PROBABILIDAD

PREGUNTAS MÁS FRECUENTES

1. ¿A qué se denomina Espacio Muestral?

Dada una experiencia aleatoria, se denomina ***Espacio Muestral*** al conjunto de los resultados posibles de dicha experiencia. También se le puede llamar Universo.

Ejemplos:
Lanzar una vez una moneda. $E = \{cara, cruz\}$
Lanzar una vez un dado de parchís. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

2. ¿Qué son los sucesos?

Cada subconjunto del Espacio Muestral se denomina **suceso**. En consecuencia cada suceso será la agrupación de algunos, desde ninguno hasta todos, de los resultados posibles. Si no se elije ningún resultado el suceso se denomina **imposible** (Ø). Si contiene a todos los resultados posibles, se denomina **suceso seguro** y coincide con el espacio muestral (***E***). Si contiene a uno sólo de los resultados posibles, se denomina **suceso elemental**. Si el número de resultados es 'n', habrá 2^n sucesos distintos.

Ejemplo:
Lanzar una vez una moneda. $E = \{cara, cruz\}$
Existen cuatro sucesos: $\{Ø, \{cara\}, \{cruz\}, E\}$

Ejemplo:
Lanzar una vez un dado de parchís. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Existen sesenta y cuatro (2^6 =64) sucesos. Hay uno imposible, seis elementales, quince con dos elementos, veinte de tres elementos, quince de cuatro elementos, seis de cinco elementos y el suceso seguro:

$$\{Ø, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\},$$
$$\{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\},$$
$$\{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{2,3,4,5\},$$
$$\{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, E\}$$

Estos sucesos **no** deben confundirse con resultados de distintos lanzamientos del dado sino la descripción de aquellos resultados del **único** lanzamiento que, por alguna razón, nos son favorables. Por ejemplo $\{2,4,6\}$ señalaría nuestro interés de que el dado muestre un resultado par, así como $\{1,2,4,5,6\}$ mostraría el interés de que no salga el 3.

3. ¿Cómo se hace la unión, la intersección y la complementación de sucesos?

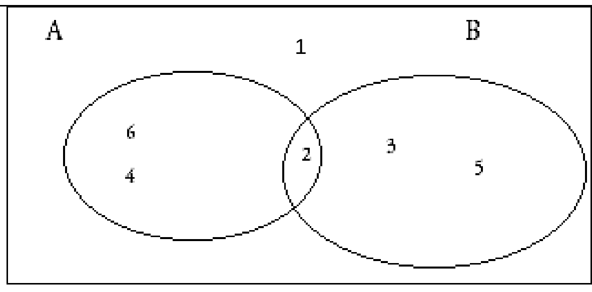
La **unión** (U) de dos sucesos: AUB, es aquel suceso que agrupa todos los resultados posibles de ambos, tanto los que sólo favorecen a cualquiera de ellos como los resultados comunes, si los hay. Se lee con una disyunción: ' que se cumpla A **o** B '

La **intersección** (∩) de dos sucesos: A∩B, es aquel suceso que contiene únicamente los resultados comunes a ambos. De no haberlos, resultaría el suceso imposible y se diría que los dos sucesos son **incompatibles** (también llamados **mutuamente excluyentes**). La intersección se puede leer con una conjunción: ' que se cumplan A **y** B '

Se denominan **contrarios** (o **complementarios**) a aquellos sucesos incompatibles cuya unión es el Espacio Muestral. $A \cup B = E$, $A \cap B = Ø$. Pasar de un suceso a su contrario se simboliza con una raya sobre el suceso dado: $\overline{A} = B$. La complementación se puede leer con una negación: ' que **no** se cumpla A '

Es habitual visualizar estas operaciones mediante **diagramas de Venn**.

Ejemplo:
Lanzar una vez un dado de parchís. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Sean dos sucesos: $A = \{2,4,6\}$ $B = \{2,3,5\}$
Su unión es: $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$ y su intersección: $A \cap B = \{2\}$



Los sucesos $A = \{2,4,6\}$ $C = \{3,5\}$ son incompatibles, ya que $A \cap C = Ø$
Los sucesos $A = \{2,4,6\}$ $D = \{1,3,5\}$ son contrarios, ya que $A \cap D = Ø$ y $A \cup D = \{1,2,3,4,5,6\}$ es decir: $D = \overline{A}$

4. ¿Qué propiedades básicas cumplen la unión, la intersección y la complementación (hallar el contrario) de los sucesos?

De la unión y la intersección tenemos las propiedades clásicas de los números reales:

Conmutativas:	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	El orden no afecta al resultado de la unión o la intersección de dos sucesos
Asociativas:	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	Cuando se realice la unión o la intersección de tres sucesos no importa cómo se asocian.
Distributivas:	$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$	$(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$	Se comportan como el factor común del producto de números respecto de la suma.

De la **complementación** tenemos una propiedad:

Doble negación:	$\overline{\left(\overline{A}\right)}=A$	El **contrario** del **contrario** de un suceso es el propio suceso.

De la unión e intersección combinadas con la **complementación** tenemos dos propiedades, llamadas leyes **de 'De Morgan'**:

1ª ley **de De Morgan**	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	Que **no** se cumpla la unión de A y B significa que **ni** A, **ni** B se cumplen.
2ª ley **de De Morgan**	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	Que **no** se cumplan a la vez A y B significa que, **o** no se cumple A, **o** no se cumple B.

5. ¿Qué mide la probabilidad de un suceso y cuánto puede valer?

La **probabilidad** de un suceso es un valor comprendido entre 0 y 1 que pretende medir la menor o mayor facilidad de su cumplimiento. Al suceso imposible le corresponde la probabilidad 0, mientras que al suceso seguro le corresponde la probabilidad 1. A los restantes suceso les corresponderá un valor intermedio de probabilidad de manera que cuanto más se acerque a 0 más difícil será su cumplimiento y cuanto más se acerque a 1 más fácil será que se cumpla.

$$P(\emptyset)=0\,,\ P(\mathrm{E})=1\,,\ 0\le P(\mathrm{A})\le 1$$

6. ¿Cómo se calcula la probabilidad de los sucesos?

Todo depende del valor de probabilidad de los sucesos elementales. En principio sería posible asignar arbitrariamente valores positivos a todos los sucesos elementales siempre y cuando sumen 1. En la práctica, es decir, pretendiendo ajustarnos más a la realidad, se pueden elegir mejor estos valores de dos maneras: I) ***Regla de Laplace***: aplicando criterios de homogeneidad de tal forma que concediéramos el mismo valor de probabilidad a todos los resultados posibles. Su definición clásica es el cociente entre el número de resultados que favorezcan el cumplimiento del suceso entre el número total de resultados posibles. II) *Con Apoyo Estadístico*: repitiendo muchas veces la experiencia aleatoria asignaríamos como valor de probabilidad de cada suceso la frecuencia relativa que se hubiera obtenido.

Hecho de cualquier forma, la probabilidad de un suceso se hallaría sumando los valores de probabilidad de los resultados posibles que lo definen.

Ejemplo:

Lanzar una vez un dado de parchís. $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

La siguiente asignación sería posible pero no se ajustaría a ningún dado normal.

La probabilidad de sacar un número *par* sería: $P(\text{par})=0,1+0,05+0,3=0,45$

X	1	2	3	4	5	6
P	0,2	0,1	0,25	0,05	0,1	0,3

Con la Ley de Laplace sería:

Ahora: $P(\text{par})=1/6+1/6+1/6=3/6=0,5$

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Si, lanzando un dado concreto cien veces, hubiésemos obtenido 19 unos, 14 doses, 15 treses, 18 cuatros, 20 cincos y 14 seises,

Podría ser razonable hacer:

Y ahora: $P(\text{par})=0,14+0,18+0,14=0,46$

X	1	2	3	4	5	6
P	0,19	0,14	0,15	0,18	0,2	0,14

Ejemplo:

Extraer al azar una bola de una bolsa con 7 bolas rojas, 5 bolas azules y 8 bolas blancas, todas de un mismo tamaño.

Considerando razonable que todas las bolas podrían tener la misma probabilidad de ser elegidas, aplicando la regla de Laplace tendríamos:

X	Roja	Azul	Blanca
P	7/20	5/20	8/20

7. **¿Qué propiedades cumplen las probabilidades de los sucesos?**
La suma de las probabilidades de dos sucesos **contrarios** siempre es 1. Se suele aplicar esta propiedad para calcular la probabilidad de un suceso sabiendo la de su contrario.

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)$$

La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** es igual a la suma de sus probabilidades:

$$A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

La probabilidad de la unión de dos sucesos **compatibles** es igual a la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de su intersección:

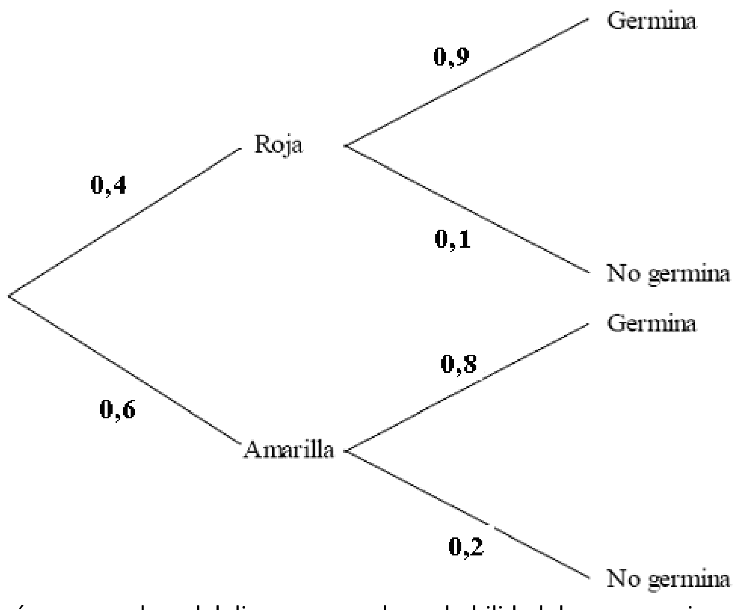
$$A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

<u>Ejemplo</u>:
Sean A y B sucesos tales que: $P(A)=0{,}7$ $P(B)=0{,}6$ $P(A\cap B)=0{,}4$
Entonces: $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}7=0{,}3$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}7+0{,}6-0{,}4=0{,}9$

<u>Ejemplo</u>:
¿Son incompatibles dos sucesos tales que: $P(A)=0{,}2$ $P(B)=0{,}6$ $P(A\cup B)=0{,}8$?
Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0{,}8=0{,}2+0{,}6-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0$, por lo que sí son incompatibles.

8. **¿Para qué se utiliza un diagrama en árbol?**
En ocasiones se proponen experiencias aleatorias compuestas. Es decir, que de manera secuenciada, se van proponiendo en diversas etapas experiencias aleatorias simples. Es posible visualizar este proceso mediante un **diagrama en árbol** señalando en cada paso (cada rama del árbol) la probabilidad del último paso realizado.

<u>Ejemplo</u>:
Un paquete de semillas contiene un 40% de semillas rojas y el resto son semillas amarillas. La probabilidad de que germine una semilla roja es de 0,9 mientras que la de que germine una semilla amarilla es 0,8.
El diagrama en árbol sería:



Sería **un error** leer del diagrama que la probabilidad de que germine una semilla sea 0,9.
También sería **un error** leer del diagrama que la probabilidad de que germine una semilla sean 0,9 y 0,8.
Ambas probabilidades necesitan que se señale lo sucedido en el primer paso. Es decir:
Si la semilla es Roja, la probabilidad de que germine es 0,9, pero i la semilla es Amarilla, la probabilidad de germinar es 0,8.

9. ¿Qué es la probabilidad condicionada?

Es muy frecuente que los sucesos estén relacionados de tal forma que, de cumplirse uno de ellos, favorezca o perjudique el cumplimiento del otro. De ser así, se dice que los sucesos son ***dependientes***. Si se comprobase que el cumplimiento o incumplimiento de un suceso no cambiase la probabilidad de otro, diríamos que esos sucesos son ***independientes***.

La probabilidad condicionada calcula la probabilidad de un suceso suponiendo que ya se ha cumplido el otro. Se escribe así: $P(A|B)$ y se lee: probabilidad de A condicionada a B.

La fórmula $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ relaciona esta probabilidad con la de la intersección. Es frecuente utilizar esta fórmula para calcular la probabilidad de la intersección: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$ que se interpreta fácilmente pensando que para que se cumplan los dos sucesos A y B podríamos empezar cumpliendo B para después calcular la probabilidad de que se cumpla A. Es obvio que se puede alterar este orden utilizando la fórmula: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$

<u>Ejemplo</u>:

Un paquete de semillas contiene un 40% de semillas rojas y el resto son semillas amarillas. La probabilidad de que germine una semilla roja es de 0,9 mientras que la de que germine una semilla amarilla es 0,8.

Las probabilidades de la segunda fase del diagrama en árbol son probabilidades condicionadas. Concretamente:

$P(\text{Germine }|\text{Roja})=0{,}9$ $\qquad P(\text{No Germine }|\text{Roja})=0{,}1$

$P(\text{Germine }|\text{Amarilla})=0{,}8$ $\qquad P(\text{No Germine }|\text{Amarilla})=0{,}2$

Y la probabilidad de una de sus intersecciones:

$P(\text{Roja}\cap\text{Germine})=P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine }|\text{Roja})=0{,}4\cdot 0{,}9=0{,}36$

Estos sucesos son dependientes, ya que vemos que cambia la probabilidad de germinar según cada tipo de semilla.

10. ¿Cómo se calcula la probabilidad en experiencias aleatorias compuestas?

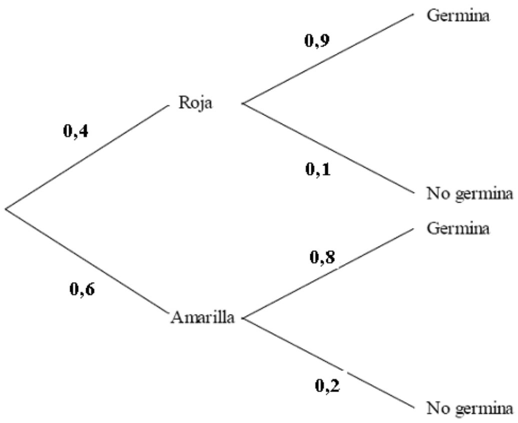
La experiencia aleatoria compuesta se divide en etapas de experiencias aleatorias simples (habitualmente se visualiza con un diagrama en árbol). Si denominamos A_1 A_2 … A_n a todas las posibilidades de la primera etapa. La probabilidad de un suceso B de la segunda etapa se calcularía mediante la siguiente fórmula llamada Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)$$

El la práctica consiste en avanzar por las ramas del diagrama en árbol hasta llegar al suceso pedido multiplicando las probabilidades que se encuentren sumándose a los productos realizados en otros caminos que partan de otra rama de inicio.

<u>Ejemplo</u>:

Un paquete de semillas contiene un 40% de semillas rojas y el resto son semillas amarillas. La probabilidad de que germine una semilla roja es de 0,9 mientras que la de que germine una semilla amarilla es 0,8. Calcula la probabilidad de que germine una semilla de la que no conocemos su color.



$P(\text{Germine})=P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine }|\text{Roja})+P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine }|\text{Roja})=0{,}4\cdot 0{,}9\text{`}+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}84$

11. ¿Qué son las probabilidades *a priori* y *a posteriori*?

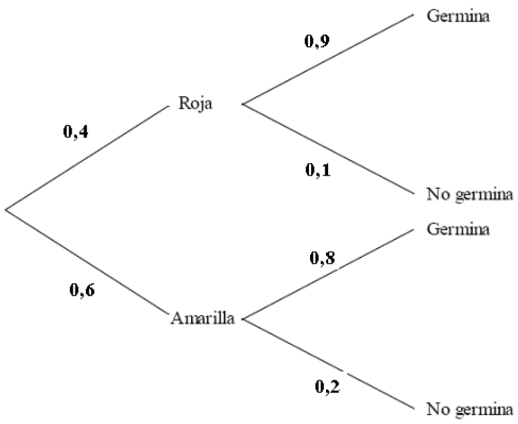
Cuando tenemos una experiencia aleatoria compuesta dividida en etapas de experiencias aleatorias simples, se denominan probabilidades *a priori* a las de los sucesos $A_1, A_2, \dots A_n$ que forman todas las posibilidades de la primera etapa. Si B es un suceso de la segunda etapa, se denominan probabilidades *a posteriori* a las de los sucesos condicionados $A_1|B, A_2|B, \dots A_n|B$. En definitiva, estaríamos diferenciando entre las probabilidades de los sucesos A_i antes de que ocurra B (a priori) respecto de las probabilidades de los sucesos A_i sabiendo que ya se ha cumplido B (a posteriori). La fórmula que se emplea se llama Teorema de Bayes. Hay una fórmula para cada $A_i|B$: con i=1,2,…,n

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}{P(A_1)\cdot P(B\mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B\mid A_2) + \ldots + P(A_n)\cdot P(B\mid A_n)}$$

El la práctica consiste en avanzar por las ramas del diagrama en árbol hasta llegar al suceso pedido multiplicando las probabilidades que se encuentren sumándose a los productos realizados en otros caminos que partan de otra rama de inicio.

Ejemplo:

Un paquete de semillas contiene un 40% de semillas rojas y el resto son semillas amarillas. La probabilidad de que germine una semilla roja es de 0,9 mientras que la de que germine una semilla amarilla es 0,8.



$$P(\text{Roja} \mid \text{Germine}) = \frac{P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine} \mid \text{Roja})}{P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine} \mid \text{Roja}) + P(\text{Roja})\cdot P(\text{Germine} \mid \text{Roja})} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9`+0{,}6\cdot 0{,}8} = \frac{0{,}36}{0{,}84} = \frac{3}{7}$$

12. ¿Qué es una tabla de contingencia?

Consiste en una tabla de doble entrada en la que aparecen los elementos que cumple simultáneamente dos condiciones: la del suceso de su fila y la del suceso de su columna, es decir, los elementos de su intersección. Se suele añadir una columna y una fila con los totales marginales. La última celda de abajo a la derecha será el auténtico total.

En el interior de las celdas pueden aparecer: cantidades reales (como en el ejemplo); porcentajes; o probabilidades. De ser porcentajes, la última celda tendrá un 100%. De ser probabilidades en la última celda aparecerá un 1.

La **tabla de contingencia** se emplea cuando los datos son de intersección de sucesos y no cuando los datos son probabilidades condicionadas, para los cuales es más oportuno un diagrama en árbol.

Ejemplo:

La siguiente tabla muestra las asignaturas que estudian 210 alumnos en una universidad.

	1^{er} Curso	2º Curso	
Historia	50	35	85
Ciencias	15	30	45
Arte	45	35	80
	110	100	210

$P(Historia \cap 2^o Curso) = 35/210$

$P(Historia \mid 2^o Curso) = 35/100$

$P(Historia) = 85/210$

Como $P(Historia \mid 2^o Curso) \neq P(Historia)$, los sucesos *Historia* y *2º Curso* no son independientes

$P(2^o Curso \mid Ciencias) = 30/45$

$P(Historia \cup 2^o Curso) = (85+30+35)/210 = 150/210$