Distribuciones de Probabilidad
PREGUNTAS MÁS FRECUENTES

1. ¿Qué es una función distribución de probabilidad?

Se trata de un 'reparto' del valor 1, que es la probabilidad máxima, entre todos los posibles valores que tome una variable aleatoria cuantitativa. Según los casos, vendrá definida mediante una tabla, una fórmula o una gráfica.

Hay tres distintos tipos de variables aleatorias cuantitativas

- Variable aleatoria ***Discreta*** si toma valores separados unos de otros. Puede ser:
  - Variable aleatoria ***Discreta Finita*** si únicamente toma un número limitado de valores. La suma de todas sus probabilidades debe ser 1.
  - Variable aleatoria ***Discreta Infinita*** si puede tomar infinitos valores distintos pero separados unos de otros. La suma infinita de todas sus probabilidades debe ser 1.
- Variable aleatoria ***Continua*** si toma cualquier valor perteneciente a un intervalo dado. Serán infinitos los valores posibles, obviamente. Como si siquiera se pueden identificar las infinitas probabilidades no se hablará aquí de suma infinita sino de que la probabilidad de que tome cualquier valor posible sea 1.

Podríamos convertir una variable aleatoria continua en discreta, agrupando en intervalos –llamados clases- los infinitos valores posibles. Por ejemplo (0, 10] podría agrupar todos los infinitos valores mayores que cero y menores o iguales que 10. Se pierde información pero se simplifican los cálculos.

Con este marco tan amplio, se podrían definir extrañas funciones que sean distribución de probabilidad, pero las más frecuentes tienen nombre y se han estudiado sus propiedades. Las más sencillas de ellas son: Distribución ***Binomial***, como ejemplo de variable aleatoria discreta finita; Distribución ***de Poisson***, como ejemplo de variable aleatoria discreta infinita; Distribución ***Normal***, como ejemplo de variable aleatoria continua.

<u>Ejemplo de variable aleatoria discreta finita</u>:

Sea ***X*** la variable aleatoria "Apuntar el resultado obtenido al lanzar un dado de parchís".

El reparto de las probabilidades debe tener en cuenta si el dado es perfecto o no. Por poner un caso peculiar, supongamos que se trate de un dado de parchís lastrado de tal manera que la probabilidad de cada cifra sea proporcional a sí misma. Es decir, que la probabilidad de 2 sea doble que la del 1, la del 3 triple que la del 1, etc.

Sería entonces:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

Esta función distribución de probabilidad está bien definida ya que sus seis valores suman uno.

<u>Ejemplo de variable aleatoria discreta infinita</u>:

Sea ***X*** una variable aleatoria que toma los infinitos valores naturales: $r = 1,2,3,...$ de forma que la probabilidad de cada uno de ellos sea respectivamente: $1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16 \ldots$

Es decir: $\boxed{P[X = r] = \left(\frac{1}{2}\right)^r}$ para $r = 1,2,3,...$

Esta función distribución de probabilidad está bien definida ya que sus infinitos valores forman una progresión geométrica cuya suma es uno:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Ejemplo de variable aleatoria continua:
Sea ***X*** la variable aleatoria que estudie la longitudes del pié de los habitantes de un país. Obviamente habría infinitos y continuados valores posibles entre cero e infinito, aunque en la práctica no se llegase a tanto. Para ajustar su función distribución de probabilidad necesitaríamos realizar un muestreo estadístico suficientemente significativo que, representado sobre una gráfica, nos permitiera diseñar la función distribución de probabilidad.
Este mismo ejemplo se convertiría en discreto, si agrupásemos por intervalos estas longitudes. En la realidad, así es como se trabaja, ya que en las zapaterías no pedimos un zapato de longitud exacta, sino de un cierto código numérico concreto que sirve para una gama de longitudes de pié que lo encuentren confortable.

2. ¿Hay propiedades comunes para todas las funciones con distribución de probabilidad discreta?

Para una variable aleatoria discreta y con fórmulas muy parecidas a las vistas en Estadística e interpretación similar, tenemos la media -que se suele representar como μ - que también se le llama **esperanza matemática** -representándose entonces como E[X]- y la desviación típica σ. La varianza es el cuadrado de la desviación típica, representándose entonces como Var[X].

Si llamamos $\boldsymbol{x_i}$ a cada valor de la variable aleatoria y $\boldsymbol{p_i}$ a su correspondiente probabilidad tendremos para la media: $\boxed{\mu = E[X] = \sum p_i \cdot x_i}$ y para la desviación típica: $\boxed{\sigma = \sqrt{\sum p_i \cdot x_i^{\,2} - \mu^2}}$

Como en la Estadística, la media representa el valor esperado y la desviación típica un entorno posible de variación respecto de la media.

Para las variables aleatorias discretas más conocidas, la ***Binomial*** y la de ***Poisson*** se les puede aplicar estas fórmulas generales, pero dispondremos de fórmulas alternativas que alcanzan los mismos resultados con menos esfuerzo.

Ejemplo de problema con una variable aleatoria discreta finita y distribución peculiar:
Halla la media y la desviación típica de la variable aleatoria ***X*** ="Apuntar el resultado obtenido al lanzar el dado de parchís lastrado en el que la probabilidad de cada cifra sea proporcional a sí misma".

Habíamos visto ya que la función distribución era:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

$$\mu = \sum p_i \cdot x_i = \frac{1}{21}\cdot 1 + \frac{2}{21}\cdot 2 + \frac{3}{21}\cdot 3 + \frac{4}{21}\cdot 4 + \frac{5}{21}\cdot 5 + \frac{6}{21}\cdot 6 = \frac{91}{21} = 4{,}3333$$

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i \cdot x_i^{\,2} - \mu^2} = \sqrt{\frac{1}{21}\cdot 1^2 + \frac{2}{21}\cdot 2^2 + \frac{3}{21}\cdot 3^2 + \frac{4}{21}\cdot 4^2 + \frac{5}{21}\cdot 5^2 + \frac{6}{21}\cdot 6^2 - \left(\frac{91}{21}\right)^2} = 1{,}4907$$

3. ¿En qué consiste la distribución Binomial y cómo se distingue de las demás?

Se trata del ejemplo más frecuente de variable aleatoria discreta finita. Debe tener unas características muy precisas. Son las siguientes:

- Tendremos de una experiencia aleatoria de la que únicamente nos fijaremos en el cumplimiento (*acierto*) o incumplimiento (*fallo*) de una proposición.
- Esta experiencia aleatoria se repite un número (***n***) concreto de veces, de tal manera que al terminar esta serie de repeticiones habremos contabilizado el número de aciertos y fallos.
- En cada repetición de la experiencia aleatoria la probabilidad de acertar (***p***) debe mantiene constante de manera que el resultado de cada experiencia aleatoria no se ve influida por lo sucedido en las repeticiones anteriores.
- La variable aleatoria consistirá en contar el nº de aciertos, que obviamente oscilará entre 0 y ***n.***

Los parámetros de una variable aleatoria ***Binomial*** son el número de repeticiones (***n***) y la probabilidad de cada acierto (***p***). Todo ello se simboliza así: ***B***(***n***, ***p***)

La probabilidad de obtener en total un número concreto de aciertos ***r*** sigue la fórmula:

$$P[X = r] = \binom{n}{r} p^r \cdot (1-p)^{n-r} \quad \text{con } r = 0,1,2,3,\ldots,n$$

Aparece en esta fórmula un número combinatorio, la probabilidad del acierto (***p***) elevada al número de aciertos (***r***) y la probabilidad del fallo (1 - ***p***) elevada al número de fallos (***n - r***)

Para la media, que se podría hallar con la fórmula general, es preferible emplear: $\boxed{\mu = n \cdot p}$

Para la desviación típica, que también se podría hallar con la fórmula general, es preferible emplear: $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Ejemplo de problema con **distribución Binomial**:

Una fábrica hace interruptores. La probabilidad de que un interruptor sea defectuoso es de 0,04. La fábrica hace un estudio con una muestra de 100 interruptores.

a) Halla la media y la desviación típica del número de interruptores defectuosos.

*b) Halla la probabilidad de que encontremos en la muestra **exactamente 6** interruptores defectuosos.*

*c) Halla la probabilidad de que encontremos **no más de 2** interruptores defectuosos en la muestra.*

*d) Halla la probabilidad de que encontremos **más de 3** interruptores defectuosos en la muestra.*

*e) Halla la probabilidad de que encontremos **más de 10 pero menos de 20** interruptores defectuosos en la muestra.*

Se trata de una **B (100; 0'04)**

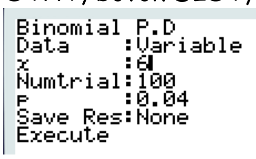
La variable aleatoria es: ***X*** = "El número de defectuosos encontrados en la muestra de 100 interruptores"

a) Por término medio es previsible encontrar: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}04 = 4$ interruptores defectuosos en la muestra.

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 1{,}96$

b) $P[X = 6] = \binom{100}{6} 0{,}04^6 \cdot (1-0{,}04)^{94} = 0{,}105$

Con la calculadora gráfica se pulsa: menú STAT, botón DIST, botón BINM, botón **Bpd**. Así:

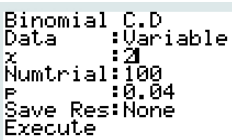


c)

$$P[X \le 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] =$$

$$= \binom{100}{0} 0{,}04^0 \cdot (1-0{,}04)^{100} + \binom{100}{1} 0{,}04^1 \cdot (1-0{,}04)^{99} + \binom{100}{2} 0{,}04^2 \cdot (1-0{,}04)^{98} = 0{,}232$$

Con la calculadora gráfica se pulsa: menú STAT, botón DIST, botón BINM, botón **Bcd**. Así:

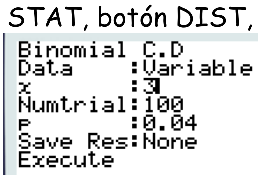


d) Al tratarse de muchos sumandos, es preferible restar de uno la probabilidad del suceso contrario:

$$P[X > 3] = 1 - P[X \le 3] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) =$$

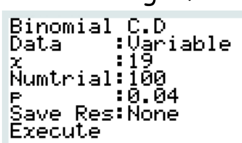
$$= 1 - \binom{100}{0} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{100} - \binom{100}{1} 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{99} - \binom{100}{2} 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^{98} - \binom{100}{3} 0{,}04^3 \cdot 0{,}96^{97} = 0{,}571$$

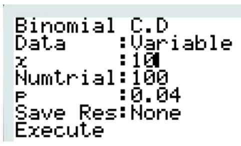
Con la calculadora gráfica se pulsa: menú STAT, botón DIST, botón BINM, botón **Bcd**. Así:



Y se resta de 1 el resultado.

e) Se puede hacer calculando la suma de las probabilidades de todos los casos, pero es el típico enunciado para hacer uso de la calculadora gráfica. Así:





Y restando sus resultados:

$$P[10 < X < 20] = P[X \leq 19] - P[X \leq 10] = 0{,}99999 - 0{,}99776 = 0{,}00224$$

Con planteamientos muy parecidos podemos encontrarnos con problemas distintos que pueden tener o **no** tener distribución Binomial. Si la probabilidad de cada resultado se ve afectado por lo ocurrido antes no será binomial. Como ejemplo:

Ejemplo de problema que **no** tiene ~~**distribución Binomial**~~:

Tenemos en una urna 6 bolas blancas y 4 negras. Extraemos al azar tres bolas y contamos cuántas de las tres bolas extraídas son blancas.

a) Construye la función distribución de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica del número de bolas blancas extraídas.

La variable aleatoria es: ***X*** = "El número de *bolas blancas encontradas entre las tres extraídas*"

a) Al calcular cada probabilidad, cada fracción será distinta según los colores extraídos antes, por lo que **no** dispondrá de probabilidad binomial.

$$P[X = 0] = P[N_1 \cap N_2 \cap N_3] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

$$P[X = 1] = P[(N_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap N_3)] = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{216}{720}$$

$$P[X = 2] = P[(N_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap N_3)] = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{360}{720}$$

$$P[X = 3] = P[B_1 \cap B_2 \cap B_3] = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$$

b) El número de bolas blancas que extraeremos por término medio es:

$$\mu = \sum p_i \cdot x_i = \frac{24}{720} \cdot 0 + \frac{216}{720} \cdot 1 + \frac{360}{720} \cdot 2 + \frac{120}{720} \cdot 3 = \frac{1296}{720} = 1{,}8 \text{ bolas blancas}$$

Y la desviación típica será:

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i \cdot x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{24}{720} \cdot 0^2 + \frac{216}{720} \cdot 1^2 + \frac{360}{720} \cdot 2^2 + \frac{120}{720} \cdot 3^2 - \left(\frac{1296}{720}\right)^2} = 0{,}7483 \text{ bolas blancas}$$

Ejemplo de problema que **sí** tiene **distribución Binomial**:

Tenemos en una urna 6 bolas blancas y 4 negras. Extraemos al azar una bola, apuntamos su color y la devolvemos a la urna. Repetiremos esta operación tres veces contando cuántas de las tres bolas extraídas son blancas.

a) Construye la función distribución de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica del número de bolas blancas extraídas.

La variable aleatoria es: ***X*** = "El número de *bolas blancas encontradas entre las tres extraídas*"

a) Al devolver la bola a la urna, la probabilidad de que sea blanca la bola es la misma en cada extracción, por lo que **sí** dispondrá de probabilidad binomial. Se trata de una **B (10; 0'6)**

$$P[X = r] = \binom{10}{r} 0{,}6^r \cdot 0{,}4^{10-r} \text{ con } r = 0,1,2,3,\ldots,10$$

b) El número de bolas blancas que extraeremos por término medio es: $\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ bolas blancas

Y la desviación típica será: $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 0{,}55$ bolas blancas

4. ¿En qué consiste la distribución de Poisson y en qué casos es aplicable?

Se trata del ejemplo más conocido de variable aleatoria discreta infinita. También se le llama la distribución de las pequeñas probabilidades, ya que tendremos en realidad infinitos valores positivos que suman 1, por lo que salvo unos pocos, la gran mayoría de las probabilidades deben ser muy pequeñas, prácticamente despreciables. Se aplica en aquellos casos en los que nos interesa estudiar el número de veces que se cumpla una proposición y, aunque lo previsible es que esta cifra se sitúe en torno de un cierto valor *Lambda* (**λ**) esperado de cumplimientos, podría suceder desde que no se cumpliese nunca hasta que se cumpliese cualquier número de veces. Los valores cercanos a **λ** tendrán una probabilidad estimable pero cuanto más se alejen de **λ**, más pequeñas serán sus probabilidades.

Tendremos entonces una variable aleatoria que toma los infinitos valores enteros positivos: $0,1,2,3,...$

La probabilidad de cada uno de estos infinitos valores sigue la fórmula: $P[X = r] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^r}{r!}$ con $r = 0,1,2,3,...$

Aparece en esta fórmula **λ,** que es el único parámetro de esta distribución. Todo ello se simboliza así: ***Poi*** **(λ)**

Para la media, que también se podría hallar con la fórmula general, es preferible emplear: $\mu = \lambda$

Para la desviación típica, que también se podría hallar con la fórmula general, es preferible emplear: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

La suma de varias distribuciones de Poisson independientes es otra distribución de Poisson cuyo parámetro es suma de los parámetros. Esto se suele emplear cuando se repite la experiencia aleatoria de Poisson ***n*** veces, pudiendo emplear la fórmula de Poisson con parámetro ***nλ***

Ejemplo de problema con **distribución de Poisson**:

Cada día el número de accidentes de autobús en una ciudad sigue una distribución de Poisson, con media igual a 0,6.

a) Halle la probabilidad de que, en un día cualquiera elegido al azar, haya exactamente tres accidentes.

b) Halle el porcentaje de días en los que haya como mucho dos accidentes.

c) Halle la probabilidad de que haya algún accidente en toda una semana elegida al azar.

Se trata de una ***Poi*** **(0'6)**

La variable aleatoria es: ***X*** = "El número de accidentes ocurridos en un día elegido al azar"

a) $P[X = 3] = \frac{e^{-0,6} \cdot 0,6^3}{3!} = 0,0198$

b)

$$P[X \le 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = \frac{e^{-0,6} \cdot 0,6^0}{0!} + \frac{e^{-0,6} \cdot 0,6^1}{1!} + \frac{e^{-0,6} \cdot 0,6^2}{2!} = 0,9769 = 97,69\%$$

c) Para una semana podemos utilizar una ***Poi*** **(*7*·0'6) =** ***Poi*** **(4 '2)**

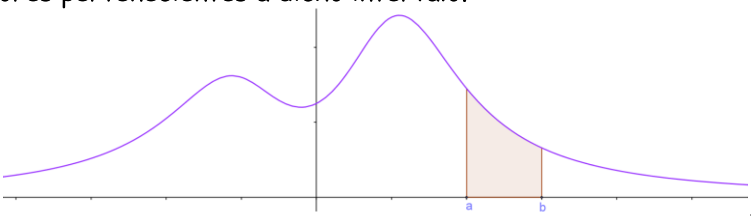
La variable aleatoria ahora es: ***X*** = "El número de accidentes ocurridos en un semana elegida al azar"

$$P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^0}{0!} = 0,9850$$

5. ¿Cómo se calcula la probabilidad en distribuciones continuas?

El cálculo de probabilidades en distribuciones continuas se hace de manera muy distinta a lo hecho con las distribuciones discretas. La mayor diferencia está en que nunca calcularemos la probabilidad de valores aislados de la variable aleatoria, ya que todos ellos serían nulos, sino que calcularemos la probabilidad por franjas, es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores pertenecientes un intervalo. Como ejemplo: no calcularemos $P[X = r]$ sino $P[a < X \leq b]$.

La idea básica es asimilar el cálculo de probabilidades a la medición de un área. Tendremos un recinto encerrado por la gráfica de una función positiva, que se denomina función densidad, y el eje ***X***. Este recinto se extenderá a lo largo del eje real desde el – ∞ al + ∞, pero podría suceder que sólo tome valores no nulos en un intervalo finito de valores de ***x***. En cualquier caso, **el área de todo este recinto valdrá 1**, y representará al suceso seguro. La superficie de cualquier porción de este recinto en forma de franja vertical situada entre dos valores de ***x***, será la probabilidad de que la variable aleatoria ***X*** tome valores pertenecientes a dicho intervalo.



En el gráfico adjunto, el área de la región sombreada mediría la probabilidad: $P[a < X \leq b]$ y el área encerrada por toda la curva y el eje ***X*** debe ser 1.

Para poder medir estas áreas dispondremos de diversas herramientas. Si el perfil de los recintos es geométricamente reconocible: rectangular, triangular, trapezoidal, circular, etc. podremos aplicar las fórmulas clásicas. Si la curva que define el recinto dispone de ecuación algebraica, podremos calcular las áreas mediante integrales. Y para algunas distribuciones concretas, como por ejemplo la Distribución Normal, dispondremos de tablas numéricas que también están implementadas en algunas calculadoras.

<u>Ejemplo de problema con una variable aleatoria continua y distribución peculiar</u>:

a) Comprueba que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} & \text{Si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{Si } x > 4 \end{cases}$ *puede ser función densidad de probabilidad de una variable aleatoria **X*** que tome cualquier valor entre 0 y 4.

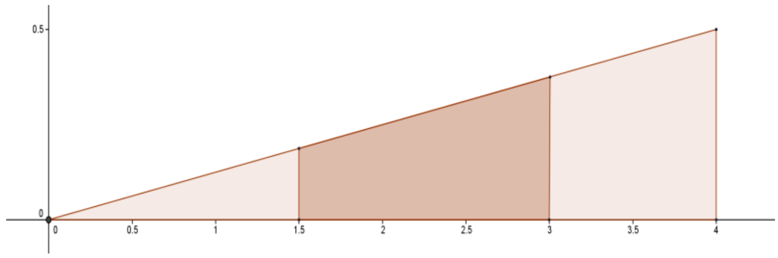
*b) Halla la probabilidad de que la variable aleatoria **X** tome valores entre 1,5 y 3.*

Si representamos la función, vemos que su perfil es triangular, y que entre 1'5 y 3, el recinto es trapezoidal.

a) La longitud de la altura del triángulo y de las bases del trapecio, las calcularemos sustituyendo en la función densidad, de manera que:

$$P[0 < X \leq 4] = \frac{4 \cdot \frac{4}{8}}{2} = 1$$

Por lo tanto $f(x)$ puede ser función densidad de probabilidad.



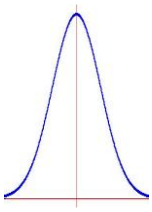
b) $P[1{,}5 < X \leq 3] = \dfrac{1{,}5/8 + 3/8}{2} \cdot (3 - 1{,}5) = 0{,}4219$

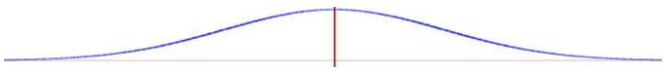
Este mismo cálculo también se puede ser realizado mediante integrales:

$$P[1{,}5 < X \leq 3] = \int_{1{,}5}^{3} \frac{x}{8}\,dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_{1{,}5}^{3} = \frac{3^2}{16} - \frac{1{,}5^2}{16} = 0{,}4219$$

6. ¿En qué consiste la distribución normal y cómo se emplea?

Se trata del ejemplo más conocido de variable aleatoria continua. Se ha comprobado que en infinidad de experiencias aleatorias, determinadas distribuciones de probabilidad aplicadas a un gran número de casos tienden gráficamente a este perfil. Su función densidad tiene forma acampanada simétrica respecto de la vertical que pasa por su punto más alto y, por supuesto, el área definida bajo la curva con el eje ***X*** es 1. En estas condiciones hay una infinidad de posibilidades dependiendo del valor de ***x*** de su punto máximo y de su 'estilización'. Modificar la abscisa de su punto máximo es muy simple y consiste en una traslación a izquierda o a derecha. Esto está directamente relacionado con la media ***μ*** de la variable. Estirar verticalmente la campana, manteniendo su área 1, está directamente relacionado con la desviación típica ***σ*** de la variable. Cuanto más estilizada, más baja será la desviación típica, como se ve en la campana de la izquierda, y cuanto más aplanada, más alta será la desviación típica, como se ve en la campana de la derecha.

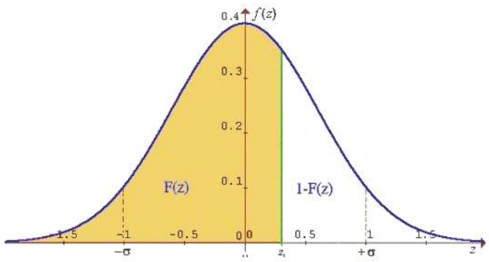




Todo ello se simboliza así: **N(*μ*, *σ*)**

Los libros suelen disponer una tabla de la **N(0, 1)**, esto es, cero de media y 1 de desviación típica. A la variable aleatoria con esta distribución se le reserva la letra ***Z*** , mientras que a las restantes distribuciones normales **N(*μ*, *σ*)** se las nombra con la letra ***X***.

La tabla de **N (0, 1)** y algunas calculadoras nos dan el valor del área bajo la campana desde el extremo izquierdo hasta un concreto valor ***z*** de la variable aleatoria. Esto es: $F(z) = P[-\infty < Z \le z]$ que aparece sombreado en el gráfico de la derecha. A esta función densidad se le denomina *F*(*z*). Para valores de *z* superiores a 4, se aproxima el área con 1. Cualquier otro cálculo se realiza utilizando estos recintos, la simetría de la gráfica y el 1 del área total. Por ejemplo:



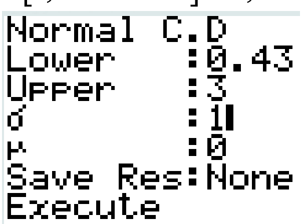
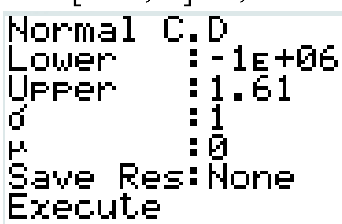
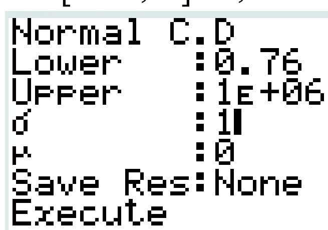
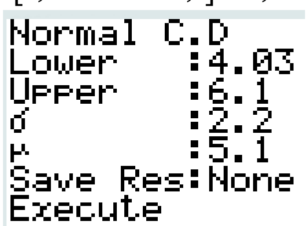
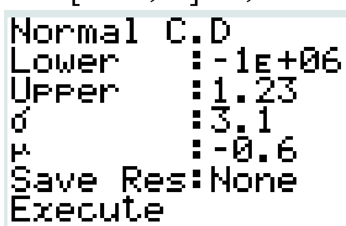
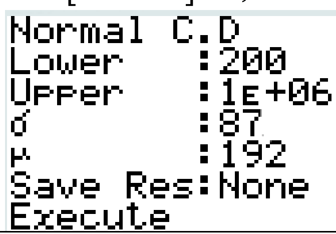
$$P[Z > z] = 1 - F(z) \qquad P[z_1 < Z \le z_2] = F(z_2) - F(z_1)$$

Si se dispone de una calculadora gráfica no será necesario, pero si únicamente se dispone de una tabla que no suelen incorporar valores negativos de z, aplicando la simetría de la campana se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

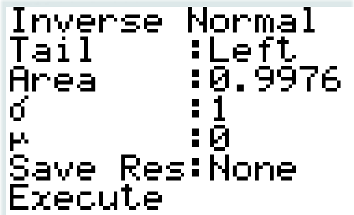
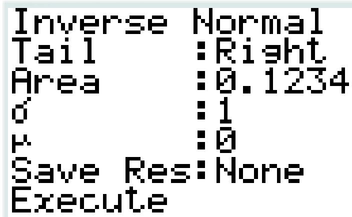
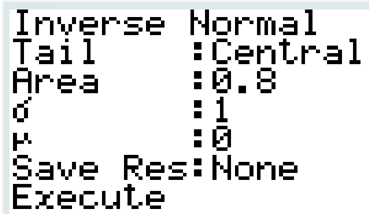
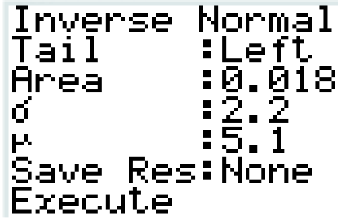
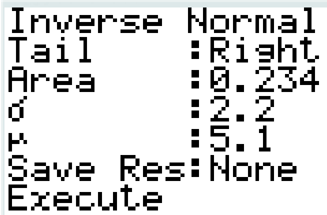
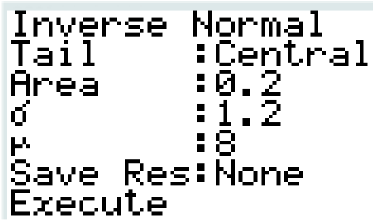
$$P[Z \le -z] = 1 - F(+z) \qquad P[Z > -z] = F(+z)$$

$$P[-z_1 < Z \le -z_2] = F(+z_1) - F(+z_2) \qquad P[-z_1 < Z \le z_2] = F(z_2) - (1 - F(+z_1))$$

Con la calculadora gráfica se pulsa: menú STAT, botón DIST, botón NORM, botón **Ncd**. Si un extremo es un infinito sirve cualquier valor desmesurado (1 000 000 por decir algo). Así:

<table>
<tr>
<td>N (0; 1)
$P[0{,}43 < Z \le 3] = 0{,}332$
</td>
<td>N (0; 1)
$P[Z \le 1{,}61] = 0{,}946$
</td>
<td>N (0; 1)
$P[Z > 0{,}76] = 0{,}224$
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>N (5'1 ; 2'2)</u>
$P[4{,}03 < X \le 6{,}1] = 0{,}362$
</td>
<td>N (-0'6 ; 3'1)
$P[X \le 1{,}23] = 0{,}723$
</td>
<td>N (192, 87)
$P[X > 200] = 0{,}463$
</td>
</tr>
</table>

También se puede hacer una 'búsqueda inversa'. Esto es, conocida la probabilidad, hallar la abscisa correspondiente. Con la calculadora gráfica se pulsa: menú STAT, botón DIST, botón NORM, botón InvN. La 'cola' (Tail) se elije según la desigualdad que se tenga: Con una desigualdad '*menor*' o con '*menor o igual*' es la cola izquierda (LEFT); Con '*mayor*' o con '*mayor o igual*' es la cola derecha (RIGHT); y con un intervalo centrado en torno de la media es la cola centrada (CNTR).

N (0; 1) $P[Z \le z] = 0{,}9976 \Rightarrow z = 2{,}82$  	***N*** (0; 1) $P[Z > z] = 0{,}1234 \Rightarrow z = 1{,}16$  	***N*** (0; 1) $P[-z < Z \le z] = 0{,}8 \Rightarrow z = 1{,}28$ 
<u>***N*** *(5'1 ; 2'2)*</u> $P[X < x] = 0{,}018 \Rightarrow x = 0{,}487$  	***N*** (-0'6 ; 3'1) $P[X \ge x] = 0{,}234 \Rightarrow x = 6{,}70$  	***N*** (8 ; 1'2) $P[-x \le X - 8 \le x] = 0{,}2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0{,}30$ 

7. ¿Cómo se calculan las probabilidades en una distribución normal que no sea la *N*(0, 1)?

Para trabajar con una ***N*(*μ*, *σ*)**, <u>si no disponemos de una calculadora gráfica</u>, tendremos que convertir la variable para poder usar los valores de la ***N*(0, 1)**. Esta conversión se denomina ***Tipificación*** y consiste en la fórmula: $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. En ella, ***X*** representa la ***N*(*μ*, *σ*)** y ***Z*** la ***N*(0, 1)**.

De esta forma: $P[X \le x] = P\left[\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \le \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right] = F\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Si se dispone de una calculadora gráfica, nos podemos evitar esta conversión.

<u>Ejemplo de problema con distribución normal</u>:

En una asignatura de Psicología evolutiva se ha podido determinar que las calificaciones de distribuyen según una N(5; 0'5).

a) ¿Qué porcentaje de alumnos obtendrían menos de 6?

b) Elegido un alumno al azar, ¿qué probabilidad existe de que su nota fuese superior a 6,5?

c) ¿Hasta qué nota obtendrían el 5% de los alumnos peor calificados?

a) $P[X \le 6] = 0{,}977 = 97{,}7\%$

b) $P[X > 6{,}5] = 0{,}00134$

c) $P[X < x] = 0{,}05 \Rightarrow x = 4{,}18$

El 5% de los alumnos con calificaciones más bajas, tienen notas inferiores a 4,18

8. ¿Cómo se calcula la media y la desviación típica de una distribución normal conociendo la probabilidad de algún suceso?

Incluso con calculadora gráfica sería obligatoria la ***Tipificación***. Se hace una 'búsqueda inversa' de la probabilidad conocida para despejar el parámetro: media o desviación típica en la fórmula de la tipificación. Si se desconociesen ambos parámetros: media y desviación típica, dispondríamos de dos probabilidades conocidas y poniendo el resultado de dos 'búsquedas inversas' en la fórmula de la tipificación resolveríamos un sistema de ecuaciones para hallar ambos parámetros.

Ejemplo de problema de distribución normal con **un** parámetro desconocido:

Una máquina fabrica gran cantidad de clavos. La longitud L mm de los clavos sigue una distribución normal de media 50 y desviación típica σ.

a) Halle $P[50-\sigma < L < 50+\sigma]$

b) La probabilidad de que la longitud de un clavo sea menor que 53,92 mm es 0,975. Halle σ.

a) $P[50-\sigma < L < 50+\sigma] = P[-\sigma < L-50 < \sigma] = P\left[-1 < \frac{L-50}{\sigma} < 1\right] = P[-1 < Z < 1] = 0,683$

b) $P[L < 53,92] = P\left[\frac{L-50}{\sigma} < \frac{53,92-50}{\sigma}\right] = P\left[Z < \frac{3,92}{\sigma}\right] = 0,975 \Rightarrow \frac{3,92}{\sigma} = 1,96 \Rightarrow \sigma = 2$

Ejemplo de problema de distribución normal con **dos** parámetros desconocidos:

Los pesos en kg de los oseznos de un año siguen una distribución normal de media μ *y desviación típica* σ. *Sabiendo que el peso correspondiente al tercer cuartil es 21,3 kg y que el peso correspondiente al primer cuartil es 17,1 kg, calcule el valor de* μ *y de* σ.

$$\left.\begin{array}{l} P[X < 21,3] = 0,75 \\ P[X < 17,1] = 0,25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P\left[Z < \frac{21,3-\mu}{\sigma}\right] = 0,75 \\ P\left[X < \frac{17,1-\mu}{\sigma}\right] = 0,25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{21,3-\mu}{\sigma} = 0,674489 \\ \frac{17,1-\mu}{\sigma} = -0,674489 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $\mu = 19,2$ kg y $\sigma = 3,11$ kg.

9. ¿Influye en los cálculos de probabilidad que las desigualdades sean estrictas o no lo sean?

Es obvio que sí influye en las distribuciones discretas ya que, por ejemplo, al cambiar un '*menor que*' por un '*menor o igual que*' estaríamos añadiendo un valor concreto de la variable con su valor de probabilidad que se sumaría al anterior. En cambio, en las distribuciones continuas no importaría, ya que la probabilidad de cualquiera de los valores concretos de la variable es nula y únicamente son evaluables las probabilidades de intervalos.