**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES – 1ª Evaluación**
**PREGUNTAS MÁS FRECUENTES**

1. **¿Cómo se modifica el índice de un radical?**
   Se multiplican (o dividen) el índice y el exponente del radicando por un mismo número.

> Ejemplos:
> $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[20]{2^{15}}$ $\qquad \sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}$ $\qquad \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$ $\qquad \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

2. **¿Cómo se suman o restan radicales?**
   Sólo se pueden sumar o restar radicales iguales o equivalentes (aquellos que al simplificarse quedan iguales).

> Ejemplo:
> $\sqrt{27} + 5\cdot\sqrt{3} + \sqrt[4]{9} = 3\cdot\sqrt{3} + 5\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3} = 9\cdot\sqrt{3}$

> Ejemplo:
> $\sqrt{12} + 3\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{2} = 3\cdot\sqrt{3} + \sqrt{2}$

3. **¿Cómo se multiplican o dividen radicales?**
   Se ponen todos a índice común y se aplica que el producto de raíces es igual que la raíz de un producto y que el cociente de raíces es igual que la raíz de un cociente.

> Ejemplo:
> $$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{2^6\cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[12]{108}$$

4. **¿Cómo se racionaliza una fracción?**
   Se llama racionalizar una fracción al proceso que convierte una fracción que tiene radicales en el denominador en otra equivalente que no los tiene.
   Hay dos procedimientos distintos:
   Si el denominador es un único radical, multiplicamos el numerador y el denominador por el radical adecuado que sea capaz de simplificar la raíz del denominador. Después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

> Ejemplo:
> $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^7}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt[6]{2}}{2} = \sqrt[6]{2}$$

   Si el denominador es una suma o resta que contiene una o dos raíces cuadradas, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador (una resta si teníamos una suma o una suma si era una resta). En el denominador aplicamos diferencia de cuadrados, después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

> Ejemplo:
> $$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{90}-\sqrt{36}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}-6}{5-2} = \frac{3\left(\sqrt{10}-2\right)}{3} = \sqrt{10}-2$$

**5. ¿Cómo se resuelve una ecuación polinómica?**
Se buscan las raíces por Ruffini, hasta llegar al segundo grado, a partir de ahí, se puede continuar por Ruffini o aplicar la fórmula de las soluciones de la ecuación de 2º grado.

Ejemplo:
Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -12 | 41 | -30 |
| 1 | | 1 | -11 | 30 |
| | 1 | -11 | 30 | **0** |
| 5 | | 5 | -30 | |
| | 1 | -6 | **0** | |
| 6 | | 6 | | |
| | 1 | **0** | | |

Las soluciones son: $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$

Otro procedimiento: Se empieza igual, pero al llegar a 2º grado aplico la fórmula.
Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -12 | 41 | -30 |
| 1 | | 1 | -11 | 30 |
| | 1 | -11 | 30 | **0** |

Ahora resuelvo: $x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 5 \\ 6 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$

**6. ¿Es lo mismo factorizar un polinomio que resolver una ecuación polinómica?**
En la práctica sí. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación y viceversa.

Ejemplo:
Factoriza: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$

Como hemos visto en el ejemplo anterior, las raíces del polinomio son $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$ por lo que la expresión factorizada es: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = (x-1)(x-5)(x-6)$

Ejemplo:
Halla las soluciones de la ecuación, ya factorizada: $x(x+2)(x-3) = 0$

Viendo los factores, las raíces del polinomio son: $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases}$ por lo que las soluciones son: $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases}$

**7. ¿Cúales son las identidades notables más importantes?**

El cuadrado de la suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de la resta: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de cuadrados: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

<u>Ejemplos</u>*:*

Desarrolla: $(x^3 + 3x)^2$

$(x^3+3x)^2 = (x^3)^2 + 2\cdot x^3 \cdot 3x + (3x)^2 = x^6 + 6x^4 + 9x^2$

Convierte $9 - 6b + b^2$ en el cuadrado de una resta.

$9-6b+b^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot b + b^2 = (3-b)^2$

Factoriza: $9x^2 - 4$

$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x+2)(3x-2)$

**8. ¿Cómo se opera con fracciones algebraicas?**

Si se trata de un **producto** de dos fracciones, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores. Estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{6x-12}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}$

$$\frac{6x-6}{x^2+x}\cdot\frac{x^2-1}{3x} = \frac{(6x-6)\cdot(x^2-1)}{(x^2+x)\cdot 3x} = \frac{6(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x(x+1)\cdot 3x} = \frac{2(x-1)\cdot(x-1)}{x\cdot x} = \frac{2(x-1)^2}{x^2}$$

Si se trata de un **cociente** de dos fracciones, se multiplican en cruz. Como antes, estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{9-x^2}{x^2+1}:\dfrac{x+3}{3x^2+3}$

$$\frac{9-x^2}{x^2+1}:\frac{x+3}{3x^2+3} = \frac{(9-x^2)\cdot(3x^2+3)}{(x^2+1)\cdot(x+3)} = \frac{(3+x)\cdot(3-x)\cdot 3(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x+3)} = \frac{(3-x)\cdot 3}{1} = 9-3x$$

Si se trata de una **suma o resta** de dos fracciones, se factorizan los denominadores, se busca su mínimo común múltiplo y se ponen las fracciones con este común denominador (mínimo común múltiplo entre cada denominador por su numerador). Entonces se suman o restan los numeradores, se factoriza el nuevo numerador y se simplifican los elementos comunes. Hay que tener **mucho cuidado** con las fracciones que tienen delante un signo menos, ya que podemos confundirnos con los signos si no ponemos paréntesis. Como antes, el resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{x+7}{x^2-4} - \dfrac{2}{x-2}$

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+7}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} - \frac{x+7}{(x+2)(x-2)} = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+7}{(x+2)(x-2)} = \frac{2(x+2)-(x+7)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{2x+4-x-7}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-3}{(x+2)(x-2)}$$

**9. ¿Cómo se desarrolla la potencia de una suma (o resta)?**

Se utiliza la fórmula del binomio de Newton. En la potencia de una suma todos los sumandos son positivos, en la de una resta se alternan los signos empezando con +, el signo del último sumando depende del número de ellos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + ...... + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 - ......$$

En cada sumando va disminuyendo de uno en uno el exponente de la $a$ y aumentando el de la $b$. Los números combinatorios se obtienen del triángulo de Tartaglia.

Ejemplo:

$$(2x+3)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}(2x)^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{4} 3^4 =$$

$$= 1 \cdot 16 \cdot x^4 + 4 \cdot 8 \cdot x^3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot 9 + 4 \cdot 2 \cdot x \cdot 27 + 1 \cdot 81 = 16x^4 + 69x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica $\left(\sqrt{2}-1\right)^5$ mediante el binomio de Newton.

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\sqrt{2}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{2}\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot 1^2 - \binom{5}{3}\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{4}\left(\sqrt{2}\right)^1 \cdot 1^4 - \binom{5}{5} 1^5 =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot 1 = 4 \cdot \sqrt{2} - 20 + 20 \cdot \sqrt{2} - 20 + 5 \cdot \sqrt{2} - 1 = 29 \cdot \sqrt{2} - 41$$

**10. ¿Cómo se resuelve una ecuación irracional?**

Si hay un único radical, primero **aislamos** la raíz, después **elevamos** al cuadrado, **resolvemos** la ecuación que quede y por último se **comprueban** las soluciones. La comprobación es **obligatoria**, ya que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas acompañadas de las verdaderas.

Si hay más de un radical, primero aislamos una de las raíces, después elevamos al cuadrado, como todavía quedará algún radical, se aplica el procedimiento anterior.

Ejemplo:

Resuelve: $x = 21 - \sqrt{x+9}$

$$x = 21 - \sqrt{x+9} \Rightarrow \sqrt{x+9} = 21 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x+9}\right)^2 = (21-x)^2 \Rightarrow x + 9 = 441 - 42x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 43x - 432 = 0 \Rightarrow x^2 - 43x + 432 = 0 \Rightarrow x = \frac{43 \pm \sqrt{43^2 - 4 \cdot 1 \cdot 432}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 27 \\ 16 \end{cases}$$

Comprobamos la 1ª solución: $27 = 21 - \sqrt{27+9} \Rightarrow 27 = 21 - 6 \Rightarrow 27 = 19$, $x$ = 27 **no** es solución.

Comprobamos la 2ª solución: $16 = 21 - \sqrt{16+9} \Rightarrow 16 = 21 - 5 \Rightarrow 16 = 16$, $x$ = 16 **sí** es solución.

Ejemplo:

Resuelve: $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 4 = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow -2\sqrt{x-1} = -4 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

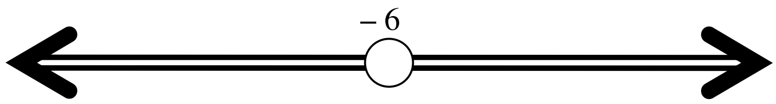
Comprobamos la solución: $\sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = 1 \Rightarrow 3 - 2 = 1$, luego $x$ =5 **sí** es solución.

**11. ¿Cómo se resuelve una inecuación?**
Se convierte la desigualdad en igualdad, se resuelve la ecuación, se utilizan las soluciones para trocear la recta real y se validan las distintas zonas probando un valor numérico de cada intervalo.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $2x-\frac{1}{3}\leq\frac{7x+4}{6}+x$

$$2x-\frac{1}{3}=\frac{7x+4}{6}+x\Rightarrow 12x-2=7x+4+6x\Rightarrow -x=6\Rightarrow x=-6$$




Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, por ejemplo el – 8:

$$2\cdot(-8)-\frac{1}{3}\leq\frac{7\cdot(-8)+4}{6}+(-8)\Rightarrow -16-\frac{1}{3}\leq\frac{-56+4}{6}-8\Rightarrow -\frac{49}{3}\leq\frac{-52}{6}-8\Rightarrow$$

$$-\frac{49}{3}\leq\frac{-26}{3}-8\Rightarrow\Rightarrow -\frac{49}{3}\leq-\frac{50}{3}$$

Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona izquierda.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la segunda zona, por ejemplo el 0:

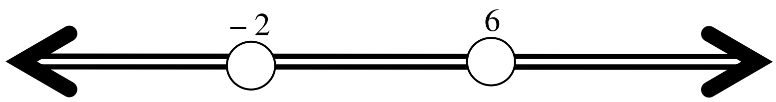
$$2\cdot 0-\frac{1}{3}\leq\frac{7\cdot 0+4}{6}+0\Rightarrow -\frac{1}{3}\leq\frac{4}{6}\Rightarrow -\frac{1}{3}\leq\frac{2}{3}$$

Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la segunda zona.
La solución es entonces el intervalo $\left[-6,+\infty\right)$. Se incluye – 6 porque esta inecuación permite la igualdad.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $x^2-4x>12$

$$x^2-4x=12\Rightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}-2\\ 6\end{cases}$$




Comprobamos un valor cualquiera de la 1ª zona, por ejemplo el –3:

$$(-3)^2-4\cdot(-3)>12\Rightarrow 9+12>12\Rightarrow 21>12$$

Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la primera zona.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la 2ª zona, por ejemplo el 0:

$0^2-4\cdot 0>12\Rightarrow 0>12$ Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la segunda zona.

Comprobamos un valor cualquiera de la 3ª zona, por ejemplo el 7:

$7^2-4\cdot 7>12\Rightarrow 49-28>12\Rightarrow 21>12$ Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la 3ª zona.

La solución es entonces la unión de intervalos $(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$. Excluimos el –2 y el 6 porque esta inecuación no permite la igualdad.

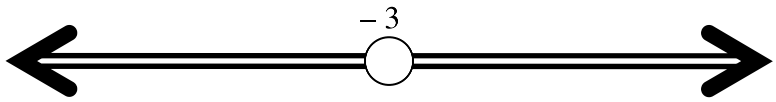
**12. ¿Cómo se resuelve un sistema de inecuaciones?**

Se resuelve cada inecuación por separado, como hemos visto en los ejemplos anteriores, y se busca la zona común (si existe) de los intervalos solución de cada inecuación.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $\begin{cases} 2-x < x+4 \\ 4x-2 \le x+7 \end{cases}$

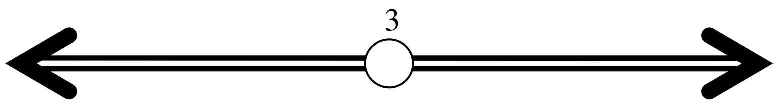
Resolvemos la primera inecuación: $2 - x = x + 4 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$




Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, el – 4 puede servir: $2 - (-4) < -4 + 4 \Rightarrow 6 < 0$
Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona izquierda.

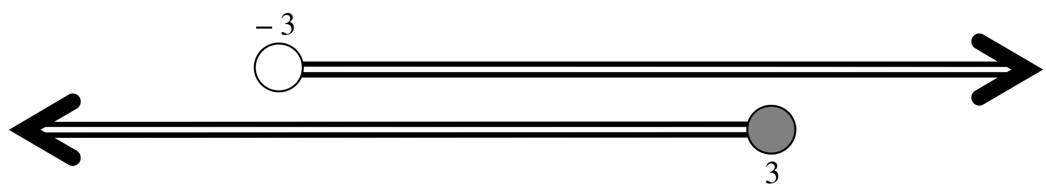
Comprobamos ahora un valor cualquiera de la zona derecha, el 0 puede servir: $2 - 0 < 0 + 4 \Rightarrow 2 < 4$
Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la zona derecha.
La solución de la primera inecuación es entonces el intervalo $(-3,+\infty)$. Se excluye – 3 porque la inecuación no permite la igualdad.

Resolvemos la segunda inecuación: $4x - 2 = x + 7 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$




Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, el 0 puede servir: $4 \cdot 0 - 2 \le 0 + 7 \Rightarrow -2 < 7$
Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la zona izquierda.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la zona derecha, el 4 puede servir: $4 \cdot 4 - 2 \le 4 + 7 \Rightarrow 14 \le 11$
Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona derecha.
La solución de la segunda inecuación es entonces el intervalo $(-\infty,3]$. Se incluye el 3 porque la inecuación sí permite la igualdad.
Representamos ahora juntos los dos intervalos y buscamos la zona común:




La solución del sistema de inecuaciones es entonces el intervalo $(-3, 3]$.

**13. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones?**

El primer paso es simplificar lo más posible cada ecuación por separado de las demás. Suele ser aconsejable evitar que queden denominadores o decimales. A continuación observaremos si se trata de un sistema lineal o de uno no lineal.

Si se trata un sistema **no lineal** el método que da mejor resultado el de sustitución. Se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra de manera que quede una única ecuación con una única incógnita que se resuelve para después calcular la incógnita despejada en primer lugar. Es prudente comprobar las soluciones obtenidas.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80) = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80) = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 6 \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y - 1{,}60 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 6 \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y = 7{,}60 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y = 7{,}60 \end{cases} \rightarrow x\cdot\frac{6}{x} + 0{,}80x - 2\cdot\frac{6}{x} = 7{,}60 \rightarrow \frac{6x}{x} + 0{,}80x - \frac{12}{x} = 7{,}60 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x + 0{,}80x^2 - 12 = 7{,}60x \rightarrow 0{,}80x^2 - 1{,}60x - 12 = 0 \rightarrow 8x^2 - 16x - 120 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = \dfrac{6}{5} = 1{,}2 \\ x_2 = -3 \rightarrow y_2 = \dfrac{6}{-3} = -2 \end{cases}$$

Si se trata un sistema **lineal** con dos incógnitas, aunque se pueda utilizar tanto el método de igualación como el de sustitución, es aconsejable usar el de **reducción**. Se multiplican las ecuaciones por los coeficientes adecuados para que se elimine una incógnita al sumar las ecuaciones. Una vez calculada esta incógnita se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones para hallar la otra incógnita. Otra posibilidad es utilizar de nuevo la reducción para eliminar la otra incógnita.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 15 \\ 4x - 12y = -6 \end{cases} \rightarrow 13x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{13}$$

Para calcular la otra incógnita podemos utilizar la sustitución:

$$3\cdot\frac{9}{13} + 4y = 5 \rightarrow \frac{27}{13} + 4y = 5 \rightarrow 27 + 52y = 65 \rightarrow 52y = 38 \rightarrow y = \frac{38}{52} = \frac{19}{26}$$

Pero, en su lugar, podemos utilizar otra vez la reducción:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 8y = 10 \\ -6x + 18y = 9 \end{cases} \rightarrow 26y = 19 \rightarrow y = \frac{19}{26}$$

Si se trata un sistema **lineal** con más de dos incógnitas el método aconsejable es el de Gauss.

**14. ¿Cómo se plantea un problema de enunciado?**

Primero leemos detenidamente el enunciado identificando las condiciones que se deben cumplir, después definimos claramente las variables que aparezcan implicadas en el texto, tantas variables como condiciones. Si no tenemos muy claro qué variables definir utilizaremos al menos la(s) que aparezca(n) en la pregunta del problema. Cada condición se convertirá en una ecuación y debería de haber tantas ecuaciones como incógnitas. Resolvemos entonces el sistema de ecuaciones y comprobamos la solución obtenida comprobando que valida el enunciado del problema.

Se debe poner la solución en forma de frase y con las unidades de medida adecuadas.

Ejemplo:

*Varios amigos toman un refresco cada uno en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80€ cada uno. ¿Cuántos amigos son?*

En la pregunta final del enunciado queda definida la primera variable:

$x$ = número de amigos

De la lectura del enunciado vemos que será necesario fijar el dinero que deba poner cada amigo, por lo tanto parece razonable definir como segunda variable:

$y$ = precio de cada refresco

Como tenían que pagar 6€ en total, la primera ecuación será: $x \cdot y = 6$

Si dos no pagan, serán x – 2 amigos los que tendrán que poner *0,80€* más que antes, es decir y + 0,80, por lo tanto la segunda ecuación será: $(x-2)\cdot(y+0{,}80)=6$

El sistema será entonces: $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80)=6 \end{cases}$

Este sistema ya ha sido resuelto antes. Obtuvimos para la variable $x$ dos posibles valores: 5, –3. Como esta variable representa el nº de amigos, excluimos la solución negativa. Queda entonces: $x = 5$ $y = 1{,}2$

Solución del problema: **Son 5 amigos y cada refresco costó 1,20€**.

**15. ¿Cómo se modifican las fórmulas de interés compuesto, de anualidades de capitalización o de anualidades de amortización cuando tratemos periodos de tiempo distintos al del tipo de interés?**

Partiendo de un tipo anual, por ejemplo del 8%, si necesitásemos tratar el problema mensualmente lo dividiríamos entre 12, si fuese trimestral entre 4 etc. Simultáneamente el periodo de tiempo se pondrá en esas unidades (meses, trimestres etc.) multiplicando respectivamente el nº de años por 12, por 4 etc.

En consecuencia y llamando $p$ al número de periodos por unidad temporal ($p$=12 meses al año, $p$=3 trimestres al año, etc.), las fórmulas que se utilizarán son:

Interés compuesto: $C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{i}{p}\right)^{t\cdot p}$ Anualidades de Capitalización: $C_f = C_0 \cdot \left(1+\frac{i}{p}\right)\cdot \frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{t\cdot p}-1}{\frac{i}{p}}$

Anualidades de Amortización: $C_f = C_0 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{t\cdot p}-1}{\frac{i}{p}\cdot\left(1+\frac{i}{p}\right)^{t\cdot p}}$

Ejemplo:

*Berta ha heredado 12.000€ y los coloca en el banco a un interés trimestral del 3%. ¿De cuanto dinero dispondrá a los cinco años?*

$$C_f = 12.000 \cdot \left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{4\cdot 5} = 12.000 \cdot 1{,}0075^{20} = 13.934{,}21€$$

**16. ¿Cómo se distinguen los problemas de interés compuesto, de anualidades de capitalización y de anualidades de amortización?**

**Interés compuesto**: Se coloca en el banco una cantidad en **una única ocasión** y pasado un cierto tiempo se recupera el capital inicial aumentado con intereses.

Ejemplo:
*Luis ha ganado 6.000€ en la lotería y le plantea al banco mantenerlo en su cuenta, sin tocarlo, durante 3 años. ¿De cuanto dinero dispondrá, con un interés anual del 5,5%, a los tres años?¿Cuanto habrá ganado de intereses?*

$$C_f = 6.000 \cdot (1 + 0{,}055)^3 = 6.000 \cdot 1{,}055^3 = 7.045{,}45€$$
$$Intereses = 7.045{,}45 - 6.000 = 1.045{,}45€$$

**Anualidades de capitalización**: Es una modalidad de **ahorro**. El ahorrador coloca **periódicamente** (cada año, trimestre, mes etc.) en el banco **la misma cantidad**. Pasado un cierto tiempo recuperaríamos los capitales invertidos aumentados con intereses.

Ejemplo:
*Federico ahorra* ***cuatrimestralmente*** *900€ que puntualmente mete en una cuenta de un banco que le da un interés anual del 6%. ¿Cuánto dinero habrá acumulado en dos años?¿a cuánto ascienden los intereses recibidos?*

$$C_f = 900 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{3}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}06}{3}\right)^{3\cdot 2} - 1}{\frac{0{,}06}{3}} = 900 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^6 - 1}{0{,}02} = 5.790{,}86€$$

Federico ha ingresado sus ahorros cada cuatrimestre durante dos años, es decir, han sido seis ingresos de 900€, que suman un total de $900 \cdot 6 = 5.400$ €
Los intereses recibidos ascendieron entonces a: $5.790{,}86 - 5.400 = 390{,}86$ €

**Anualidades de amortización**: Es una modalidad de **préstamo**. El deudor recibe un dinero que irá pagará poco a poco colocando en el banco **periódicamente la misma cantidad** (cada año, trimestre, mes etc.). Pasado un cierto tiempo quedaría saldada la deuda inicial (y sus intereses).

Ejemplo:
*Diego compra un coche financiando los 18.000€ que cuesta, con una banco que le permite pagar el préstamo en 5 años al 7,5% anual. ¿A cuánto ascenderá la cuota* ***mensual*** *que tiene que pagar? ¿Cuánto habrá pagado por el coche en total?*

$$18.000 = C_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}075}{12}\right)^{12\cdot 5} - 1}{\frac{0{,}075}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}075}{12}\right)^{12\cdot 5}} \Rightarrow C_0 = 18.000 \cdot \frac{0{,}00625 \cdot 1{,}00625^{60}}{1{,}00625^{60} - 1} = 360{,}68€$$

Diego pagó 360,68€ cada mes durante cinco años, habrá hecho entonces 60 ingresos, en total habrá pagado por el coche: $360{,}68 \cdot 60 = 21.640{,}98€$

**17. ¿Cómo se despeja la variable tiempo en las fórmulas de aritmética mercantil?**

Se plantea la fórmula, la única incógnita será la letra *t* situada en un exponente. Se hacen todas las restantes operaciones hasta encontrar la potencia igualada a una constante. Se toman logaritmos a ambos miembros y se aplica la propiedad que permite bajar el exponente multiplicado al logaritmo de la base. Se despeja *t* calculando el cociente de logaritmos.

Ejemplo:

*Carlota ahorra cada trimestre 900€ que puntualmente mete en una cuenta de un banco con un interés anual del 8%.¿Cuántos trimestres debería esperar Carlota para disponer de 12.312,30€?*

$$12.312,30 = 900 \cdot \left(1+\frac{0,08}{4}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^t - 1}{\frac{0,08}{4}} \rightarrow 12.312,30 = 900 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^t - 1}{0,02} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12.312,30 \cdot 0,02}{900 \cdot 1,02} = 1,02^t - 1 \rightarrow 0,2682 = 1,02^t - 1 \rightarrow 1,02^t = 1,2682 \rightarrow \log 1,02^t = \log 1,2682 \rightarrow$$

$$\rightarrow t \cdot \log 1,02 = \log 1,2682 \rightarrow t = \frac{\log 1,2682}{\log 1,02} = 12 \text{ trimestres}$$

**18. ¿Cómo se calcula el error absoluto y el error relativo de un redondeo?**

El error absoluto se calcula restando el valor real del aproximado. Esta resta debe ponerse siempre en positivo, es decir, se hace el valor absoluto de la resta. El error relativo se calcula dividiendo el error absoluto entre el valor real. Si se multiplica por 100 quedaría expresado en %.

Ejemplo:

*Calcula, en forma de porcentaje con dos cifras decimales, el error absoluto y el error relativo cometido al aproximar el número π con 3,14. Expresa los resultados en notación científica con tres cifras decimales. (Para los cálculos utiliza todas las cifras de π de que disponga la calculadora)*

$$EA = |\pi - 3,14| = 1,593 \cdot 10^{-3}$$

$$ER = \frac{1,593 \cdot 10^{-3}}{\pi} \cdot 100 = 5,070 \cdot 10^{-2}\ \%$$

**19. ¿Cómo se acota el error absoluto y el error relativo de una medición?**

Acotar significa ponerse en la peor situación posible. Pretendemos entonces calcular el mayor error cometido. En cada caso conoceremos la medición con un número concreto de cifras decimales. El máximo error absoluto será de cinco unidades de la siguiente cifra decimal. Por ejemplo, si conocemos hasta las milésimas, el máximo error absoluto será de cinco diezmilésimas.
Para acotar el error relativo dividiremos este máximo error absoluto entre la medida restada de este máximo error absoluto. Si se multiplica por 100 quedaría expresado en %.

Ejemplo:

*Indicaciones de un plano señalan que la longitud de un perfil es de 2,318 mm. Acota el error absoluto y el error relativo cometidos.*

$$EA \leq 0,0005 \text{ mm.}$$

$$ER \leq \frac{0,0005}{2,318 - 0,0005} \cdot 100 = 0,216\%$$