Números Reales, Polinomios, Ecuaciones, Inecuaciones, Logaritmos e Inducción
PREGUNTAS MÁS FRECUENTES

1. **¿Cómo se modifica el índice de un radical?**
Se multiplican (o dividen) el índice y el exponente del radicando por un mismo número.

Ejemplos:
$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[20]{2^{15}}$ $\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}$ $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

2. **¿Cómo se suman o restan radicales?**
Sólo se pueden sumar o restar radicales iguales o equivalentes (aquellos que al simplificarse quedan iguales).

Ejemplo:
$\sqrt{27} + 5\cdot\sqrt{3} + \sqrt[4]{9} = 3\cdot\sqrt{3} + 5\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3} = 9\cdot\sqrt{3}$

Ejemplo:
$\sqrt{12} + 3\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{2} = 3\cdot\sqrt{3} + \sqrt{2}$

3. **¿Cómo se multiplican o dividen radicales?**
Se ponen todos a índice común y se aplica que el producto de raíces es igual que la raíz de un producto y que el cociente de raíces es igual que la raíz de un cociente.

Ejemplo:
$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{2^6\cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[12]{108}$$

4. **¿Cómo se racionaliza una fracción?**
Se llama racionalizar una fracción al proceso que convierte una fracción que tiene radicales en el denominador en otra equivalente que no los tiene.
Hay dos procedimientos distintos:
Si el denominador es un único radical, multiplicamos el numerador y el denominador por el radical adecuado que sea capaz de simplificar la raíz del denominador. Después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

Ejemplo:
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^7}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt[6]{2}}{2} = \sqrt[6]{2}$$

Si el denominador es una suma o resta que contiene una o dos raíces cuadradas, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador (una resta si teníamos una suma o una suma si era una resta). En el denominador aplicamos diferencia de cuadrados, después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

Ejemplo:
$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{90}-\sqrt{36}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}-6}{5-2} = \frac{3\left(\sqrt{10}-2\right)}{3} = \sqrt{10}-2$$

5. ¿Cómo se resuelve una ecuación polinómica?

Se buscan las raíces por Ruffini, hasta llegar al segundo grado, a partir de ahí, se puede continuar por Ruffini o aplicar la fórmula de las soluciones de la ecuación de 2º grado.

Ejemplo:

Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

	1	-12	41	-30
1		1	-11	30
	1	-11	30	**0**
5		5	-30	
	1	-6	**0**	
6		6		
	1	**0**		

Las soluciones son: $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$

Otro procedimiento: Se empieza igual, pero al llegar a 2º grado aplico la fórmula.

Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

	1	-12	41	-30
1		1	-11	30
	1	-11	30	**0**

Ahora resuelvo: $x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 5 \\ 6 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$

6. ¿Cómo se halla el resto de la división de un polinomio entre *x – a*?

Se puede hacer de dos maneras: por Ruffini o aplicando el teorema del resto.

Ejemplo:

Halla el resto de la división: $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 : x + 1$

Por *Ruffini*:

	1	-2	4	-3
-1		-1	3	-7
	1	-3	7	**-10**

El resto es -10

Otro procedimiento: Por el teorema del resto. Se sustituye la incógnita por el valor de *a*. Hay que recordar que *a* es el número que se *resta* de la *x*.

Halla el resto de la división: $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 : x + 1$

Resto = $(-1)^3 - 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -1 - 2 - 4 - 3 = -10$

7. ¿Es lo mismo factorizar un polinomio que resolver una ecuación polinómica?

En la práctica sí. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación y viceversa.

<u>Ejemplo:</u>

Factoriza: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$

Como hemos visto en el ejemplo anterior, las raíces del polinomio son $x = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$ por lo que la expresión factorizada es: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = (x-1)(x-5)(x-6)$

<u>Ejemplo:</u>

Halla las soluciones de la ecuación, ya factorizada: $x(x+2)(x-3) = 0$

Viendo los factores, las raíces del polinomio son: $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases}$ por lo que las soluciones son: $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 3 \end{cases}$

8. ¿Cuáles son las identidades notables más importantes?

El cuadrado de la suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de la resta: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de cuadrados: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

<u>Ejemplos</u>*:*

Desarrolla: $(x^3 + 3x)^2$

$(x^3 + 3x)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot 3x + (3x)^2 = x^6 + 6x^4 + 9x^2$

Convierte $9 - 6b + b^2$ en el cuadrado de una resta.

$9 - 6b + b^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot b + b^2 = (3-b)^2$

Factoriza: $9x^2 - 4$

$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x+2)(3x-2)$

9. ¿En qué consiste el método de inducción?

Es uno de los tres métodos de demostración: Deducción, Inducción y Por reducción al absurdo. El método de Inducción es útil cuando se pretende demostrar que una proposición es cierta para una infinidad de valores discretos de una variable (típicamente los infinitos valores naturales de ***n***). La comprobación de dicha proposición para cada valor concreto de la variable no es posible, pues se trata de infinitos valores. A cambio, se demuestra que la validación de la proposición se transmite de cada valor de la variable al siguiente. Sería algo así: Si la proposición es cierta para ***n*** = 1 lo será para ***n*** = 2, al ser cierta para ***n*** = 2 lo será para ***n*** = 3, etc. Quedando así validada la proposición para los infinitos valores de la variable. El esquema del método es el que sigue:

1ª fase: Comprobar que la proposición es cierta para el primer valor de la variable (típicamente ***n = 1)***

2ª fase: Comprobar que, si la proposición fuese cierta para un valor de la variable (***n = k)*** implica necesariamente que también lo es para el siguiente valor de la variable (***n = k + 1)***. La demostración de este paso se puede realizar de múltiples maneras y depende del tipo de proposición que se esté demostrando. En todos los casos utilizaremos la información de la veracidad de la proposición para ***n = k.***

Ejemplo:

Demuestra que $2^{2n}-3n-1$ *es divisible entre 9 para n =1, 2, 3,…*

1ª fase (***n = 1)*** : $2^{2\cdot1}-3\cdot1-1=4-3-1=0$ que es divisible entre 9

2ª fase (***n = k)*** : Suponiendo cierto que $2^{2\cdot k}-3\cdot k-1$ es divisible entre 9 tenemos que demostrar que $2^{2\cdot(k+1)}-3\cdot(k+1)-1$ también es divisible entre 9.

$$2^{2\cdot(k+1)}-3\cdot(k+1)-1=2^{2k+2}-3k-3-1=2^{2k}\cdot2^2-3k-4=4\cdot2^{2k}-3k-4=$$

Introducimos una misma expresión sumando y restando con el fin de poder utilizar la validez de la proposición para ***n = k***

$$=4\cdot(2^{2k}-3k-1+3k+1)-3k-4=4\cdot(2^{2k}-3k-1)+12k+4-3k-4=4(2^{2k}-3k-1)+9k$$

Como, $4(2^{2k}-3k-1)$ *y 9 k* son ambos múltiplos de 9, queda demostrada la proposición para ***n = k + 1*** y *por lo tanto para todos los valores de* ***n****.*

Ejemplo:

Demuestra que $a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

1ª fase (***n = 1)*** : $a=\dfrac{a(1-r)}{1-r}$

2ª fase (***n = k)*** : Suponiendo cierto que $a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^k)}{1-r}$ tenemos que demostrar que $a+ar+ar^2+...+ar^{(k+1)-1}=\dfrac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$.

$$a+ar+ar^2+...+ar^{(k+1)-1}=a+ar+ar^2+...+ar^k=a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}+ar^k=$$

$$=\frac{a(1-r^k)}{1-r}+ar^k=\frac{a(1-r^k)+ar^k(1-r)}{1-r}=\frac{a-ar^k+ar^k-ar^k\cdot r}{1-r}=\frac{a-ar^{k+1}}{1-r}$$

Quedando demostrada la proposición para ***n = k + 1*** y *por lo tanto para todos los valores de* ***n****.*

10. ¿Cómo se opera con fracciones algebraicas?

Si se trata de un **producto** de dos fracciones, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores. Estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{6x-12}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}$

$$\frac{6x-6}{x^2+x}\cdot\frac{x^2-1}{3x}=\frac{(6x-6)\cdot\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x\right)\cdot 3x}=\frac{6(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x(x+1)\cdot 3x}=\frac{2(x-1)\cdot(x-1)}{x\cdot x}=\frac{2(x-1)^2}{x^2}$$

Si se trata de un **cociente** de dos fracciones, se multiplican en cruz. Como antes, estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{9-x^2}{x^2+1}:\dfrac{x+3}{3x^2+3}$

$$\frac{9-x^2}{x^2+1}:\frac{x+3}{3x^2+3}=\frac{\left(9-x^2\right)\cdot\left(3x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)\cdot(x+3)}=\frac{(3+x)\cdot(3-x)\cdot 3\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\cdot(x+3)}=\frac{(3-x)\cdot 3}{1}=9-3x$$

Si se trata de una **suma o resta** de dos fracciones, se factorizan los denominadores, se busca su mínimo común múltiplo y se ponen las fracciones con este común denominador (mínimo común múltiplo entre cada denominador por su numerador). Entonces se suman o restan los numeradores, se factoriza el nuevo numerador y se simplifican los elementos comunes. Hay que tener **mucho cuidado** con las fracciones que tienen delante un signo menos, ya que podemos confundirnos con los signos si no ponemos paréntesis. Como antes, el resultado puede dejarse indicado sin operar.

<u>Ejemplo:</u>

Opera y simplifica: $\dfrac{x+7}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}$

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x+7}{x^2-4}=\frac{2}{x-2}-\frac{x+7}{(x+2)(x-2)}=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+7}{(x+2)(x-2)}=\frac{2(x+2)-(x+7)}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{2x+4-x-7}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{(x+2)(x-2)}$$

11. ¿Cómo se desarrolla la potencia de una suma (o resta)?

Se utiliza la fórmula del binomio de Newton. En la potencia de una suma todos los sumandos son positivos, en la de una resta se alternan los signos empezando con +, el signo del último sumando depende del número de ellos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 - \ldots\ldots$$

En cada sumando va disminuyendo de uno en uno el exponente de la *a* y aumentando el de la *b*. Los números combinatorios se obtienen del triángulo de Tartaglia o aplicando la fórmula: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. Si *a* ó *b* tuviesen factores, como en el primero de los ejemplos que se ve a continuación, sus potencias deben ponerse con paréntesis.

Ejemplo:

$(2x+3)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3\cdot 3^1 + \binom{4}{2}(2x)^2\cdot 3^2 + \binom{4}{3}(2x)^1\cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$

$= 1\cdot 16\cdot x^4 + 4\cdot 8\cdot x^3\cdot 3 + 6\cdot 4\cdot x^2\cdot 9 + 4\cdot 2\cdot x\cdot 27 + 1\cdot 81 = 16x^4 + 69x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Ejemplo:

Desarrolla y simplifica $\left(\sqrt{2}-1\right)^5$ mediante el binomio de Newton.

$\left(\sqrt{2}-1\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\sqrt{2}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot 1^1 + \binom{5}{2}\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot 1^2 - \binom{5}{3}\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1^3 + \binom{5}{4}\left(\sqrt{2}\right)^1\cdot 1^4 - \binom{5}{5}1^5 =$

$= 1\cdot 4\cdot\sqrt{2} - 5\cdot 4\cdot 1 + 10\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1 - 10\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot\sqrt{2} - 1\cdot 1 = 4\cdot\sqrt{2} - 20 + 20\cdot\sqrt{2} - 20 + 5\cdot\sqrt{2} - 1 = 29\cdot\sqrt{2} - 41$

12. ¿Cómo se resuelve una ecuación irracional?

Si hay un único radical, primero **aislamos** la raíz, después **elevamos** al cuadrado, **resolvemos** la ecuación que quede y por último se **comprueban** las soluciones. La comprobación es **obligatoria**, ya que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas acompañadas de las verdaderas.

Si hay más de un radical, primero aislamos una de las raíces, después elevamos al cuadrado, como todavía quedará algún radical, se aplica el procedimiento anterior.

Ejemplo:

Resuelve: $x = 21 - \sqrt{x+9}$

$x = 21 - \sqrt{x+9} \Rightarrow \sqrt{x+9} = 21 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x+9}\right)^2 = (21-x)^2 \Rightarrow x + 9 = 441 - 42x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + 43x - 432 = 0 \Rightarrow x^2 - 43x + 432 = 0 \Rightarrow x = \frac{43 \pm \sqrt{43^2 - 4\cdot 1\cdot 432}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 27 \\ 16 \end{cases}$

Comprobamos la 1ª solución: $27 = 21 - \sqrt{27+9} \Rightarrow 27 = 21 - 6 \Rightarrow 27 = 19$, *x* = 27 **no** es solución.

Comprobamos la 2ª solución: $16 = 21 - \sqrt{16+9} \Rightarrow 16 = 21 - 5 \Rightarrow 16 = 16$, *x* = 16 **sí** es solución.

Ejemplo:

Resuelve: $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (\sqrt{x-1}+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 4 = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow -2\sqrt{x-1} = -4 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

Comprobamos la solución: $\sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = 1 \Rightarrow 3 - 2 = 1$, luego *x* =5 **sí** es solución.

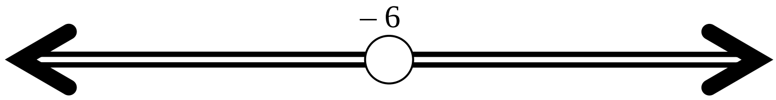
13. ¿Cómo se resuelve una inecuación?

Podemos tener inecuaciones polinómicas (de primer grado, segundo grado etc.) o inecuaciones racionales (con expresiones algebraicas en los denominadores). El método general consiste en convertir la desigualdad en igualdad, se resuelve la ecuación, si fuese una inecuación racional, se igualan a cero los denominadores para obtener sus raíces. Se utilizan todos los valores obtenidos para trocear la recta real y se validan las distintas zonas probando un valor numérico perteneciente a cada intervalo. Las soluciones obtenidas anulando los denominadores nunca forman parte de la solución final. Para las inecuaciones de primer grado se puede también emplear otro procedimiento más rápido que consiste en actuar como se tratase de una ecuación teniendo cuidado de voltear la desigualdad cuando se cambiase el signo a ambos miembros.

<u>Ejemplo de inecuación de primer grado (primer procedimiento):</u>

Resuelve: $2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x$

$$2x-\frac{1}{3}=\frac{7x+4}{6}+x\Rightarrow 12x-2=7x+4+6x\Rightarrow -x=6\Rightarrow x=-6$$



Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, por ejemplo el – 8:

$$2\cdot(-8)-\frac{1}{3}\le\frac{7\cdot(-8)+4}{6}+(-8)\Rightarrow -16-\frac{1}{3}\le\frac{-56+4}{6}-8\Rightarrow -\frac{49}{3}\le\frac{-52}{6}-8\Rightarrow -98\le -52-48\Rightarrow -98\le -100$$

Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona izquierda.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la segunda zona, por ejemplo el 0:

$$2\cdot 0-\frac{1}{3}\le\frac{7\cdot 0+4}{6}+0\Rightarrow -\frac{1}{3}\le\frac{4}{6}\Rightarrow -\frac{1}{3}\le\frac{2}{3}$$

Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la segunda zona.

La solución es entonces el intervalo $\left[-6,+\infty\right)$. Se incluye – 6 porque esta inecuación permite la igualdad.

<u>Ejemplo de inecuación de primer grado (segundo procedimiento):</u>

Resuelve: $2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x$

$$2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x\Rightarrow 12x-2\le 7x+4+6x\Rightarrow -x\le 6\Rightarrow x\ge -6$$

En el último paso la desigualdad de voltea de menor o igual a mayor o igual puesto que hemos cambiado el signo de los dos miembros de la inecuación

La solución es entonces el intervalo $\left[-6,+\infty\right)$. Se incluye – 6 porque esta inecuación permite la igualdad.

<u>Ejemplo de inecuación de primer grado (segundo procedimiento):</u>

Resuelve: $x-\frac{3x-1}{2}>\frac{3x-1}{4}$

$$x-\frac{3x-1}{2}>\frac{3x-1}{4}\Rightarrow 4x-6x+2>3x-1\Rightarrow -5x>-3\Rightarrow 5x<3\Rightarrow x<\frac{3}{5}$$

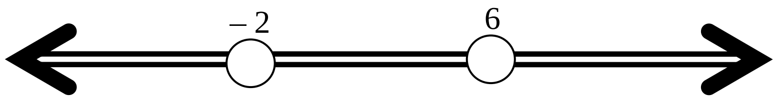
En el penúltimo paso la desigualdad de voltea de menor a mayor puesto que hemos cambiado el signo de los dos miembros de la inecuación

La solución es entonces el intervalo $\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)$. El intervalo es abierto porque la desigualdad es estricta.

<u>Ejemplo de inecuación de segundo grado:</u>

Resuelve: $x^2 - 4x > 12$

$$x^2 - 4x = 12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$



Comprobamos un valor cualquiera de la 1ª zona, por ejemplo el –3:

$(-3)^2 - 4 \cdot (-3) > 12 \Rightarrow 9 + 12 > 12 \Rightarrow 21 > 12$

Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la primera zona.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la 2ª zona, por ejemplo el 0:

$0^2 - 4 \cdot 0 > 12 \Rightarrow 0 > 12$ Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la segunda zona.

Comprobamos un valor cualquiera de la 3ª zona, por ejemplo el 7:

$7^2 - 4 \cdot 7 > 12 \Rightarrow 49 - 28 > 12 \Rightarrow 21 > 12$ Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la 3ª zona.

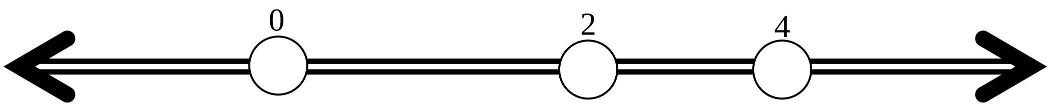
La solución es entonces la unión de intervalos $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$. Excluimos el –2 y el 6 porque esta inecuación no permite la igualdad.

<u>Ejemplo de inecuación racional:</u>

Resuelve: $x + 1 \le \dfrac{3x - 2}{x - 2}$

$$x + 1 \le \frac{3x-2}{x-2} \Rightarrow (x+1)(x-2) \le 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Anulando el denominador: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, por ejemplo el – 1:

$-1 + 1 \le \dfrac{3 \cdot (-1) - 2}{-1 - 2} \Rightarrow 0 \le \dfrac{-5}{-3} \Rightarrow 0 \le \dfrac{5}{3}$ Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida esta zona.

Comprobamos un valor entre el 0 y el 2, por ejemplo el 1:

$1 + 1 \le \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{1 - 2} \Rightarrow 2 \le \dfrac{1}{-1} \Rightarrow 2 \le -1$ Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida esta zona.

Comprobamos un valor entre el 2 y el 4, por ejemplo el 3:

$3 + 1 \le \dfrac{3 \cdot 3 - 2}{3 - 2} \Rightarrow 4 \le \dfrac{7}{1} \Rightarrow 4 \le 7$ Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida esta zona.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la zona derecha, por ejemplo el 5:

$5 + 1 \le \dfrac{3 \cdot 5 - 2}{5 - 2} \Rightarrow 6 \le \dfrac{13}{3}$ Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida esta zona.

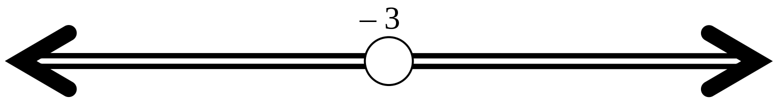
La solución es entonces la unión de intervalos $(-\infty, 0] \cup (2, 4]$. Se incluyen el 0 y el 4 porque esta inecuación permite la igualdad. Se excluye el 2, porque anula el denominador

14. ¿Cómo se resuelve un sistema de inecuaciones?
Se resuelve cada inecuación por separado, como hemos visto en los ejemplos anteriores, y se busca la zona común (si existe) de los intervalos solución de cada inecuación.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} 2-x < x+4 \\ 4x-2 \leq x+7 \end{cases}$

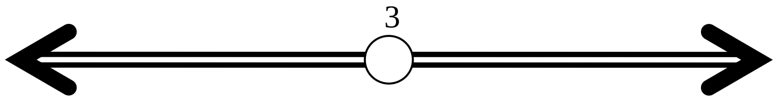
Resolvemos la primera inecuación: $2-x = x+4 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$



Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, el – 4 puede servir: $2-(-4) < -4+4 \Rightarrow 6 < 0$
Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona izquierda.

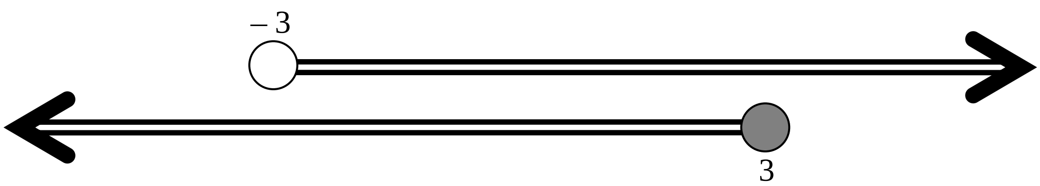
Comprobamos ahora un valor cualquiera de la zona derecha, el 0 puede servir: $2-0 < 0+4 \Rightarrow 2 < 4$
Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la zona derecha.
La solución de la primera inecuación es entonces el intervalo $(-3,+\infty)$. Se excluye – 3 porque la inecuación no permite la igualdad.

Resolvemos la segunda inecuación: $4x-2 = x+7 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$



Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, el 0 puede servir: $4\cdot 0-2 \leq 0+7 \Rightarrow -2 < 7$
Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la zona izquierda.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la zona derecha, el 4 puede servir: $4\cdot 4-2 \leq 4+7 \Rightarrow 14 \leq 11$
Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona derecha.
La solución de la segunda inecuación es entonces el intervalo $(-\infty,3]$. Se incluye el 3 porque la inecuación sí permite la igualdad.
Representamos ahora juntos los dos intervalos y buscamos la zona común:



La solución del sistema de inecuaciones es entonces el intervalo $(-3,3]$.

15. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones?

El primer paso es simplificar lo más posible cada ecuación por separado de las demás. Suele ser aconsejable evitar que queden denominadores o decimales. A continuación observaremos si se trata de un sistema lineal o de uno no lineal.

Si se trata un sistema **no lineal** el método que da mejor resultado el de sustitución. Se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra de manera que quede una única ecuación con una única incógnita que se resuelve para después calcular la incógnita despejada en primer lugar. Es prudente comprobar las soluciones obtenidas.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} x\cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80) = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80) = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\cdot y = 6 \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y - 1{,}60 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\cdot y = 6 \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y = 7{,}60 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x\cdot y + 0{,}80x - 2y = 7{,}60 \end{cases} \rightarrow x\cdot\frac{6}{x} + 0{,}80x - 2\cdot\frac{6}{x} = 7{,}60 \rightarrow \frac{6x}{x} + 0{,}80x - \frac{12}{x} = 7{,}60 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x + 0{,}80x^2 - 12 = 7{,}60x \rightarrow 0{,}80x^2 - 1{,}60x - 12 = 0 \rightarrow 8x^2 - 16x - 120 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = \dfrac{6}{5} = 1{,}2 \\ x_2 = -3 \rightarrow y_2 = \dfrac{6}{-3} = -2 \end{cases}$$

Si se trata un sistema **lineal** con dos incógnitas, aunque se pueda utilizar tanto el método de igualación como el de sustitución, es aconsejable usar el de **reducción**. Se multiplican las ecuaciones por los coeficientes adecuados para que se elimine una incógnita al sumar las ecuaciones. Una vez calculada esta incógnita se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones para hallar la otra incógnita. Otra posibilidad es utilizar de nuevo la reducción para eliminar la otra incógnita.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 15 \\ 4x - 12y = -6 \end{cases} \rightarrow 13x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{13}$$

Para calcular la otra incógnita podemos utilizar la sustitución:

$$3\cdot\frac{9}{13} + 4y = 5 \rightarrow \frac{27}{13} + 4y = 5 \rightarrow 27 + 52y = 65 \rightarrow 52y = 38 \rightarrow y = \frac{38}{52} = \frac{19}{26}$$

Pero, en su lugar, podemos utilizar otra vez la reducción:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 8y = 10 \\ -6x + 18y = 9 \end{cases} \rightarrow 26y = 19 \rightarrow y = \frac{19}{26}$$

Si se trata un sistema **lineal** con más de dos incógnitas el método aconsejable es el de Gauss.

16. ¿Cómo se plantea un problema de enunciado?

Primero leemos detenidamente el enunciado identificando las condiciones que se deben cumplir, después definimos claramente las variables que aparezcan implicadas en el texto, tantas variables como condiciones. Si no tenemos muy claro qué variables definir utilizaremos al menos la(s) que aparezca(n) en la pregunta del problema. Cada condición se convertirá en una ecuación y debería de haber tantas ecuaciones como incógnitas. Resolvemos entonces el sistema de ecuaciones y comprobamos la solución obtenida comprobando que valida el enunciado del problema.

Se debe poner la solución en forma de frase y con las unidades de medida adecuadas.

<u>Ejemplo:</u>

Varios amigos toman un refresco cada uno en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80€ cada uno. ¿Cuántos amigos son?

En la pregunta final del enunciado queda definida la primera variable:

$$x = \text{número de amigos}$$

De la lectura del enunciado vemos que será necesario fijar el dinero que deba poner cada amigo, por lo tanto parece razonable definir como segunda variable:

$$y = \text{precio de cada refresco}$$

Como tenían que pagar 6€ en total, la primera ecuación será: $x \cdot y = 6$

Si dos no pagan, serán x – 2 amigos los que tendrán que poner *0,80€* más que antes, es decir y + 0,80, por lo tanto la segunda ecuación será: $(x-2)\cdot(y+0{,}80)=6$

El sistema será entonces: $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80)=6 \end{cases}$

Este sistema ya ha sido resuelto antes. Obtuvimos para la variable x dos posibles valores: 5, –3. Como esta variable representa el nº de amigos, excluimos la solución negativa. Queda entonces: $x = 5$ $y = 1{,}2$

Solución del problema: **Son 5 amigos y cada refresco costó 1,20€**.

17. ¿Qué es el logaritmo de un número?

Las funciones logarítmicas son las recíprocas de las exponenciales. Lo primero que debemos tener claro es que, de la misma manera que hay distintas exponenciales para cada número real que esté en su base, también habrá infinitas funciones logarítmicas según el número real de su base, que deberá ser siempre mayor que cero. El logaritmo en base ***b*** de un número será el exponente al que hay que elevar la base ***b*** para obtener dicho número:

$$\log_b x = y \leftrightarrow b^y = x$$

En cualquier base, no existen los logaritmos de los números negativos ni tampoco del cero. Sólo se puede calcular el logaritmo de un número mayor que cero.

Al logaritmo en base 10 se le llama logaritmo decimal y se le permite no poner un 10 en su base. Al logaritmo en base el número ***e*** (2,71828…) se le llama logaritmo neperiano y se le representa como ln.

<u>Ejemplo:</u>

$\log_3 81 = 4 \leftrightarrow 3^4 = 81$ Es decir: el logaritmo en base 3 del 81 es 4 porque 4 es el exponente al que hay que elevar el 3 para que resulte 81.

$\log_2 32 = 5 \leftrightarrow 2^5 = 32$ Es decir: el logaritmo en base 2 del 32 es 5 porque elevando el 2 a la quinta resulta 32.

$\log_{10} 100 = 2 \leftrightarrow 10^2 = 10$ Es decir: el logaritmo decimal de 100 es 2 porque elevando 10 al cuadrado resulta 10.

$\ln 1 = 0 \leftrightarrow e^0 = 1$ Es decir: el logaritmo neperiano de 1 es 0 porque elevando el número ***e*** a 0 resulta 1.

18. ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

Las propiedades son las mismas independientemente del valor de su base.

- $\log_b 1 = 0$ Es decir: el logaritmo del 1 es 0 en cualquier base.
- $\log_b b = 1$ Es decir: el logaritmo de la propia base es 1.
- $\log_b (x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2$ Es decir: el logaritmo del producto de dos números coincide con la suma de sus logaritmos.
- $\log_b \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$ Es decir: el logaritmo del cociente de dos números coincide con la resta de sus logaritmos.
- $\log_b (x)^n = n \cdot \log_b x$ Es decir: el logaritmo de un número elevado a un exponente coincide con el exponente multiplicado por el logaritmo del número.
- $\log_b \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_b x}{n}$ Es decir: el logaritmo de raíz de un número coincide con el logaritmo del número dividido por el índice de la raíz.
- No existen propiedades para el logaritmo de la suma o resta de números.
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ Esta propiedad nos permite cambiar de base. Es decir, podríamos calcular un logaritmo en base ***a*** conociendo los logaritmos en base ***b.***

> Ejemplo:
> En cierta base ***b*** conocemos que $\log_b 2 = 0{,}3562$ y $\log_b 10 = 1{,}1833$. Halla $\log_b 8$, $\log_b 5$, $\log_b \left(1000 \cdot \sqrt{2}\right)$
>
> $\log_b 8 = \log_b 2^3 = 3 \cdot \log_b 2 = 3 \cdot 0{,}3562 = 1{,}0686$
>
> $\log_b 5 = \log_b \left(\dfrac{10}{2}\right) = \log_b 10 - \log_b 2 = 1{,}1833 - 0{,}3562 = 0{,}8271$
>
> $\log_b \left(1000 \cdot \sqrt{2}\right) = \log_b 1000 + \log_b \sqrt{2} = \log_b 10^3 + \log_b \sqrt{2} = 3 \cdot \log_b 10 + \dfrac{1}{2}\log_b 2 = 3 \cdot 1{,}1833 + \dfrac{0{,}3562}{2} = 3{,}7280$

19. ¿Para qué sirven los logaritmos?

Independientemente de que son funciones muy frecuentes en las soluciones de las ecuaciones diferenciales, si las consideramos únicamente como herramientas algebraicas son de aplicación indispensable siempre que necesitemos resolver una ecuación en la que la incógnita esté situada en el exponente. En dicha situación se ‘toman’ logaritmos, es decir, igualar el logaritmo del primer miembro de la ecuación al logaritmo del segundo miembro, a continuación la propiedad del logaritmo de una potencia nos permitirá ‘bajar’ la incógnita del exponente y así poder despejarla fácilmente. Se puede emplear cualquier logaritmo, pero habitualmente se usan el decimal o el neperiano, que son los logaritmos que aparecen en cualquier calculadora científica.

> Ejemplo:
> Una población tiene 20.000 habitantes y crece de manera constante a un 13% anual. Calcula cuánto tiempo debe pasar para disponer de 36.850 habitantes.
>
> El modelo de crecimiento exponencial es: $N = 20.000 \cdot 1{,}13^t$
>
> $36.850 = 20.000 \cdot 1{,}13^t \Rightarrow \dfrac{36.850}{20.000} = 1{,}13^t \Rightarrow 1{,}8425 = 1{,}13^t \Rightarrow$
>
> $\Rightarrow \log 1{,}8425 = \log 1{,}13^t \Rightarrow \log 1{,}8425 = t \cdot \log 1{,}13 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}8425}{\log 1{,}13} = 5$ años