M00 P2#2

a)

$y = -x^3 + 3x^2 \xrightarrow{\text{reflexión en torno eje } Y} y = -(-x)^3 + 3(-x)^2 = x^3 + 3x^2 \xrightarrow{\text{traslación vector } \binom{-1}{-1}}$

$\longrightarrow y = (x+1)^3 + 3(x+1)^2 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + \cancel{1} + 3x^2 + 6x + 3 - \cancel{1} = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

$\boxed{h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3}$

b) Para que el punto A se convierte en el punto A' podría hacer una reflexión en torno al eje X seguida de una traslación horizontal izquierda:

$y = -x^3 + 3x^2 \xrightarrow{\text{reflexión en torno eje } X} y = -(-x^3 + 3x^2) = x^3 - 3x^2 \xrightarrow{\text{traslación vector } \binom{-H}{0}}$

$\longrightarrow y = (x+H)^3 - 3(x+H)^2 = x^3 + 3x^2H + 3xH^2 + H^3 - 3x^2 - 6xH - 3H^2 =$

$= x^3 + 3x^2(H-1) + 3x(H^2 - 2H) + (H^3 - 3H^2)$

Para $H = 2$: $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ✓

M01 P1#5

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 2}$

$\frac{1}{x^2} - 2 \geq 0$; $x \neq 0$

$\frac{1}{x^2} - 2 = 0$; $\frac{1}{x^2} = 2$; $\frac{1}{2} = x^2$; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

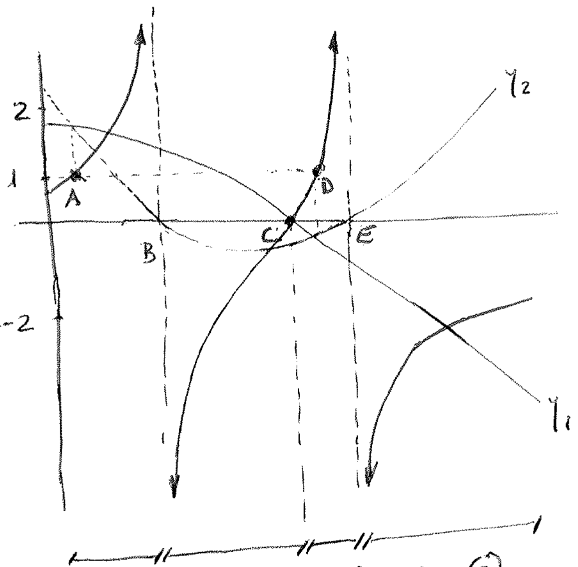
	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$+\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signo de $\frac{1}{x^2} - 2$	$-$	$+$	$+$	$-$	

a) $\boxed{\operatorname{dom} f = \left[-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, +\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] - \{0\}}$

b)
- $f(x)$ es siempre ≥ 0
- $f(x) = 0$ para $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{+\infty - 2} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{im} f = [0, +\infty)}$

M01 P1#19



Signo $\frac{y_1}{y_2}$: $\frac{+}{+} = +$ $\quad \frac{+}{-} = -$ $\quad \frac{-}{-} = +$ $\quad \frac{-}{+} = -$

$\frac{y_1}{y_2}$ toma el valor 1 en los puntos de intersección de y_1 con y_2 : A, D.

$\frac{y_1}{y_2}$ toma el valor 0 en los puntos en los que $y_1 = 0$: C

$\frac{y_1}{y_2}$ tiene asíntotas verticales en los valores de x en los que se anula y_2 : B, E

$\lim_{x \to B^-} \frac{y_1}{y_2} = \frac{\text{positivo}}{+0} = +\infty$

$\lim_{x \to B^+} \frac{y_1}{y_2} = \frac{\text{positivo}}{-0} = -\infty$

$\lim_{x \to E^-} \frac{y_1}{y_2} = \frac{\text{negativo}}{-0} = +\infty$

$\lim_{x \to E^+} \frac{y_1}{y_2} = \frac{\text{negativo}}{+0} = -\infty$

M02
P1 #15

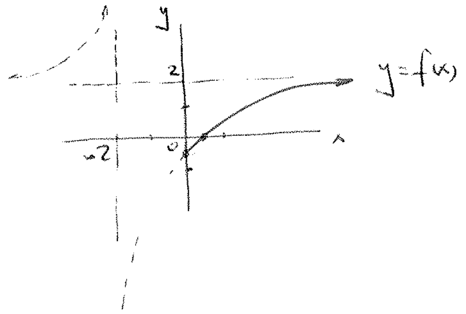
$f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2} \quad ; \quad x > 0$

b) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$

$x = \dfrac{2y-1}{y+2} \quad ; \quad xy + 2x = 2y - 1 \quad ; \quad 2x+1 = 2y - xy \quad ; \quad 2x+1 = y(2-x) \quad ; \quad y = \dfrac{2x+1}{2-x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{2-x}}$

a)



x	y
0	-1/2
1/2	0
+∞	2

$\boxed{\text{im} f = [-\frac{1}{2}, 2)}$

N02
P1 #4

$y = \dfrac{x^2-5x-4}{x^2-5x+4}$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad ; \quad x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x-4}{x^2-5x+4} = \dfrac{1-5-4}{1-5+4} = \dfrac{-8}{0} = \infty \longrightarrow$ Asintota Vertical $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-5x-4}{x^2-5x+4} = \dfrac{16-20-4}{16-20+4} = \dfrac{-8}{0} = \infty \longrightarrow$ Asintota Vertical $x = 4$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-5x-4}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = \dfrac{1}{1} = 1 \rightarrow$ Asintota Horizontal $y = 1$

N02
P1 #7

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+x) = \sqrt{x^2+x-2}$

$x^2 + x - 2 \geq 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \quad ; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Signo de x^2+x-2

$-\infty$	-2	1	$+\infty$
+		−	+

$\boxed{\text{dom } f \circ g = \mathbb{R} - (-2, 1)}$

$\boxed{\begin{matrix} a = -2 \\ b = 1 \end{matrix}}$

b) $y = \sqrt{x^2+x-2}$

y es ≥ 0

$y = 0$ en $x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x-2} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\text{im } f \circ g = [0, +\infty)}$

M03
P1 #17

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad ; \quad x \leq 0$$

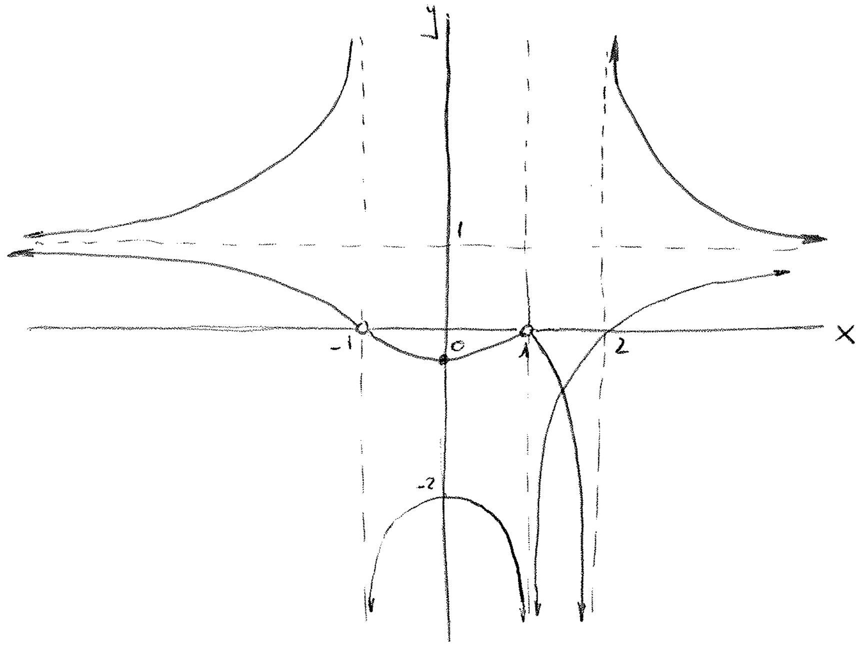
$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \quad ; \quad xy^2 + x = y^2 - 1 \quad ; \quad x+1 = y^2(1-x) \quad ; \quad y^2 = \frac{x+1}{1-x} \quad ; \quad y = \begin{cases} \cancel{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}} \\ -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \end{cases}$$

Porque dom f son los x negativos.

$$\boxed{f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}}$$

N03
P1 #6



- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^+ \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1^+} = 1^-$
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^- \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1^-} = 1^+$
  | Asíntota Horizontal $y=1$
- $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{1}{f(x)} = 0 \longrightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=-1$
- $f(x)$ tiene un máximo relativo en $(0,-2) \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ tiene un mínimo relativo en $(0,-\frac{1}{2})$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0 \rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=1$
- $f(2) = 0 \Rightarrow$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-0} = -\infty$; $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+0} = +\infty$ | Asíntota Vertical $x=2$

MO4 PITZ2 #11

$f(x) = x^3$

a) $(f \circ g)(x) = x+1 \longrightarrow f(g(x)) = x+1 \longrightarrow [g(x)]^3 = x+1 \Rightarrow \boxed{g(x) = \sqrt[3]{x+1}}$

b) $(g \circ f)(x) = x+1 \longrightarrow g(f(x)) = x+1 \longrightarrow g(x^3) = x+1 \Rightarrow \boxed{g(x) = \sqrt[3]{x} + 1}$

MO5 PITZ1 #14

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin \frac{\pi x}{2}) = e^{2\sin\frac{\pi x}{2}}$

$\frac{\pi T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T=4}$

b) En un periodo $[0,4)$: $e^{2\sin\frac{\pi x}{2}} = 4$; $2\sin\frac{\pi x}{2} = \ln 4$;

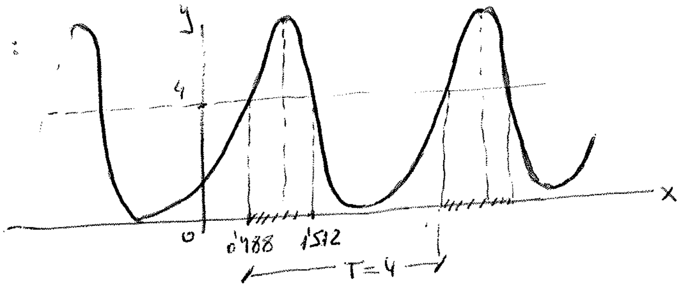
$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{\ln 4}{2}$; $\frac{\pi x}{2} = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{\ln 4}{2}\right) \\ \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\ln 4}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{\ln 4}{2}\right) = 0'488 \\ 2 - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{\ln 4}{2}\right) = 1'512 \end{cases}$

$e^{2\sin\frac{\pi x}{2}} > 4$

0	0'488	1'512	4
NO	SÍ	NO	

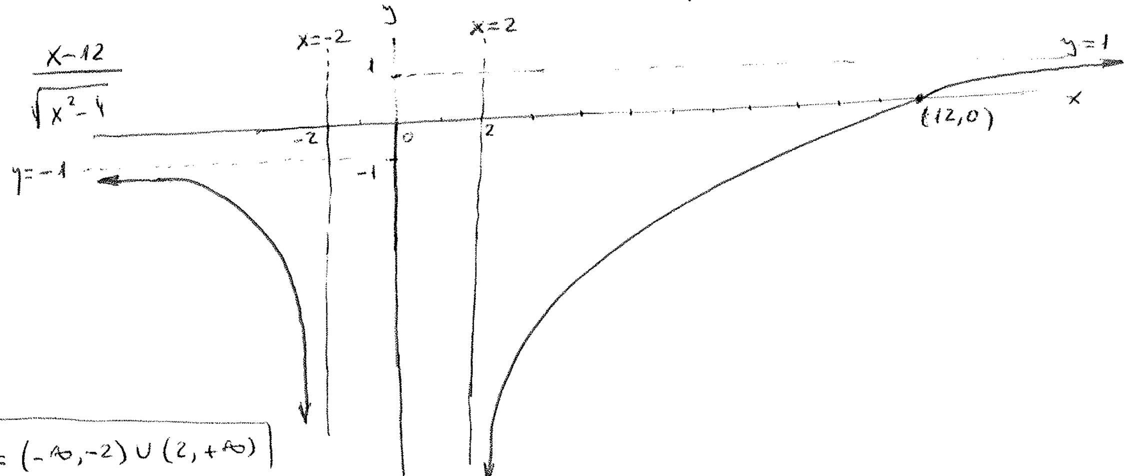
Por lo tanto: $(0'488 + 4N\ ;\ 1'512 + 4N)$, para $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>También</u>, con calculadora gráfica:



MO5 PITZ1 #16

a)
b) $y = \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}}$

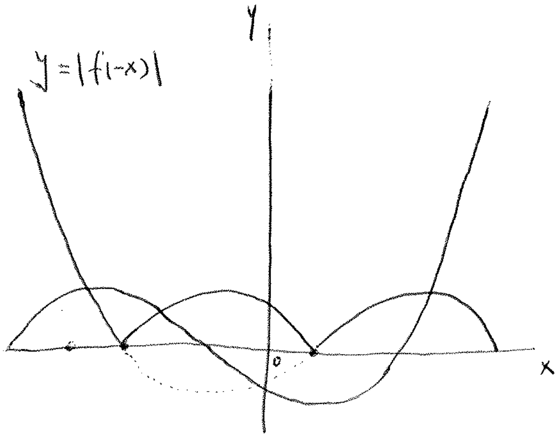


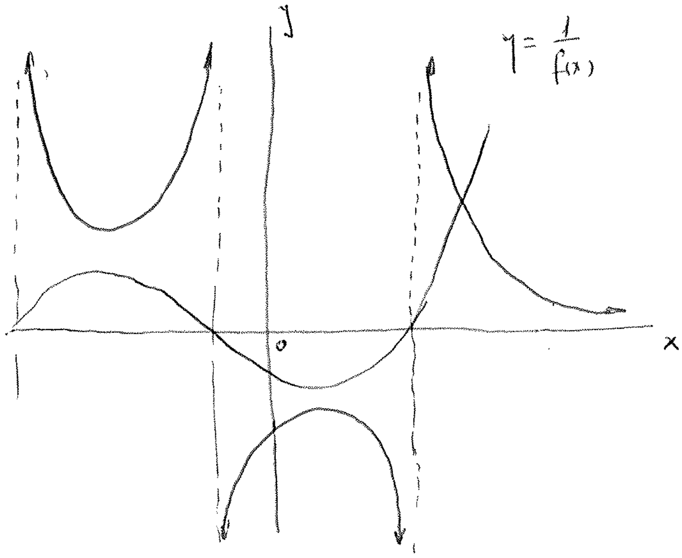
$\boxed{\mathrm{dom} f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)}$

- $y=0 \longrightarrow \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}} = 0$; $x - 12 = 0$; $x = 12 \Rightarrow \boxed{(12,0)}$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{-14}{+0} = -\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=-2^-}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{-10}{+0} = -\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=2^+}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{x-12}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{|x|} - \frac{12}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2-4}{|x|^2}}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-1 - \frac{12}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}} =$

  $= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-1 - \frac{12}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \frac{-1-0}{\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=-1 \text{ cuando } x\to -\infty}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-12}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 - 12/x}{\sqrt{1 - 4/x^2}} = \frac{1-0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=1 \text{ cuando } x\to +\infty}$

M06
P1 #20





$f(x) \to f(-x)$ Es una reflexión en torno al eje y

$f(-x) \to |f(-x)|$ Mantiene en la misma posición a los puntos situados sobre eje x y refleja en torno al eje x los situados por debajo

N09
P1 #4

$f(x) = \arcsen(\ln x)$

b) $x = \arcsen(\ln y)$; $\sen x = \ln y$; $y = e^{\sen x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f^{-1}(x) = e^{\sen x}}$

a) $y = \arcsen(\ln x)$

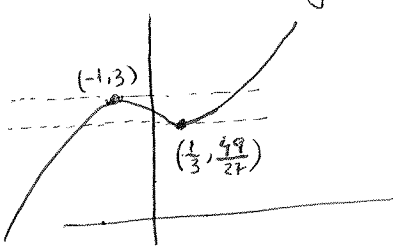
- Por un lado $x > 0$ para que exista $\ln x$
- Por otro lado : $-1 \leq \ln x \leq 1$ para que exista $\arcsen$. $\Big\} \Rightarrow$

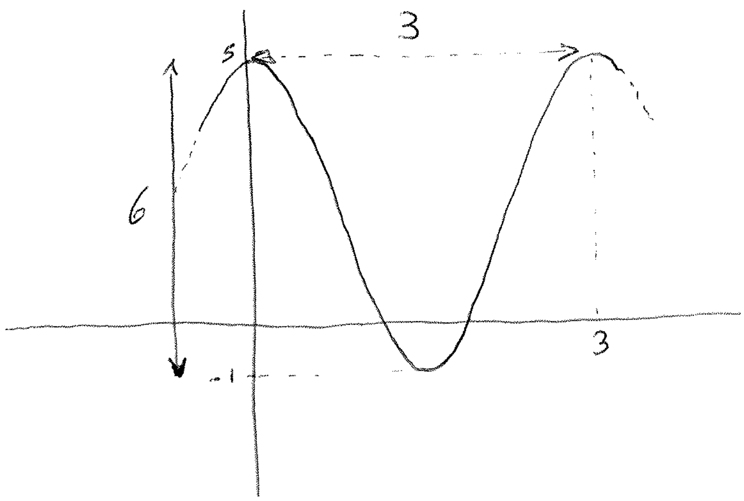
$\Rightarrow$ $e^{-1} \leq x \leq e^{1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{dom} f = \left[\frac{1}{e} ; e\right]}$

N09
P2 #1

Con calculadora gráfica representamos $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

Tiene tres soluciones reales distintas para : $\boxed{K \in \left(\frac{49}{27} ; 3\right)}$





M10
P2TZ1
#1

$y = a\cos(bx) + c$

- La amplitud es : $5-(-1)=6$
  Por lo tanto $\boxed{a=3}$
- Los máximos están a altura 5.
  Por lo tanto $3+c=5 \Rightarrow \boxed{c=2}$
- La diferencia de abscisas entre máximos es 3 $\Rightarrow$ Periodo $= 3$
  Por lo tanto : $b \cdot 3 = 2\pi \Rightarrow \boxed{b = \frac{2\pi}{3}}$

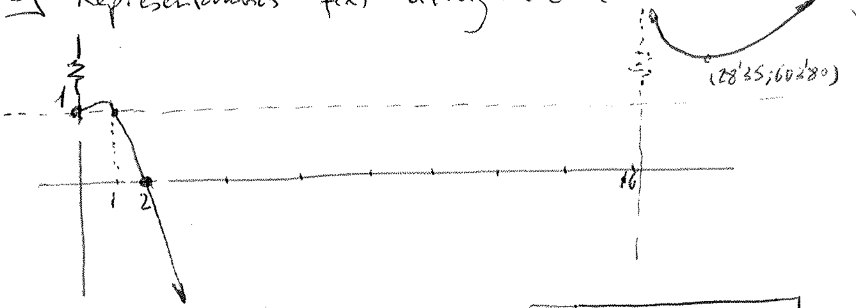
N10 P2TZ1 #1

a) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4-\sqrt{x}}$

- Por un lado, $x \geq 0$ para que exista $\sqrt{x}$
- Por otro lado, $4-\sqrt{x} \neq 0 \rightarrow x \neq 16$

$\Rightarrow \boxed{\text{dom} f = [0, +\infty) - \{16\}}$

b) Representamos f(x) utilizando la calculadora gráfica:



Por lo tanto, $f(x) \geq 1 \Rightarrow \boxed{x \in [0, 1] \cup (16, +\infty)}$

N10 P1#9

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arccos x}$

- Por un lado, $-1 \leq x \leq 1$ para que exista arccos
- Por otro lado $\dfrac{\pi}{4} - \arccos x \geq 0 \rightarrow \arccos x \leq \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

¿$\arccos x \leq \dfrac{\pi}{4}$?

-1	$\sqrt{2}/2$	1
NO	SÍ	

$\boxed{\text{dom} f = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arccos x}$

$x = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arccos y}$; $x^2 = \dfrac{\pi}{4} - \arccos y$; $\arccos y = \dfrac{\pi}{4} - x^2$; $\boxed{y = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x^2\right)}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x^2\right)}$

Esta expresión está definida para todo $\mathbb{R}$, pero al ser la recíproca de f, mejor estudiamos el recorrido de f:

$f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arccos x}$, para la buena definición de f(x), $\arccos x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ por $\arccos x \in [0, \pi]$, por lo que $f(x) \in \left[0, \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}\right] \Rightarrow \boxed{\text{im} f = \left[0, \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}\right]}$

Por lo tanto, $\boxed{\text{dom} f^{-1} = \left[0, \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}\right]}$

N11 P2#8

a) $x = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$; $1+e^{-y} = \dfrac{1}{x}$; $e^{-y} = \dfrac{1}{x} - 1$; $e^{-y} = \dfrac{1-x}{x}$; $\dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1-x}{x}$; $e^y = \dfrac{x}{1-x}$; $y = \ln \dfrac{x}{1-x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \ln \dfrac{x}{1-x}}$

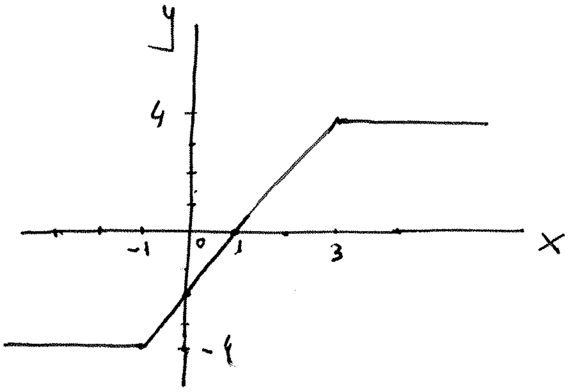
b) $f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \ln \dfrac{x}{1-x} \Rightarrow \boxed{x = 0'659}$ Resuelto con calculadora gráfica.

<u>También</u>: $f(x) = x \rightarrow \dfrac{1}{1+e^{-x}} = x \Rightarrow x = 0'659$ ✓

M12 P1 TZ1 #2

$f(x) = |x+1| - |x-3|$

x	y
-3	2-6=-4
-1	0-4=-4
0	1-3=-2
1	2-2=0
2	3-1=2
3	4-0=4
6	6-2=4



M12 P2 TZ1 #6

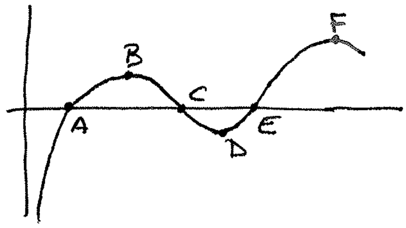
$f(x)=\ln x \xrightarrow[\text{Traslación según } \binom{3}{-2}]{} y=\ln(x-3)-2 \xrightarrow[\text{Reflejo en torno al eje X}]{} y=-\ln(x-3)+2$

$g(x) = -\ln(x-3)+2 = -\ln(x-3)+\ln e^2 = \boxed{\ln \frac{e^2}{x-3}}$

N13 P2 #3

$f(x) = \ln x - e^{\cos x}, \quad 0 < x \le 10$

A (1'97 , 0)
B (3'78 , 0'882) Máximo Relativo
C (5'24 , 0)
D (6'22 , -0'885) Mínimo Relativo
E (7'11 , 0)
F (9'70 , 1'89) Máximo Relativo



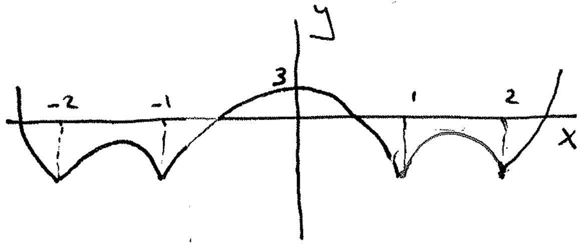
Hecho con calculadora Gráfica

M14 P2 TZ1 #12

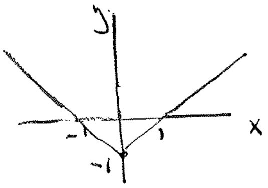
a) $(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = |0|-1 = -1$

$(f\circ g\circ f)(1) = f(g(g(1))) = f(g(0)) = f(4) = |4|-1 = 3$

$y = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = |g(x)|-1$



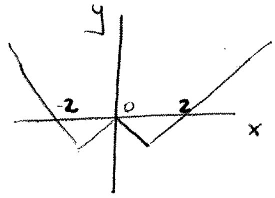
b) $f(x) = |x|-1$



x	y
-2	1
-1	0
0	-1
1	0
2	1

Ceros de f(x)

c) $(f\circ f)(x) = f(|x|-1) = ||x|-1|-1$



x	y
-2	0
-1	-1
0	0
1	-1
2	0

Ceros

d) $(f\circ f\circ f)(x) = |||x|-1|-1|-1$

$f^3(x) = f(f(f(x))) = 0 \Rightarrow |||x|-1|-1| = 1 \Rightarrow ||x|-1|-1 = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow ||x|-1| = 1\pm 1 \Rightarrow |x|-1 = \pm(1\pm 1) \Rightarrow |x| = 1\pm(1\pm 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm(1\pm(1\pm 1)) = \boxed{\begin{cases} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{cases}}$

$f^4(x) = f(f(f(f(x)))) = 0 \Rightarrow \quad x = \pm(1\pm(1\pm(1\pm 1))) = \boxed{\begin{cases} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{cases}}$

$f^8(x) = 0 \Rightarrow \quad \boxed{x = \begin{cases} -8 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{cases}}$

e) Los ceros de $f^{2n}(x)$ serían: $2n, 2n-2, \dots, 2, 0, -2, \dots, -(2n-2), -2n$

En total: $n + 1 + n = 2n+1$ ceros $\boxed{N = 2n+1}$

$$\sum_{r=1}^{2n+1} |a_r| = 2n + (2n-2) + \dots + 2 + 0 + 2 + \dots + 2n =$$

$$= 2\cdot(2+4+\dots+2n) = 4(1+2+\dots+n) = 4\,\frac{1+n}{2}\cdot n = \boxed{2n(n+1)}$$