Ecuaciones racionales:

a) $x^2 = \frac{12}{x^2+1}$

$x^2\left(x^2+1\right)=12$ ➔ $x^4+x^2-12=0$ ➔

$$x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\\ -4\Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}\notin\Re\end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son válidas ya que no anulan los denominadores

b) $\frac{6-x}{3}-\frac{3(x-4)}{6+x}=\frac{x-2}{3}$ ➔ $\frac{(6-x)(6+x)-9(x-4)}{\cancel{3(6+x)}}=\frac{(6+x)(x-2)}{\cancel{3(6+x)}}$

➔ $36-x^2-9x+36=6x-12+x^2-2x$ ➔ $2x^2+13x-84=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{13\pm\sqrt{169+672}}{4}=\frac{13\pm\sqrt{841}}{4}=\frac{13\pm 29}{4}=\begin{cases}x=\frac{42}{4}=\frac{21}{2}\\ x=\frac{-16}{4}=4\end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son válidas ya que no anulan los denominadores

c) $\frac{2(2x+1)}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{2x+1}+5=0$ ➔ $\frac{2(2x+1)^2-3(2x-1)^2+5(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{0}{(2x-1)(2x+1)}$

$2\left(4x^2+4x+1\right)-3\left(4x^2-4x+1\right)+5\left(4x^2-1\right)=0$

$8x^2+8x+2-12x^2+12x-3+20x^2-5=0$ ➔ $16x^2+20x-6=0$; $8x^2+10x-3=0$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2.8}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{16}=\frac{-10\pm 14}{16}=\begin{cases}\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\\ \frac{-24}{16}=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son válidas ya que no anulan los denominadores

d) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x-1}=4-\frac{3x-1}{x+2}$

$$\frac{(2x-1)(x-1)(x+2)-(x-7)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{4(x+2)(x-1)(x+1)-(3x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$(2x-1)\left(x^2+x-2\right)-(x-7)\left(x^2+3x+2\right)=(4x+8)\left(x^2-1\right)-(3x-1)\left(x^2-1\right)$

$2x^3+2x^2-4x-x^2-x+2-x^3-3x^2-2x+7x^2+21x+14=4x^3-4x+8x^2-8-3x^3+3x+x^2-1$

$-4x^2+15x+25=0$

$4x^2-15x-25=0$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 4\cdot(-25)}}{2\cdot 4}=\frac{15\pm\sqrt{225+400}}{8}=\frac{15\pm 25}{8}=\begin{cases}\frac{40}{8}=5\\ \frac{-10}{8}=-\frac{5}{4}\end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son válidas ya que no anulan los denominadores

b) $\dfrac{x+1}{3x-6}-\dfrac{x-1}{2x-4}=\dfrac{10-x^2}{6x^2-24}$

$\dfrac{2(x+1)(x+2)-3(x-1)(x+2)}{6(x+2)(x-2)}=\dfrac{10-x^2}{6(x+2)(x-2)}$ ➔ $2x^2+6x+4-3x^2-3x+6=10-x^2$ ➔ $x=0$

La solución obtenida es válida ya que no anula los denominadores

Ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{28+2x}=\sqrt{21+x}-1$

$\left(\sqrt{28+2x}\right)^2=\left(\sqrt{21+x}-1\right)^2$ ➔ $28+2x=\left(\sqrt{21+x}\right)^2-2\sqrt{21+x}+1$ ➔

➔ $28+2x-21-x-1=-2\sqrt{21+x}$ ➔ $(x+6)^2=\left(-2\sqrt{21+x}\right)^2$

➔ $x^2+12x+36=84+4x$ ➔ $x^2+8x-48=0$

➔ $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+192}}{2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{256}}{2}=\dfrac{-8\pm16}{2}=\begin{cases}4\\-12\end{cases}$

Comprobamos las soluciones: 4 no es válida, $\sqrt{28+8}\neq\sqrt{21+4}-1$

b) $\dfrac{40}{\sqrt{x-20}}=\sqrt{x-20}-\sqrt{x}$

$\dfrac{40}{\sqrt{x-20}}=\dfrac{\left(\sqrt{x-20}\right)^2-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-20}}{\sqrt{x-20}}$

➔ $40=x-20-\sqrt{x(x-20)}$ ➔ $\sqrt{x^2-20x}=x-20-40$ ➔ $\left(\sqrt{x^2-20x}\right)^2=(x-60)^2$

➔ $x^2-20x=x^2-120x+3600$ ➔ $100x=3600$ ➔ $x=36$

Comprobamos la solución: $\dfrac{40}{\sqrt{36-20}}=\sqrt{36-20}-\sqrt{36}$

$\dfrac{40}{4}\neq 4-6$, que en este caso no es válida

Resuelve las ecuaciones y comprueba los resultados:

Soluciones

1) $\dfrac{x^2-32}{4}+\dfrac{28}{x^2-9}=0$ $x_1=5,\ x_2=-5,\ x_3=4,\ x_4=-4$

2) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{13+\sqrt{x}}}}=2$ x= 2601

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$ $x_1=1,\ x_2=5$,

4) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x^2+3}{x}=x^3$ x=0

5) $\sqrt{9+x}-5=\dfrac{2x+1}{3}$ x= -5

6) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$ x= -2

Ecuaciones Exponenciales:

1. $3^{x^2-2x}=1$
2. $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$
3. $2^{2x}-3\cdot 2^x-4=0$
4. $9^{x-1}=3^{3x+1}$
5. $9^{x+3}=3^{3x+5}$
6. $10^{x^2-11x+30}=100$
7. $8^{x^2+3x+2}=1$
8. $2^x\cdot 3^x=216$
9. $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$
10. $5^x+5^{x-1}=6$
11. $4^{x-2}-2^{x+1}=-12$
12. $4^{x-1}+2^{x+2}=48$
13. $5^{2x+1}-5^{x+2}=2500$
14. $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}=39$
15. $9^x-6\cdot 3^{x+1}+81=0$

Soluciones:

1. $x_1=0; x_2=2$
2. $x_1=-2; x_2=2$
3. $x=0$
4. $x=-3$
5. $x=1$
6. $x_1=4; x_2=7$
7. $x_1=-2; x_2=-1$
8. $x=3$
9. $x=1$
10. $x=1$
11. $x\approx 4{,}585$
12. $x=3$
13. $x=2$
14. $x=2$
15. $x=2$

Ecuaciones Logarítmicas:

1. $\log(x)+\log(2)=1$
2. $\log(x)-\log(3)=1$
3. $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$
4. $2\log x=4+\log\left(\frac{x}{10}\right)$
5. $\log(2x)-\log(3)+\log x=3$
6. $\log(x^2)-\log 3=\log x-\log 5$
7. $2\log x-\log(16)=\log\frac{x}{2}$
8. $2\log\left((2x)^2\right)-3\log(x)=1$
9. (*) $\log x-\log(3)=2\log(x-3)$
10. (*) $\log(x^2)-\log\left(x+\frac{11}{10}\right)=1$

Soluciones:

1) $x=5$
2) $x=30$
3) $x=3$
4) $x=1000$
5) $x_1=10\sqrt{5};\ x_2=-10\sqrt{5}$
6) $x=3/5$
7) $x=8$
8) $x=5/8$
9) $x_1=\frac{19+\sqrt{37}}{6};\ x_2=\frac{19-\sqrt{37}}{6}$
10) $x=100/11$