)=x+2$, halle $(g^{-1}\circ f)(x)$.

(c) Dado también que $(f^{-1}\circ g)(x)=\dfrac{x+3}{3}$, resuelva $(f^{-1}\circ g)(x)=(g^{-1}\circ f)(x)$.

Sea $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\neq 2$.

(d) (i) **Dibuje aproximadamente** la gráfica de h para $-3\le x\le 7$ y para $-2\le y\le 8$, incluyendo algunas asíntotas.

(ii) Escriba las **ecuaciones** de las asíntotas.

(e) La expresión $\dfrac{3x-5}{x-2}$ también puede escribirse en la forma $3+\dfrac{1}{x-2}$. Utilice esto para responder lo siguiente.

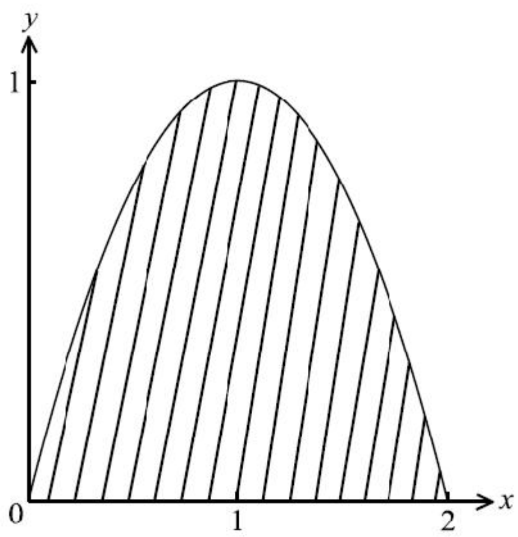
(i) Halle $\int h(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) **A partir de lo anterior**, calcule el valor **exacto** de $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$.

(f) En su dibujo aproximado, sombree la región cuya área está representada por $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$.

Mayo 06
TZ2
P1#9

El diagrama siguiente presenta una parte de la gráfica de $y=2x-x^2$.



La región sombreada se rota 360° alrededor del eje x.

(a) Escriba una expresión para este volumen de revolución.

(b) Calcule este volumen.

Muestra 06/08 P2#1 P2#13

The function f is defined by $f : x \mapsto -0.5x^2 + 2x + 2.5$.

(a) Write down

(i) $f'(x)$;

(ii) $f'(0)$.

(b) Let N be the normal to the curve at the point where the graph intercepts the y-axis. Show that the equation of N may be written as $y = -0.5x + 2.5$.

Let $g : x \mapsto -0.5x + 2.5$.

(c) (i) Find the solutions of $f(x) = g(x)$.

(ii) Hence find the coordinates of the other point of intersection of the normal and the curve.

(d) Let R be the region enclosed between the curve and N.

(i) Write down an expression for the area of R.

(ii) Hence write down the area of R.

Muestra 06/08 P1#4 P1#9

The function f is given by $f(x) = 2\sin(5x - 3)$.

(a) Find $f''(x)$.

(b) Write down $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Nov 06 P2

La función f se define como $f(x) = (2x+1)e^{-x}$, $0 \le x \le 3$. El punto P(0, 1) está sobre la gráfica de $f(x)$ la cual presenta un punto máximo en Q.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f(x)$, rotulando los puntos P y Q.

(b) (i) Compruebe que $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$.

(ii) Halle las coordenadas **exactas** del punto Q.

(c) La ecuación $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, tiene dos soluciones. Escriba el rango de valores de k.

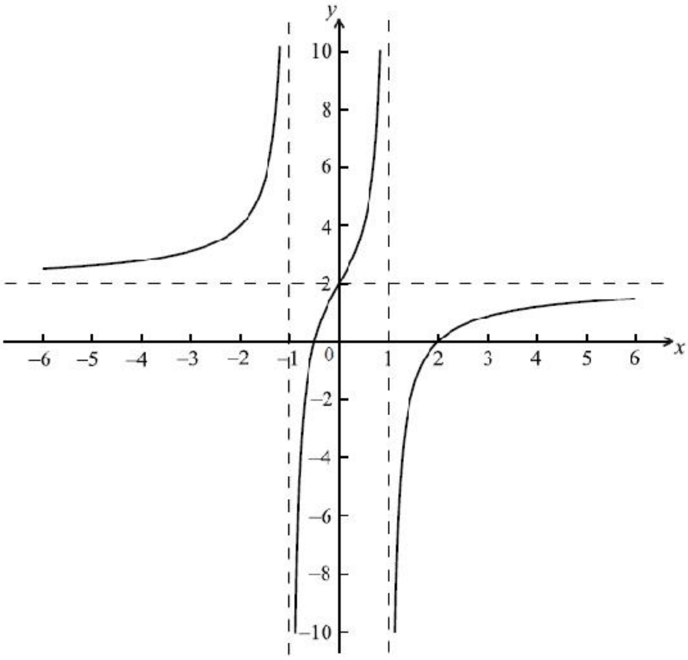
(d) Sabiendo que $f''(x) = e^{-x}(-3+2x)$, compruebe que la curva de f tiene solamente un punto de inflexión.

(e) Sea R el punto sobre la curva de f que tiene la coordenada x igual a 3. Halle el área de la región limitada por la curva y la recta (PR).

Mayo 07
TZ2
P2#5

Sea $f(x) = p - \dfrac{3x}{x^2 - q^2}$, donde $p,\ q \in \mathbb{R}^+$.

A continuación se muestra una parte de la gráfica de f, incluyendo las asíntotas.



(a) Las ecuaciones de las asíntotas son, respectivamente, $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$. Escriba el valor de

(i) p;

(ii) q.

(b) Sea R la región delimitada por la gráfica de f, el eje x y el eje y.

(i) Halle la intersección de f con el semieje x negativo.

(ii) A partir de lo anterior, halle el volumen resultante cuando se hace girar la región R 360° en torno al eje x.

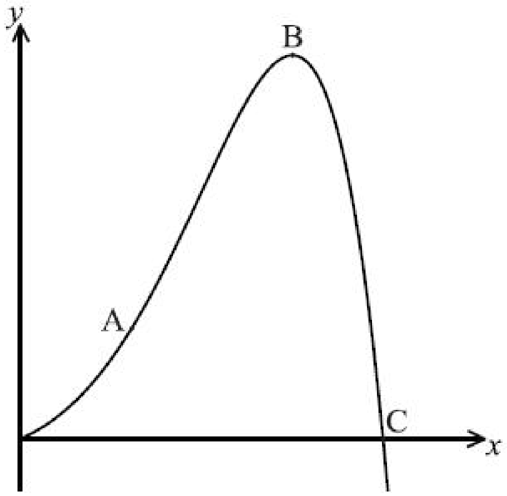
(c) (i) Compruebe que $f'(x) = \dfrac{3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que la gráfica de f no tiene ni máximos ni mínimos.

(d) Sea $g(x) = f'(x)$. Sea A el área de la región delimitada por la gráfica de g y por el eje x, entre $x = 0$ y $x = a$, donde $a > 0$. Sabiendo que $A = 2$, halle el valor de a.

Mayo 07
TZ1
P2#1B

The function f is defined as $f(x) = e^x \sin x$, where x is in radians. Part of the curve of f is shown below.



There is a point of inflexion at A, and a local maximum point at B. The curve of f intersects the x-axis at the point C.

(a) Write down the x-coordinate of the point C.

(b) (i) Find $f'(x)$.

(ii) Write down the value of $f'(x)$ at the point B.

(c) Show that $f''(x) = 2e^x \cos x$.

(d) (i) Write down the value of $f''(x)$ at A, the point of inflexion.

(ii) Hence, calculate the coordinates of A.

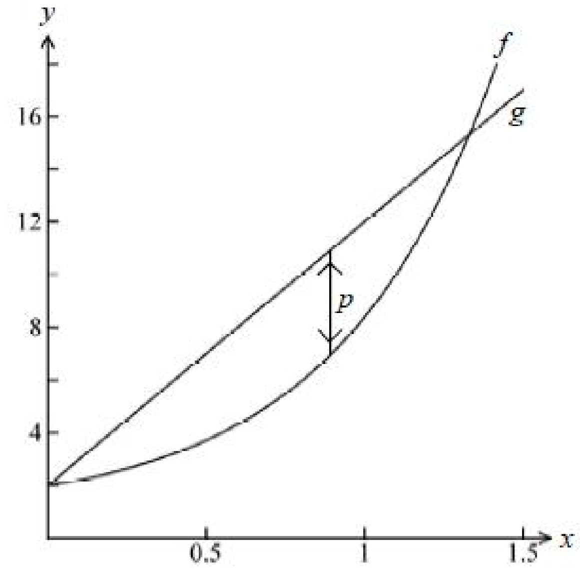
(e) Let R be the region enclosed by the curve and the x-axis, between the origin and C.

(i) Write down an expression for the area of R.

(ii) Find the area of R.

Muestra 06 P2#3A

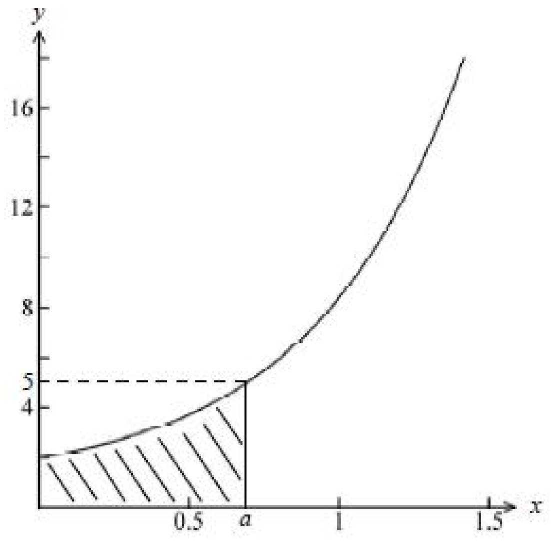
The diagram below shows the graphs of $f(x) = 1 + e^{2x}$, $g(x) = 10x + 2$, $0 \le x \le 1.5$



(a) (i) Write down an expression for the vertical distance p between the graphs of f and g.

(ii) Given that p has a maximum value for $0 \le x \le 1.5$, find the value of x at which this occurs.

The graph of $y = f(x)$ only is shown in the diagram below. When $x = a$, $y = 5$.



(b) (i) Find $f^{-1}(x)$.

(ii) **Hence** show that $a = \ln 2$.

(c) The region shaded in the diagram is rotated through $360°$ about the x-axis. Write down an expression for the volume obtained.

Mayo 07 P2

The function $f(x)$ is defined as $f(x)=3+\frac{1}{2x-5}$, $x\neq\frac{5}{2}$.

(a) Sketch the curve of f for $-5\leq x\leq 5$, showing the asymptotes.

(b) Using your sketch, write down

(i) the equation of each asymptote;

(ii) the value of the x-intercept;

(iii) the value of the y-intercept.

(c) The region enclosed by the curve of f, the x-axis, and the lines $x=3$ and $x=a$, is revolved through $360°$ about the x-axis. Let V be the volume of the solid formed.

(i) Find $\int\left(9+\frac{6}{2x-5}+\frac{1}{(2x-5)^2}\right)\mathrm{d}x$.

(ii) Hence, given that $V=\pi\left(\frac{28}{3}+3\ln 3\right)$, find the value of a.

Mayo 07 P1

It is given that $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$.

(a) Write down $\int_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Find the value of $\int_1^3 (3x^2+f(x))\,\mathrm{d}x$.

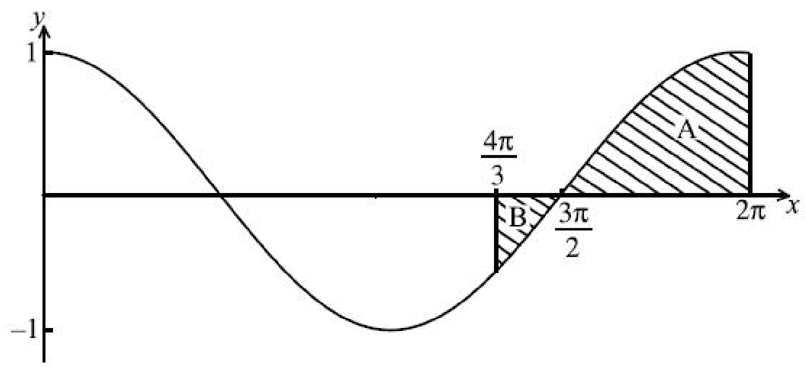
Mayo 07 P1

Sea $f'(x)=12x^2-2$.

Sabiendo que $f(-1)=1$, halle $f(x)$.

Nov 07 P1

La figura que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de $y=\cos x$ para $0\leq x\leq 2\pi$. Las regiones A y B están sombreadas.



(a) Escriba una expresión para calcular el área de A.

(b) Calcule el área de A.

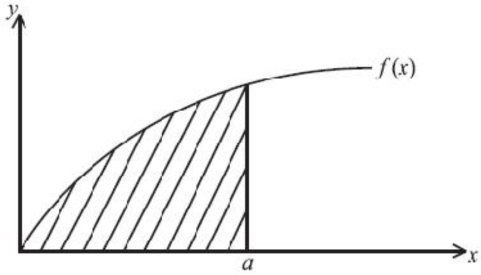
(c) Halle el área total de las regiones sombreadas.

Mayo 08
TZ2
P1#9c

Sea $g(x)=\sqrt{3}\,\text{sen}\,x(\cos x)^{\frac{1}{2}}$ para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Halle el volumen que se genera cuando se hace girar la curva de g alrededor del eje x, 2π.

Nov 06
P1#15

En el diagrama que aparece a continuación, la región sombreada está delimitada por $f(x)=\sqrt{x}$, $x=a$ y el eje x. Se hace girar la región sombreada 360° en torno al eje x. El volumen del sólido resultante es igual a $0{,}845\pi$.



Halle el valor de a.

Nov 07
P2

Consider the function $f(x)=e^{(2x-1)}+\frac{5}{(2x-1)}$, $x \ne \frac{1}{2}$.

(a) Sketch the curve of f for $-2 \le x \le 2$, including any asymptotes.

(b) (i) Write down the equation of the vertical asymptote of f.

(ii) Write down which one of the following expressions does **not** represent an area between the curve of f and the x-axis.

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

(iii) Justify your answer.

(c) The region between the curve and the x-axis between $x=1$ and $x=1.5$ is rotated through 360° about the x-axis. Let V be the volume formed.

(i) Write down an expression to represent V.

(ii) Hence write down the value of V.

(d) Find $f'(x)$.

(e) (i) Write down the value of x at the minimum point on the curve of f.

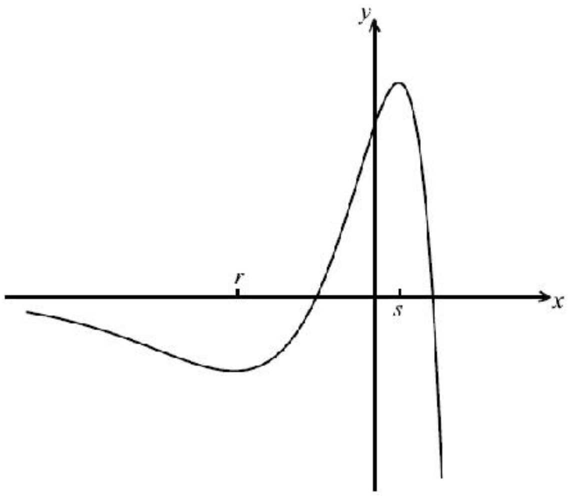
(ii) The equation $f(x)=k$ has no solutions for $p \le k < q$. Write down the value of p and of q.

Mayo 08 TZ2 P2#9

Sea $f(x) = e^x(1-x^2)$.

(a) Compruebe que $f'(x) = e^x(1-2x-x^2)$.

El siguiente diagrama muestra una parte de la gráfica de $y = f(x)$, para $-6 \le x \le 2$.
Las coordenadas x del mínimo y del máximo locales son r y s respectivamente.



(b) Escriba la **ecuación** de la asíntota horizontal.

(c) Escriba el valor de r y el de s.

(d) Sea L la normal a la curva de f en P(0, 1). Compruebe que L tiene por ecuación $x + y = 1$.

(e) Sea R la región encerrada por la curva $y = f(x)$ y la recta L.

(i) Halle una expresión para el área R.

(ii) Calcule el área de R.

Nov 08 P2#4

Sea $f(x) = x\cos(x - \operatorname{sen} x)$, $0 \le x \le 3$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de f

(b) La gráfica de f corta al eje x en $x = a$, con $a \ne 0$. Escriba el valor de a.

(c) Se hace girar la gráfica de f 360° alrededor del eje x, entre $x = 0$ y $x = a$. Halle el volumen del sólido generado.

Mayo 08 TZ2 P1#7

Sea $\int_1^5 3f(x)\,dx = 12$.

(a) Compruebe que $\int_5^1 f(x)\,dx = -4$.

(b) Halle el valor de $\int_1^2 \left(x + f(x)\right)dx + \int_2^5 \left(x + f(x)\right)dx$.

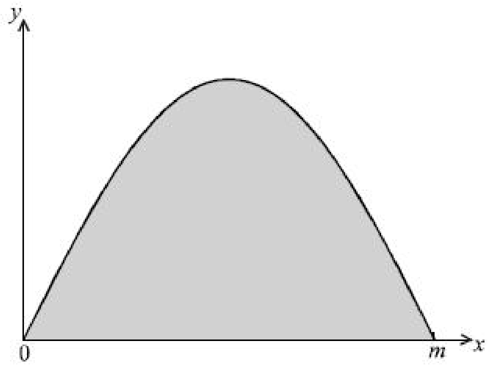
Mayo 08
TZ1
P1#5

(a) Find $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$.

(b) Given that $\int_0^3 \frac{1}{2x+3}\,dx = \ln\sqrt{P}$, find the value of P.

Muestra
08
P1#26

The diagram below shows part of the graph of $y = \sin 2x$. The shaded region is between $x = 0$ and $x = m$.



(a) Write down the period of this function.

(b) Hence or otherwise write down the value of m.

(c) Find the area of the shaded region.

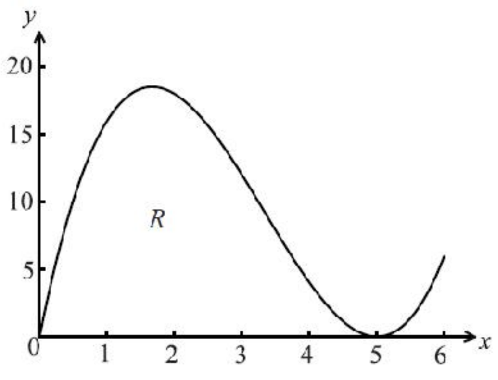
Muestra
08
P1#16

(a) Find $\int_1^2 (3x^2 - 2)\,dx$.

(b) Find $\int_0^1 2e^{2x}\,dx$.

May 09
TZ2
P2#8

Sea $f(x) = x(x-5)^2$, para $0 \le x \le 6$. La siguiente figura muestra la gráfica de f.



Sea R la región delimitada por el eje x y por la curva de f.

(a) Halle el área de R.

(b) Halle el volumen del sólido de revolución que se forma cuando se rota R $360°$ alrededor del eje x.

May 09 TZ2 P2#8c

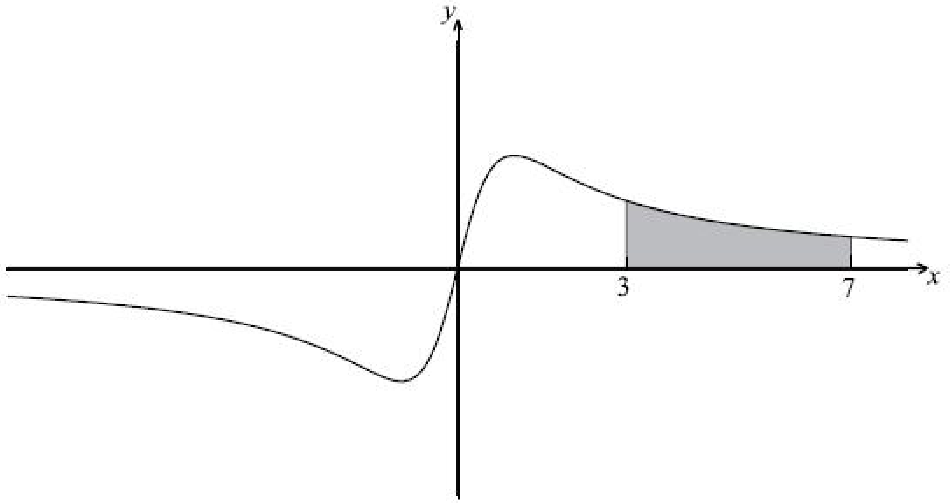
La figura que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de una función cuadrática $g(x) = x(a-x)$. La gráfica de g corta al eje x cuando $x = a$.

May 09 TZ1 P1#7

The graph of $y = \sqrt{x}$ between $x = 0$ and $x = a$ is rotated 360° about the x-axis. The volume of the solid formed is 32π. Find the value of a.

May 09 TZ1 P1#10

Let $f(x) = \dfrac{ax}{x^2+1}$, $-8 \le x \le 8$, $a \in \mathbb{R}$. The graph of f is shown below.



The region between $x = 3$ and $x = 7$ is shaded.

(a) Show that $f(-x) = -f(x)$.

(b) Given that $f''(x) = \dfrac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, find the coordinates of all points of inflexion.

(c) It is given that $\int f(x)\,dx = \dfrac{a}{2}\ln(x^2+1) + C$.

(i) Find the area of the shaded region, giving your answer in the form $p \ln q$.

(ii) Find the value of $\int_4^8 2f(x-1)\,dx$.

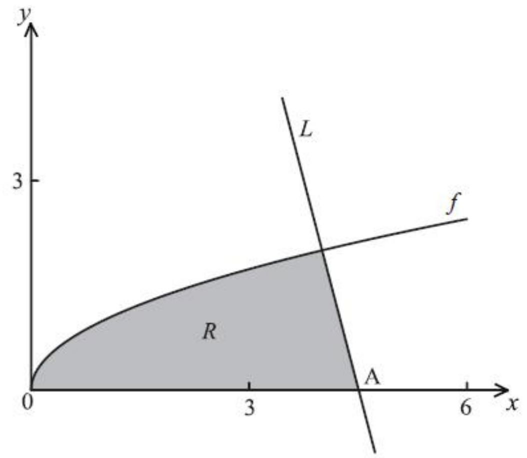
Nov 09 P1#10

Sea $f(x)=\sqrt{x}$. La recta L es la normal a la gráfica de f en el punto $(4, 2)$.

(a) Compruebe que la ecuación de L es $y=-4x+18$.

(b) En el punto A se produce la intersección de L con el eje x. Halle la coordenada x de A.

En el siguiente diagrama, la región sombreada R está delimitada por el eje x, la gráfica de f y la recta L.



(c) Halle una expresión para el área de R.

(d) La región R se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido generado, y dé su respuesta en función de π.

Nov 09 P2#9

Let $f(x)=5\cos\frac{\pi}{4}x$ and $g(x)=-0.5x^2+5x-8$, for $0\le x\le 9$.

(a) On the same diagram, sketch the graphs of f and g.

(b) Consider the graph of f. Write down

(i) the x-intercept that lies between $x=0$ and $x=3$;

(ii) the period;

(iii) the amplitude.

(c) Consider the graph of g. Write down

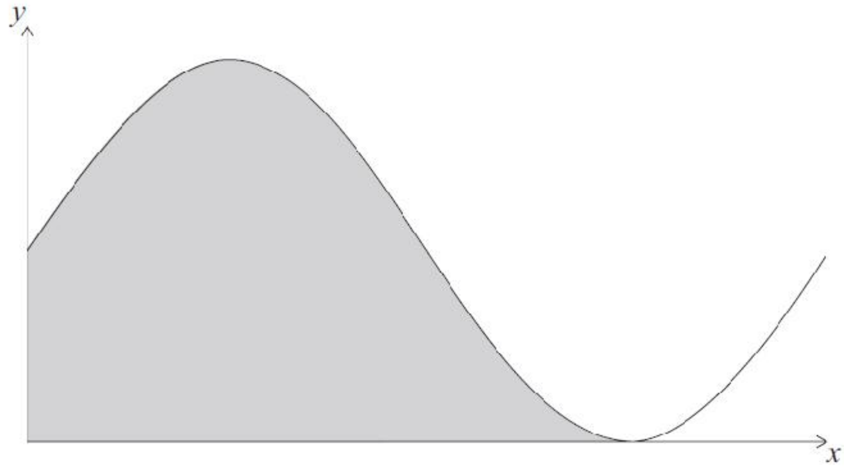
(i) the two x-intercepts;

(ii) the equation of the axis of symmetry.

(d) Let R be the region enclosed by the graphs of f and g. Find the area of R.

Mayo 10
TZ2
P1#10

Sea $f(x) = 6 + 6\,\mathrm{sen}\,x$. A continuación se muestra una parte de la gráfica de f.



La región sombreada está delimitada por la curva de f, el eje x y el eje y.

(a) Resuelva, para $0 \le x < 2\pi$

(i) $6 + 6\,\mathrm{sen}\,x = 6$;

(ii) $6 + 6\,\mathrm{sen}\,x = 0$.

(b) Escriba el valor exacto de la intersección con el eje x de la gráfica de f, para $0 \le x < 2\pi$.

(c) El área de la región sombreada es igual a k. Halle el valor de k; dé la respuesta en función de π.

Sea $g(x) = 6 + 6\,\mathrm{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. La gráfica de f se transforma en la gráfica de g.

(d) Dé una descripción geométrica completa de esta transformación.

(e) Sabiendo que $\int_p^{p+\frac{3\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = k$ y $0 \le p < 2\pi$, escriba los dos valores de p.

Mayo 10
TZ2
P1#8

Considere la función f, cuya derivada segunda es $f''(x) = 3x - 1$. La gráfica de f tiene un punto mínimo en $\mathrm{A}(2, 4)$ y un punto máximo en $\mathrm{B}\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{358}{27}\right)$.

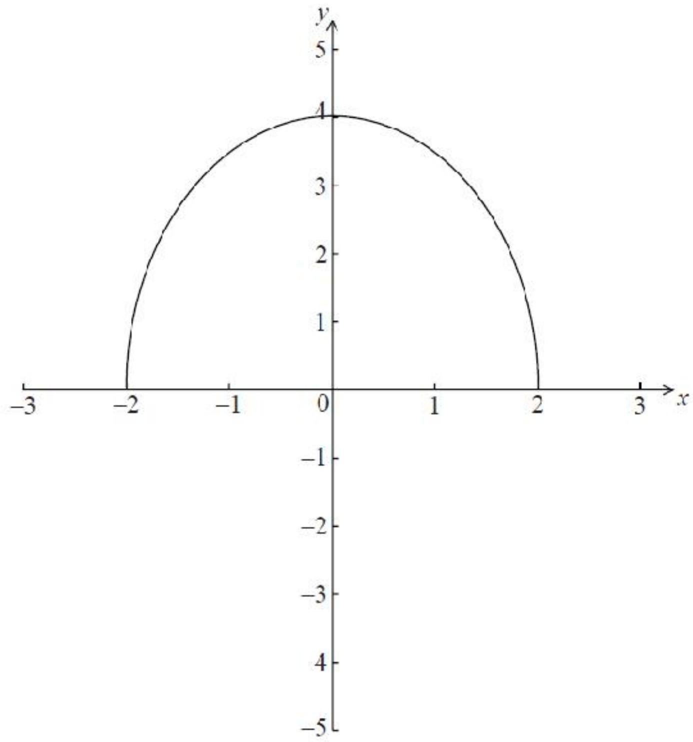
(a) Utilice la derivada segunda para justificar que B es un máximo.

(b) Sabiendo que $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + p$, compruebe que $p = -4$.

(c) Halle $f(x)$.

Mayo 10
TZ1
P1#6

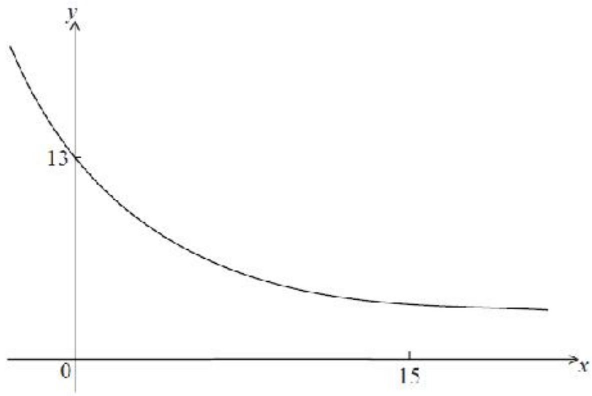
The graph of $f(x)=\sqrt{16-4x^2}$, for $-2 \le x \le 2$, is shown below.



The region enclosed by the curve of f and the x-axis is rotated 360° about the x-axis. Find the volume of the solid formed.

Mayo 10
TZ1
P2#9

Let $f(x)=Ae^{kx}+3$. Part of the graph of f is shown below.



The y-intercept is at $(0, 13)$.

(a) Show that $A=10$.

(b) Given that $f(15)=3.49$ (correct to 3 significant figures), find the value of k.

(c) (i) Using your value of k, find $f'(x)$.

(ii) Hence, explain why f is a decreasing function.

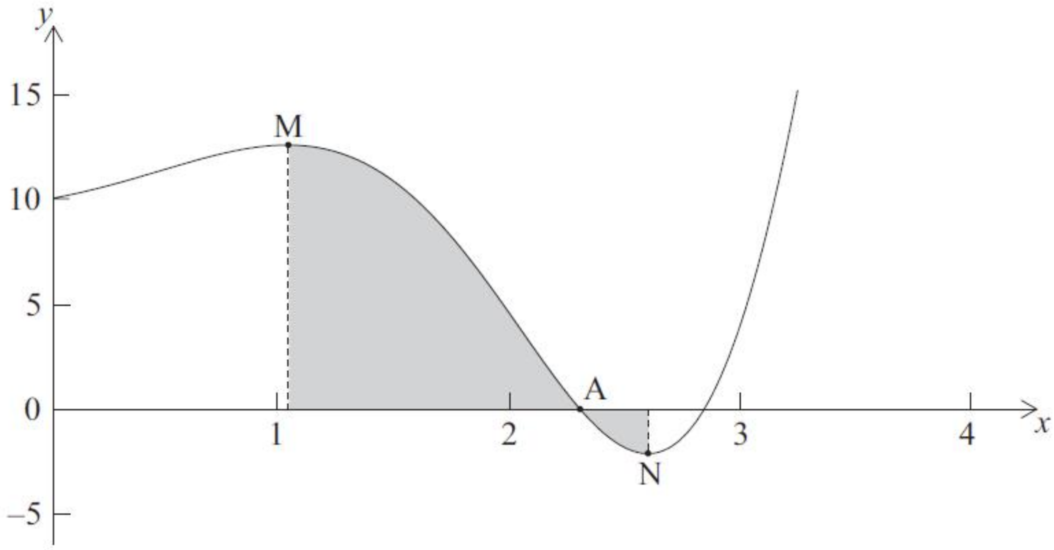
(iii) Write down the equation of the horizontal asymptote of the graph f.

Let $g(x)=-x^2+12x-24$.

(d) Find the area enclosed by the graphs of f and g.

Mayo 10
TZ2
P2#6

Sea $f(x) = e^x \operatorname{sen} 2x + 10$, para $0 \le x \le 4$. La figura que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de f.



Hay una intersección con el eje x en el punto A, un máximo local en el punto M, en el $x = p$, y un mínimo local en el punto N, en el que $x = q$.

(a) Escriba la coordenada x del punto A.

(b) Halle el valor de

(i) p;

(ii) q.

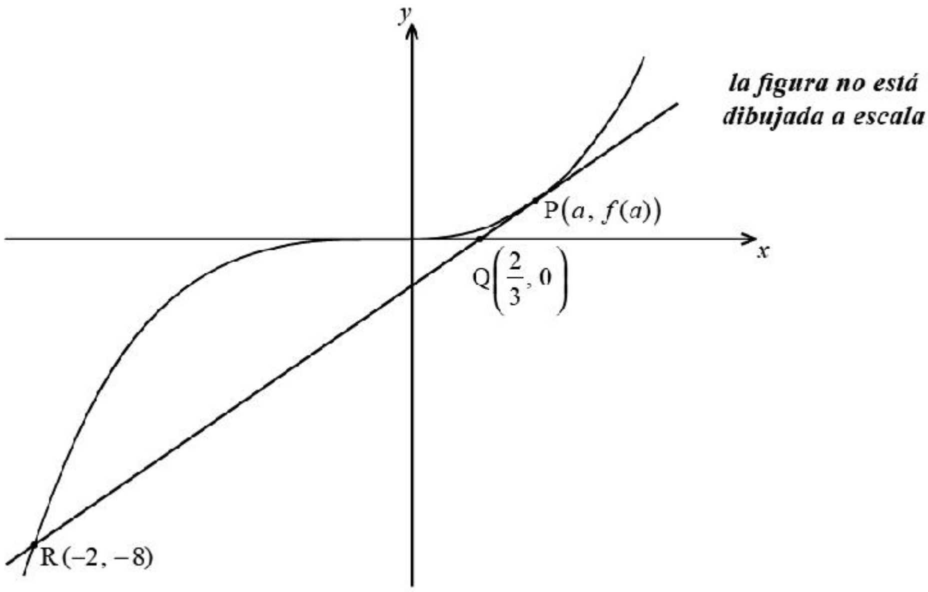
(c) Halle $\int_p^q f(x)\,dx$. Explique por qué este valor no es el área de la región sombreada.

Nov 10
P1#6

La gráfica de la función $y = f(x)$ pasa por el punto $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. La función pendiente de f viene dada por $f'(x) = \operatorname{sen}(2x - 3)$. Halle $f(x)$.

Nov 10 P1#10

Sea $f(x) = x^3$. La figura que aparece a continuación muestra parte de la gráfica de f.



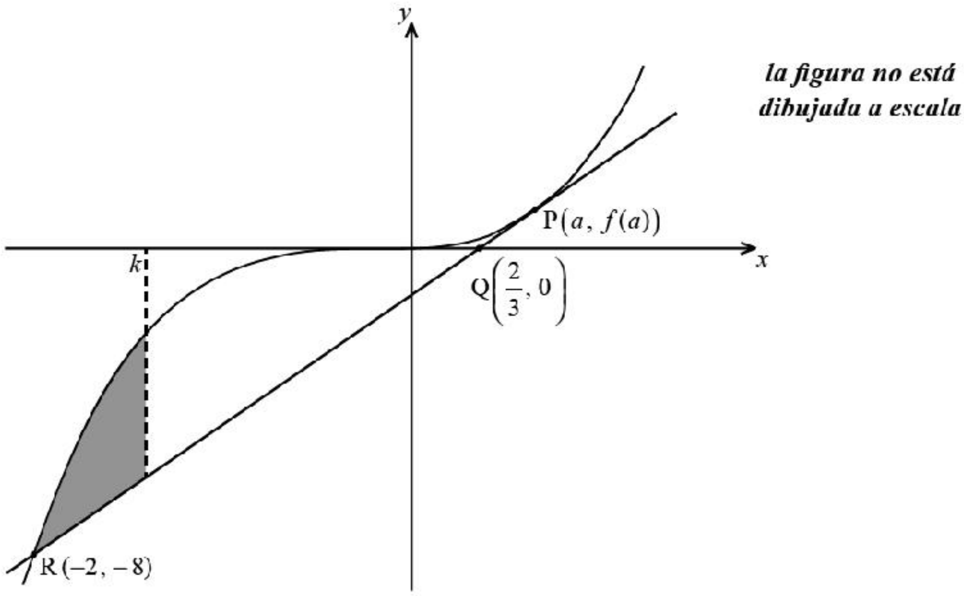
El punto $\mathrm{P}(a,\, f(a))$, donde $a > 0$, pertenece a la gráfica de f. La tangente en el punto P corta al eje x en el punto $\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3},\, 0\right)$. Esta tangente y la gráfica de f se cortan en el punto $\mathrm{R}(-2,\, -8)$.

(a) (i) Compruebe que la pendiente de [PQ] es igual a $\dfrac{a^3}{a - \frac{2}{3}}$.

(ii) Halle $f'(a)$.

(iii) A partir de lo anterior compruebe que $a = 1$.

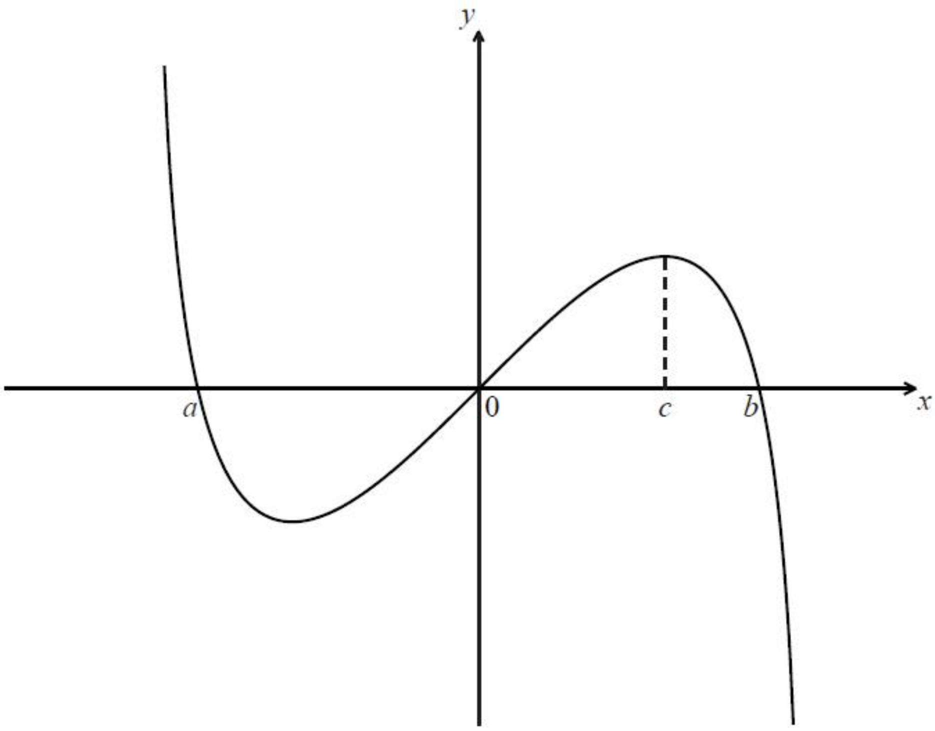
La ecuación de la tangente en P es $y = 3x - 2$. Sea T la región delimitada por la gráfica de f, la tangente [PR] y la recta $x = k$, entre $x = -2$ y $x = k$, donde $-2 < k < 1$. Se representa en el diagrama incluido a continuación.



(b) Sabiendo que el área de T es $2k + 4$, compruebe que k satisface la ecuación $k^4 - 6k^2 + 8 = 0$.

Nov 10
P2#8

Sea $f(x) = x\ln(4 - x^2)$, para $-2 < x < 2$. A continuación se muestra la gráfica de f.



La gráfica de f corta al eje x en $x = a$, $x = 0$ y $x = b$.

(a) Halle el valor de a y de b.

La gráfica de f tiene un valor máximo en $x = c$.

(b) Halle el valor de c.

(c) La región situada bajo la gráfica de f, entre $x = 0$ y $x = c$, es rotada 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido así generado.

(d) Sea R la región delimitada por la curva, el eje x y la recta $x = c$, entre $x = a$ y $x = c$.

Halle el área de R.

Mayo 11
TZ1
P2#6

Let $f(x) = \cos(x^2)$ and $g(x) = e^x$, for $-1.5 \le x \le 0.5$.

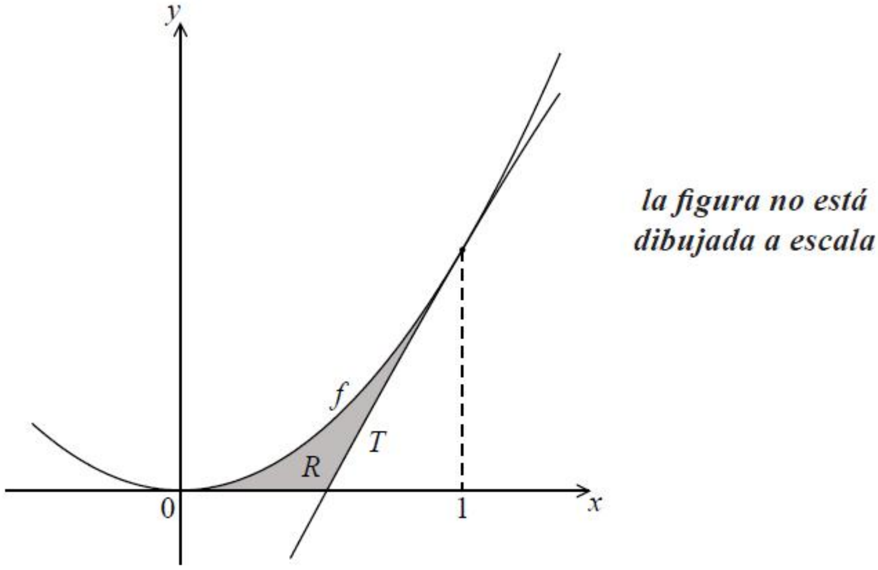
Find the area of the region enclosed by the graphs of f and g.

Mayo 11
TZ2
P2#7

Una función derivada viene dada por $\dfrac{dy}{dx} = 10e^{2x} - 5$. Para $x = 0$, $y = 8$. Halle el valor de y para $x = 1$.

Mayo 11
TZ2
P1#8

La siguiente figura muestra una parte de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$.



La recta T es la tangente a la gráfica de f para $x = 1$.

(a) Compruebe que la ecuación de T es $y = 4x - 2$.

(b) Halle la intersección de T con el eje x.

(c) La región sombreada R está delimitada por la gráfica de f, la recta T y el eje x.

(i) Escriba una expresión para el área de R.

(ii) Halle el área de R.

Nov 11
P1#4

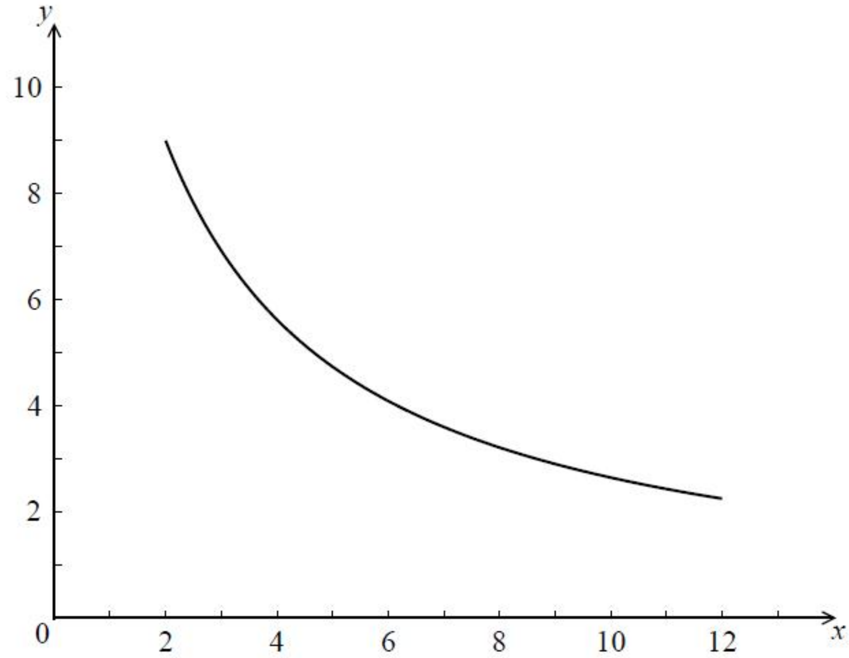
Sea $f'(x) = 3x^2 + 2$. Sabiendo que $f(2) = 5$, halle $f(x)$.

Nov 11 P1#10

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$. La recta L es la tangente a la curva de f en $(4, 6)$.

(a) Halle la ecuación de L.

Sea $g(x) = \frac{90}{3x+4}$, para $2 \le x \le 12$. La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de g.



(b) Halle el área de la región delimitada por la curva de g, el eje x, y las rectas $x = 2$ y $x = 12$. Exprese la respuesta de la forma $a\ln b$, donde a, $b \in \mathbb{Z}$.

(c) Aplicando una simetría en el eje x a la gráfica de g, se obtiene la gráfica de h. El área de la región delimitada por las rectas L, $x = 2$, $x = 12$ y el eje x, es igual a 120 cm^2.

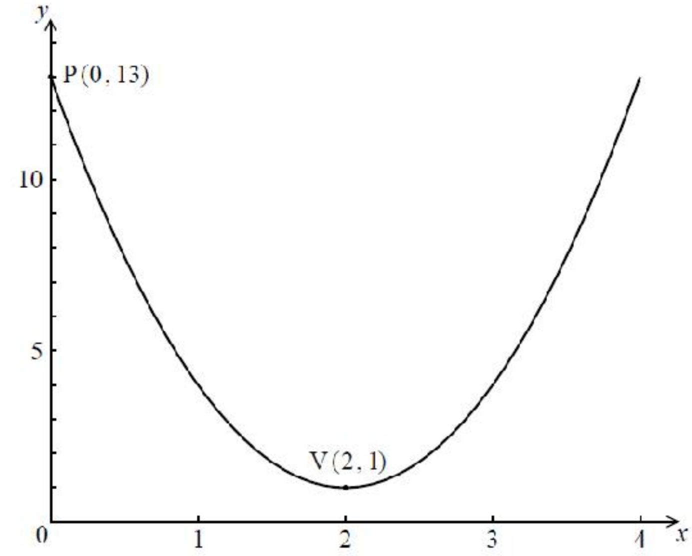
Halle el área de la región delimitada por las rectas L, $x = 2$ y $x = 12$, y la gráfica de h.

Mayo 12 TZ1 P1#6

Given that $\int_0^5 \frac{2}{2x+5}\,dx = \ln k$, find the value of k.

Mayo 12
TZ2
P1#8

La siguiente figura muestra la gráfica de una función cuadrática f, para $0 \le x \le 4$.



La gráfica pasa por el punto $P(0, 13)$, y el vértice es el punto $V(2, 1)$.

(a) La función se puede escribir de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

(i) Escriba el valor de h y el de k.

(ii) Compruebe que $a = 3$.

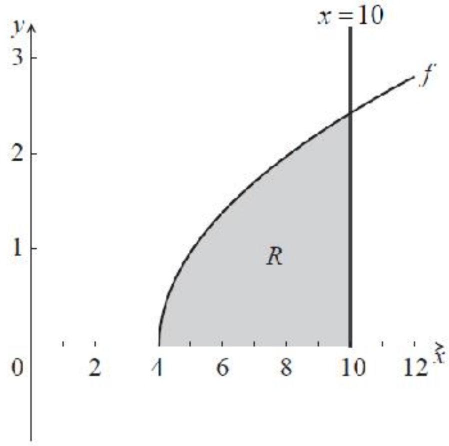
(b) Halle $f(x)$; exprese la respuesta en la forma $Ax^2 + Bx + C$.

(c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje x, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Nov 12
P1#3

(a) Halle $\int_4^{10} (x-4)\,dx$.

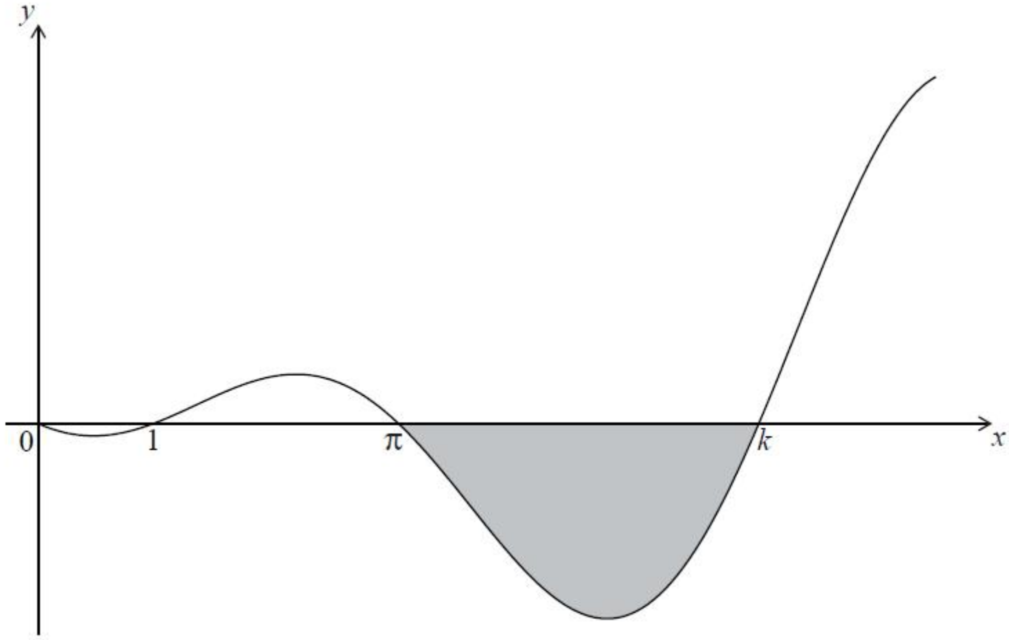
(b) A continuación se muestra una parte de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-4}$, para $x \ge 4$. La región sombreada R está delimitada por la gráfica de f, la recta $x = 10$, y el eje x.



La región R se rota $360°$ alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución así generado.

Mayo 12
TZ1
P2#4

The graph of $y=(x-1)\sin x$, for $0 \le x \le \frac{5\pi}{2}$, is shown below.



The graph has x-intercepts at 0, 1, π and k.

(a) Find k.

The shaded region is rotated 360° about the x-axis. Let V be the volume of the solid formed.

(b) Write down an expression for V.

(c) Find V.

Nov 12
P1#10

Sea $f(x)=\frac{6x}{x+1}$, para $x>0$.

(a) Halle $f'(x)$.

Sea $g(x)=\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)$, para $x>0$.

(b) Compruebe que $g'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

(c) Sea $h(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. El área de la región delimitada por la gráfica de h, el eje x y las rectas $x=\frac{1}{5}$ y $x=k$ es igual a $\ln 4$. Sabiendo que $k>\frac{1}{5}$, halle el valor de k.

Nov 12
P2#9

Considere la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de f, para $-1 \leq x \leq 5$.

Esta función también se puede escribir de la forma $f(x) = (x-p)^2 - 3$.

(b) Escriba el valor de p.

La gráfica de g se obtiene realizando una simetría de la gráfica de f respecto al eje x, seguida de una traslación de $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) Compruebe que $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Las gráficas de f y g se cortan en dos puntos.

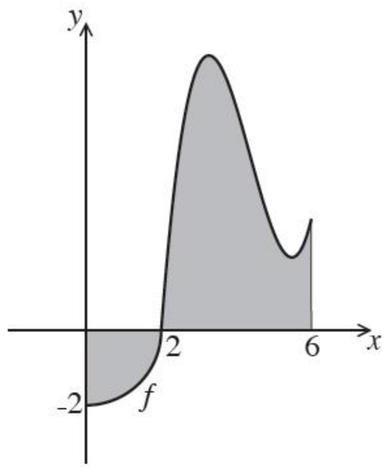
(d) Escriba la coordenada x de cada uno de estos dos puntos.

Sea R la región delimitada por las gráficas de f y g.

(e) Halle el área de R.

Mayo 13
TZ2
P1#7

A continuación se muestra la gráfica de una función f, para $0 \leq x \leq 6$.



La primera parte de la gráfica es un cuarto de círculo de radio 2 y con centro en el origen.

(a) Halle $\int_0^2 f(x)\,dx$.

(b) La región sombreada está delimitada por la gráfica de f, el eje y, el eje x y la recta $x = 6$. El área de esta región es igual a 3π.

Halle $\int_2^6 f(x)\,dx$.

Mayo 13 TZ1 P1#6

Let $f(x)=\int \frac{12}{2x-5}\,dx$, for $x>\frac{5}{2}$. The graph of f passes through $(4, 0)$.

Find $f(x)$.

Mayo 13 TZ2 P2#10

Sean $f(x)=e^{\frac{x}{4}}$ y $g(x)=mx$, donde $m\geq 0$, y $-5\leq x\leq 5$. Sea R la región delimitada por el eje y, la gráfica de f y la gráfica de g.

(a) Sea $m=1$.

(i) Sobre los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente la gráfica de f y la gráfica de g.

(ii) Halle el área de R.

(b) Considere todos los valores de m para los cuales la gráfica de f y la de g se cortan. Halle el valor de m para el cual el área de R alcanza su valor máximo.

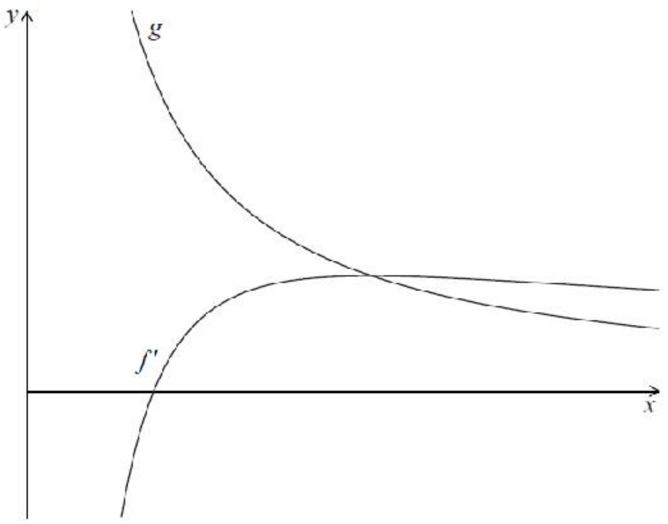
Nov 13 P1#10

Sea $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$ para $x>0$.

(a) Compruebe que $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(b) La gráfica de f tiene un mínimo. Halle la coordenada x de este mínimo.

Sea $g(x)=\frac{1}{x}$. La siguiente figura muestra una parte de las gráficas de f' y de g.



La gráfica de f' corta al eje x en $x=p$.

(c) Escriba el valor de p.

La gráfica de g y la gráfica de f' se cortan en $x=q$.

(d) Halle el valor de q.

(e) Sea R la región delimitada por la gráfica de f', la gráfica de g y la recta $x=p$. Compruebe que el área de R es igual a $\frac{1}{2}$.

Nov 13 P1#4

Considere una función $f(x)$ tal que $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x = 8$.

(a) Halle $\int_1^6 2f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Halle $\int_1^6 \left(f(x)+2\right)\mathrm{d}x$.

Nov 13 P2#2

Sea $f(x) = (x-1)(x-4)$.

(a) Halle las intersecciones de la gráfica de f con el eje x.

(b) La región delimitada por la gráfica de f y el eje x se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución así generado.

Nov 13 P2#3

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{1}{2}$.

(a) Halle $f'(x)$.

(b) Halle $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Muestra 14 P1#5

(a) Find $\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(b) Find $\int \sin 3x \cos 3x \,\mathrm{d}x$.

Muestra 14 P2#9

Let $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.

(a) Find $h^{-1}(x)$.

(b) (i) Sketch the graph of h for $-4 \le x \le 4$ and $-5 \le y \le 8$, including any asymptotes.

(ii) Write down the equations of the asymptotes.

(iii) Write down the x-intercept of the graph of h.

(c) Let R be the region in the first quadrant enclosed by the graph of h, the x-axis and the line $x = 3$.

(i) Find the area of R.

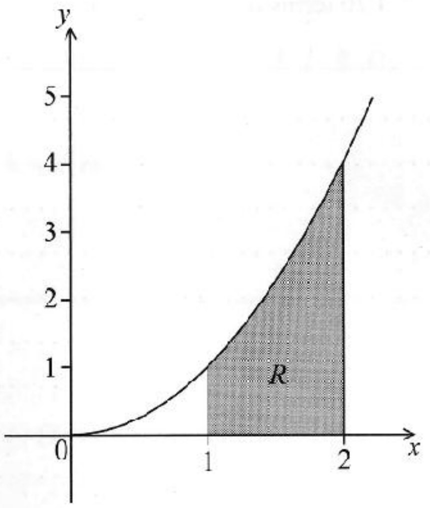
(ii) Write down an expression for the volume obtained when R is revolved through 360° about the x-axis.

Mayo 14 TZ1 P1#3

Let $f(x) = x^2$.

(a) Find $\int_1^2 (f(x))^2 dx$.

(b) The following diagram shows part of the graph of f.



The shaded region R is enclosed by the graph of f, the x-axis and the lines $x = 1$ and $x = 2$.

Find the volume of the solid formed when R is revolved $360°$ about the x-axis.

Mayo 14 TZ1 P1#6

Let $\int_{\pi}^{a} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}$, where $\pi < a < 2\pi$. Find the value of a.

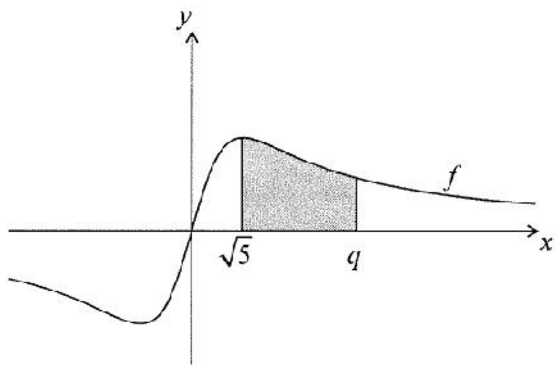
Mayo 14 TZ2 P1#10

Sea $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$.

(a) Utilice la regla del cociente para mostrar que $f'(x) = \frac{10-2x^2}{(x^2+5)^2}$.

(b) Halle $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$.

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f.



(c) La región sombreada está delimitada por el gráfico de f, el eje x, y las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = q$. El área de esta región es igual a $\ln 7$. Halle el valor de q.

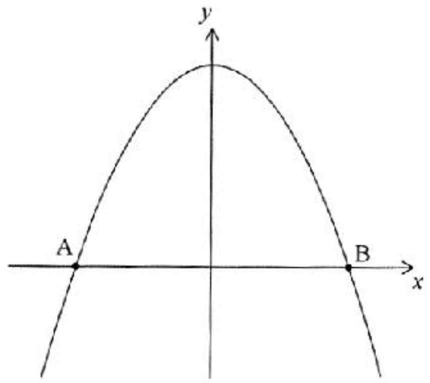
Mayo 14 TZ2 P1#5

El gráfico de una función h pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{12}, 5\right)$.

Sabiendo que $h'(x) = 4\cos 2x$, halle $h(x)$.

Mayo 14 TZ2 P2#2

Sea $f(x) = 5 - x^2$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f.



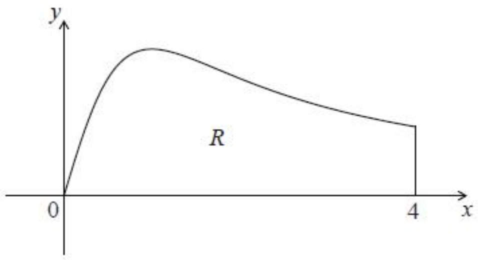
El gráfico corta al eje x en los puntos A y B.

(a) Halle la coordenada x de A y de B.

(b) La región delimitada por el gráfico de f y el eje x se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución generado.

Nov 14 P1#6

La siguente figura muestra el gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, para $0 \le x \le 4$, y la recta $x = 4$.

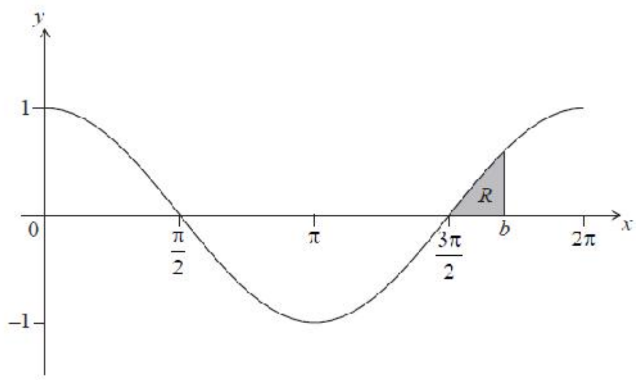


Sea R la región delimitada por el gráfico de f, el eje x y la recta $x = 4$.

Halle el área de R.

Mayo 15 TZ1 P1#7

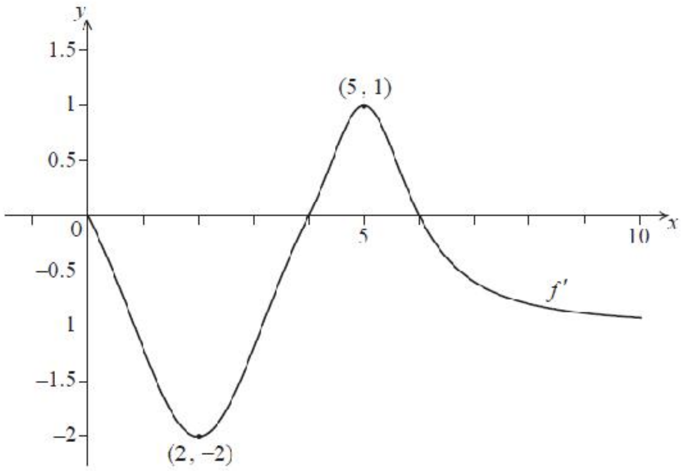
Let $f(x) = \cos x$, for $0 \le x \le 2\pi$. The following diagram shows the graph of f. There are x-intercepts at $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.



The shaded region R is enclosed by the graph of f, the line $x = b$, where $b > \frac{3\pi}{2}$, and the x-axis. The area of R is $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Find the value of b.

Mayo 15 TZ1 P2#10

Consider a function f, for $0 \le x \le 10$. The following diagram shows the graph of f', the derivative of f.



The graph of f' passes through $(2, -2)$ and $(5, 1)$, and has x-intercepts at 0, 4 and 6.

(a) The graph of f has a local maximum point when $x - p$. State the value of p, and justify your answer .

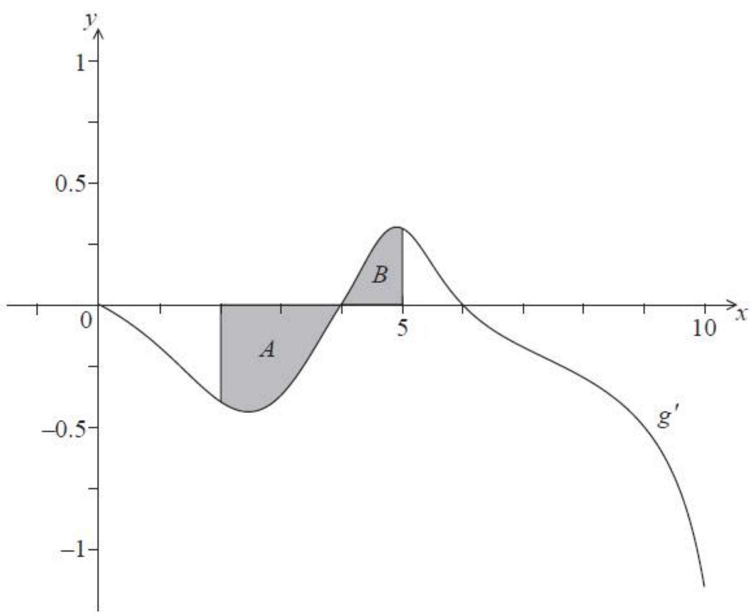
(b) Write down $f'(2)$.

Let $g(x) - \ln\left(f(x)\right)$ and $f(2) = 3$.

(c) Find $g'(2)$.

(d) Verify that $\ln 3 + \int_2^a g'(x)\,\mathrm{d}x = g(a)$, where $0 \le a \le 10$.

(e) The following diagram shows the graph of g', the derivative of g.



The shaded region A is enclosed by the curve, the x-axis and the line $x = 2$, and has area 0.66 units^2.

The shaded region B is enclosed by the curve, the x-axis and the line $x = 5$, and has area 0.21 units^2.

Find $g(5)$.

Mayo 15
TZ2
P1#4

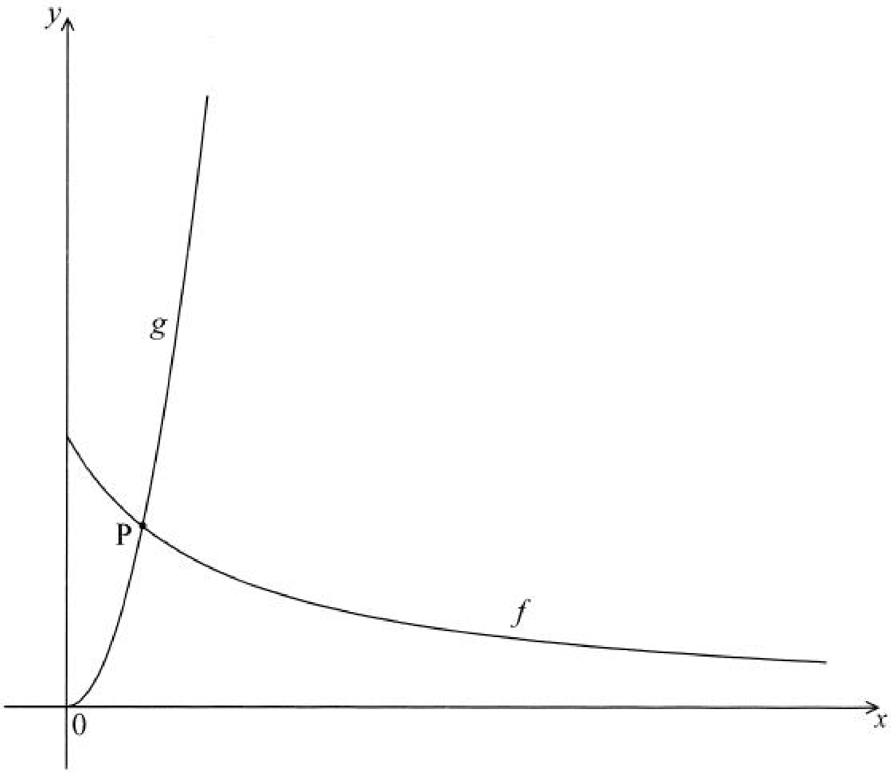
Sea $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(a) Halle $g'(x)$.

(b) Halle $\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Mayo 15
TZ2
P2#8

Sean $f(x) = \dfrac{9}{x+2}$ y $g(x) = 3x^2$, para $x \geq 0$. La siguiente figura muestra partes de los gráficos de f y g.



El gráfico de f y el de g se cortan en el punto $\mathrm{P}(p, q)$.

(a) Halle el valor de p y el de q.

(b) Escriba $f'(p)$.

Sea L la normal al gráfico de f en P.

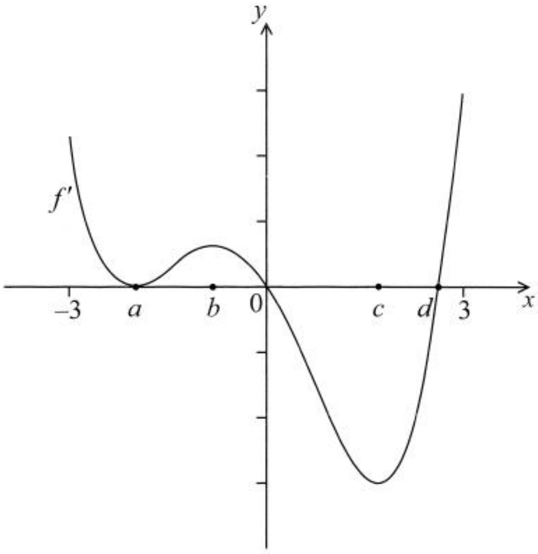
(c) (i) Halle la ecuación de L, de la forma $y = ax + b$.

(ii) Escriba el punto de intersección de L con el eje y.

(d) Sea R la región delimitada por el eje y, el gráfico de g y la recta L.
Halle el área de R.

Mayo 15 TZ2 P1#10

Considere una función f cuyo dominio sea $-3 < x < 3$. La siguiente figura muestra el gráfico de f', la **derivada** de f.



El gráfico de f' tiene puntos de intersección con el eje x en $x = a$, $x = 0$, y $x = d$. Hay un máximo local en $x = b$ y hay mínimos locales en $x = a$ y en $x = c$.

(a) Halle todos los posibles valores de x para los cuales el gráfico de f es decreciente.

(b) (i) Halle el valor de x para el cual el gráfico de f tiene un mínimo local.

(ii) Justifique su respuesta.

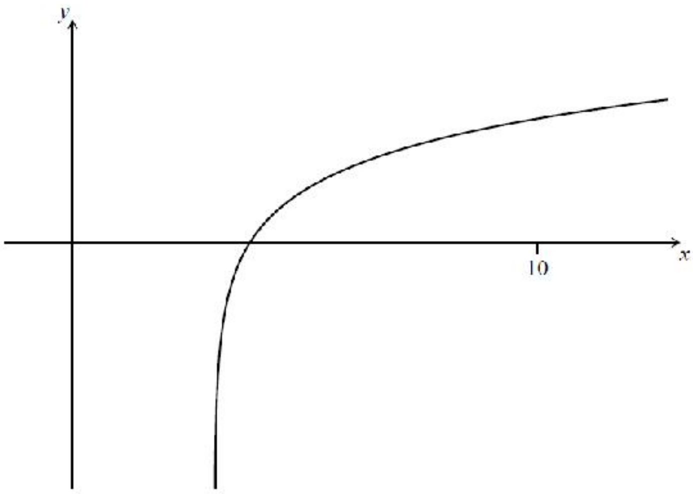
(c) El área total de la región delimitada por el gráfico de f' y el eje x es igual a 15. Sabiendo que $f(a) = 3$ y $f(d) = -1$, halle el valor de $f(0)$.

Nov 15 P1#3

Let $f'(x) = 6x^2 - 5$. Given that $f(2) = -3$, find $f(x)$.

Nov 15 P2#3

Let $f(x) = 2\ln(x-3)$, for $x > 3$. The following diagram shows part of the graph of f.



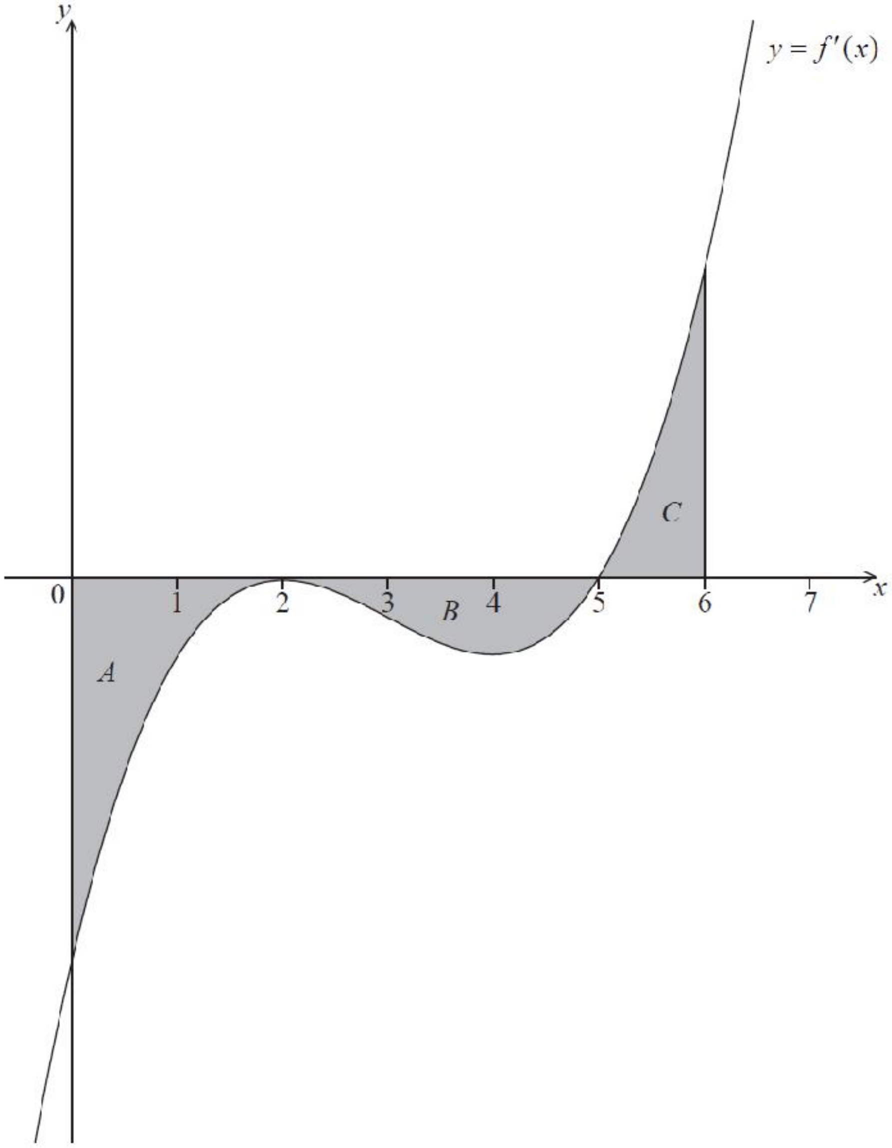
(a) Find the equation of the vertical asymptote to the graph of f.

(b) Find the x-intercept of the graph of f.

(c) The region enclosed by the graph of f, the x-axis and the line $x = 10$ is rotated 360° about the x-axis. Find the volume of the solid formed.

Nov 15
P1#10cd

The following diagram shows the shaded regions A, B and C.



The regions are enclosed by the graph of f', the x-axis, the y-axis, and the line $x = 6$. The area of region A is 12, the area of region B is 6.75 and the area of region C is 6.75.

(c) Given that $f(0) - 14$, find $f(6)$.

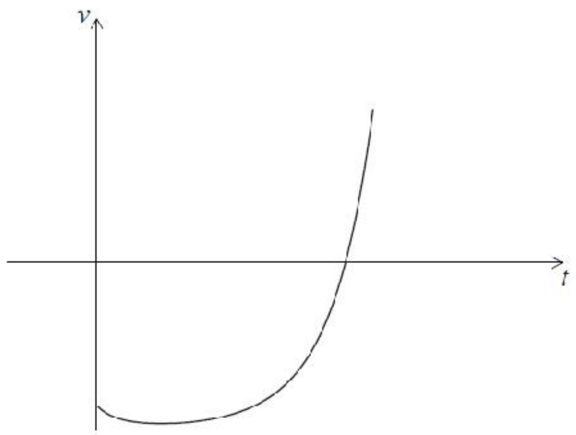
(d) Let $g(x) = \left(f(x)\right)^2$. Given that $f'(6) = 16$, find the equation of the tangent to the graph of g at the point where $x = 6$.

Nov 15 P2#6

The velocity $v\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ of a particle after t seconds is given by

$$v(t) = (0.3t + 0.1)^t - 4, \text{ for } 0 \le t \le 5.$$

The following diagram shows the graph of v.



(a) Find the value of t when the particle is at rest.

(b) Find the value of t when the acceleration of the particle is 0.

Mayo 16 TZ1 P1#9

Let $f'(x) = \dfrac{6-2x}{6x-x^2}$, for $0 < x < 6$.

The graph of f has a maximum point at P.

(a) Find the x-coordinate of P.

The y-coordinate of P is $\ln 27$.

(b) Find $f(x)$, expressing your answer as a single logarithm.

(c) The graph of f is transformed by a vertical stretch with scale factor $\dfrac{1}{\ln 3}$. The image of P under this transformation has coordinates (a, b).

Find the value of a and of b, where $a, b \in \mathbb{N}$.

Mayo 16 TZ1 P1#10

Let $f(x) = \sqrt{4x+5}$, for $x \ge -1.25$.

(a) Find $f'(1)$.

Consider another function g. Let R be a point on the graph of g. The x-coordinate of R is 1. The equation of the tangent to the graph at R is $y = 3x + 6$.

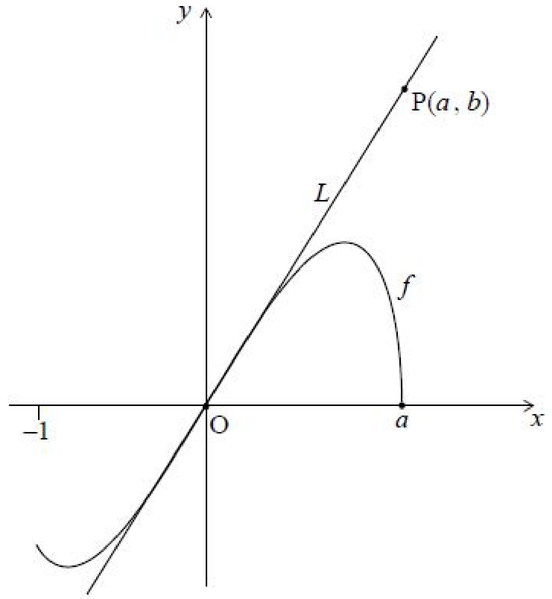
(b) Write down $g'(1)$.

(c) Find $g(1)$.

(d) Let $h(x) = f(x) \times g(x)$. Find the equation of the tangent to the graph of h at the point where $x = 1$.

Mayo 16
TZ2
P1#10

La siguiente figura muestra el gráfico de $f(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$, para $-1 \le x \le a$, donde $a > 1$.

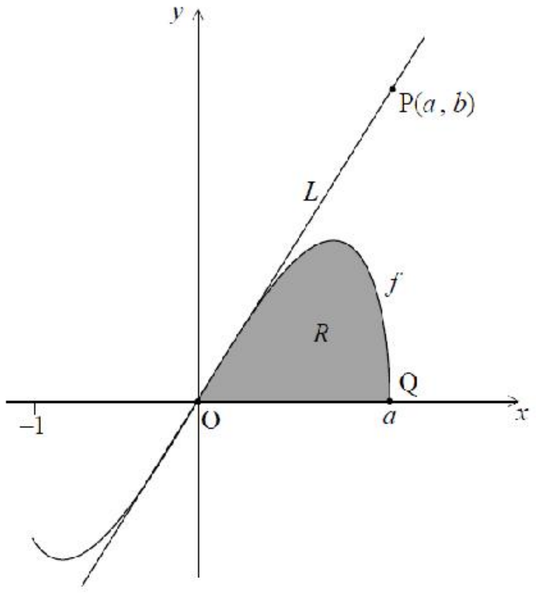


La recta L es la tangente al gráfico de f en el origen, O. El punto $P(a, b)$ pertenece a L.

(a) (i) Sabiendo que $f'(x) = \dfrac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, para $-1 \le x < a$, halle la ecuación de L.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión para b en función de a.

El punto $Q(a, 0)$ pertenece al gráfico de f. Sea R la región delimitada por el gráfico de f y el eje x. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.



Sea A_R el área de la región R.

(b) Muestre que $A_R = \dfrac{2}{3}a^3$.

(c) Sea A_T el área del triángulo OPQ. Sabiendo que $A_T = kA_R$, halle el valor de k.

Mayo 16 TZ1 P2#2

Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = 3\ln(x+1)$, for $x > -1$.

(a) Solve $f(x) = g(x)$.

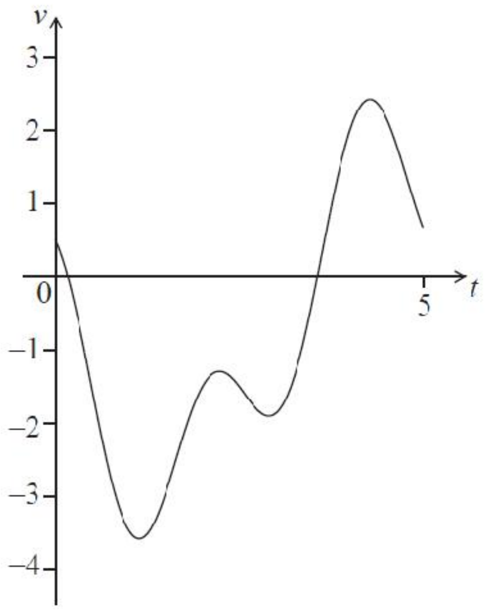
(b) Find the area of the region enclosed by the graphs of f and g.

Mayo 16 TZ1 P2#9

A particle P moves along a straight line so that its velocity, $v\ \mathrm{ms}^{-1}$, after t seconds, is given by $v = \cos 3t - 2\sin t - 0.5$, for $0 \le t \le 5$. The initial displacement of P from a fixed point O is 4 metres.

(a) Find the displacement of P from O after 5 seconds.

The following sketch shows the graph of v.



(b) Find when P is first at rest.

(c) Write down the number of times P changes direction.

(d) Find the acceleration of P after 3 seconds.

(e) Find the maximum speed of P.

Mayo 16 TZ2 P2#7

Una partícula se mueve en línea recta. Su velocidad $v\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ al cabo de t segundos viene dada por

$$v = 6t - 6, \text{ para } 0 \le t \le 2.$$

Al cabo de p segundos, la partícula se encuentra a $2\,\mathrm{m}$ de su posición inicial. Halle los posibles valores de p.

Nov 16 P2#4

Let $f(x) = xe^{-x}$ and $g(x) = -3f(x) + 1$.

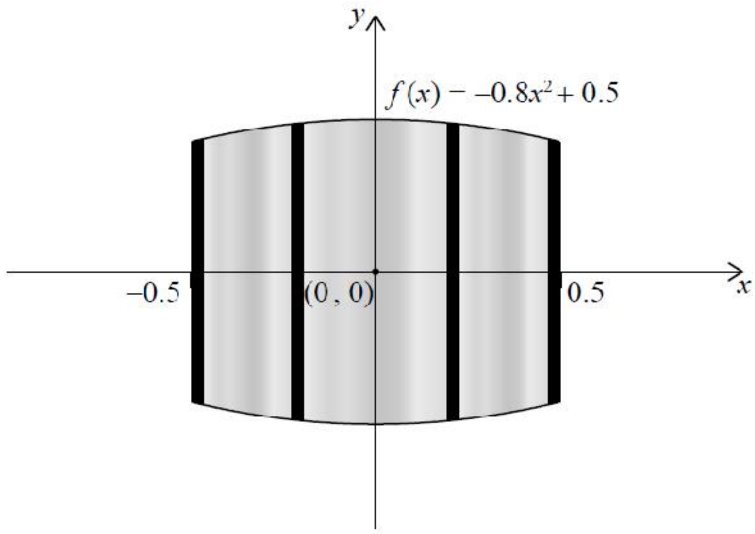
The graphs of f and g intersect at $x = p$ and $x = q$, where $p < q$.

(a) Find the value of p and of q.

(b) Hence, find the area of the region enclosed by the graphs of f and g.

Nov 16 P2#6

Let $f(x) = -0.8x^2 + 0.5$, for $-0.5 \le x \le 0.5$. Mark uses $f(x)$ as a model to create a barrel. The region enclosed by the graph of f, the x-axis, the line $x = -0.5$ and the line $x = 0.5$ is rotated 360° about the x-axis. This is shown in the following diagram.



(a) Use the model to find the volume of the barrel.

(b) The empty barrel is being filled with water. The volume $V\ \text{m}^3$ of water in the barrel after t minutes is given by $V = 0.8\left(1 - e^{-0.1t}\right)$. How long will it take for the barrel to be half-full?