Geometría Analítica en exámenes BI – NM

Mayo 00 P1

The vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ are given by $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$.

Find scalars a , b such that $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 8\boldsymbol{i} + (b - 2)\boldsymbol{j}$.

Mayo 00 P1

Find a vector equation of the line passing through $(-1 , 4)$ and $(3 , -1)$. Give your answer in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{d}$, where $t \in \mathbb{R}$.

Mayo 00 P2

In this question, the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ km represents a displacement due east, and the vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ km a displacement due north.

Two crews of workers are laying an underground cable in a north-south direction across a desert. At 06:00 each crew sets out from their base camp which is situated at the origin (0, 0) . One crew is in a Toyundai vehicle and the other in a Chryssault vehicle.

The Toyundai has velocity vector $\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$ km h^{-1}, and the Chryssault has velocity vector $\begin{pmatrix} 36 \\ -16 \end{pmatrix}$ km h^{-1}.

(a) Find the speed of each vehicle.

(b) (i) Find the position vectors of each vehicle at 06:30 .

(ii) Hence, or otherwise, find the distance between the vehicles at 06:30 .

(c) At this time (06:30) the Chryssault stops and its crew begin their day's work, laying cable in a northerly direction. The Toyundai continues travelling in the same direction at the same speed until it is exactly north of the Chryssault. The Toyundai crew then begin their day's work, laying cable in a southerly direction. At what time does the Toyundai crew begin laying cable?

(d) Each crew lays an average of 800 m of cable in an hour. If they work non-stop until their lunch break at 11:30 , what is the distance between them at this time?

(e) How long would the Toyundai take to return to base camp from its lunch-time position, assuming it travelled in a straight line and with the same average speed as on the morning journey? (Give your answer to the nearest minute.)

Nov 00 P1

The line L passes through the origin and is parallel to the vector $2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

Write down a vector equation for L.

Nov 00 P2

In this question the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ km represents a displacement due east, and the vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ km represents a displacement due north.

The point $(0, 0)$ is the position of *Shipple Airport*. The position vector $\boldsymbol{r}_1$ of an aircraft *Air One* is given by

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix},$$

where t is the time in minutes **since** 12:00.

(a) Show that the *Air One* aircraft

(i) is 20 km from *Shipple Airport* at 12:00;

(ii) has a speed of 13 km/min.

(b) Show that a cartesian equation of the path of *Air One* is:

$$5x + 12y = 224.$$

The position vector $\boldsymbol{r}_2$ of an aircraft *Air Two* is given by

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2.5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

where t is the time in minutes **since** 12:00.

(c) Find the angle between the paths of the two aircraft.

(d) (i) Find a cartesian equation for the path of *Air Two*.

(ii) Hence find the coordinates of the point where the two paths cross.

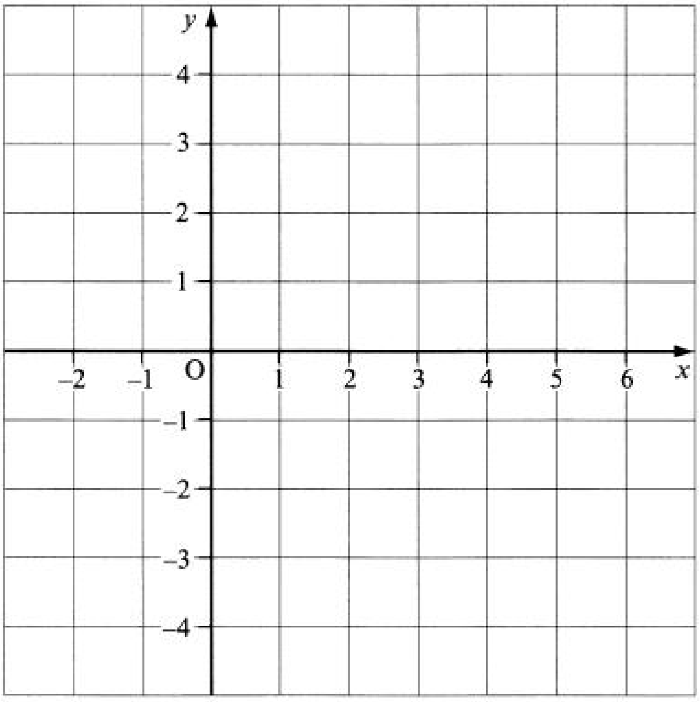
(e) Given that the two aircraft are flying at the same height, show that they do not collide.

Nov 00 P1

The triangle ABC is defined by the following information

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\quad \overrightarrow{AC}$ is parallel to $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) On the grid below, draw an accurate diagram of triangle ABC.



(b) Write down the vector $\overrightarrow{OC}$.

Mayo 01 P2

In this question, a unit vector represents a displacement of 1 metre.

A miniature car moves in a straight line, starting at the point (2 , 0).
After t seconds, its position, (x , y), is given by the vector equation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) How far from the point (0 , 0) is the car after 2 seconds?

(b) Find the speed of the car.

(c) Obtain the equation of the car's path in the form $ax + by = c$.

Another miniature vehicle, a motorcycle, starts at the point (0 , 2), and travels in a straight line with constant speed. The equation of its path is

$$y = 0.6x + 2 , \qquad x \geq 0 .$$

Eventually, the two miniature vehicles collide.

(d) Find the coordinates of the collision point.

(e) If the motorcycle left point (0 , 2) at the same moment the car left point (2 , 0), find the speed of the motorcycle.

Mayo 01 P1

The points P , Q have coordinates P(4 , 0) , Q(–5 , 7) .

Find the equation of the line which is perpendicular to (PQ) and passes through the point P . Give your answer in the form $ax + by + c = 0$, where a , b , and c are integers.

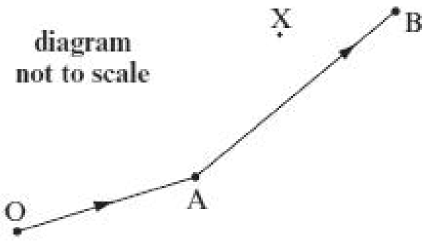
Mayo 01 P1

Find the angle between the following vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$, giving your answer to the nearest degree.

$$\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}$$

Nov 01 P2

The diagram below shows the positions of towns O , A , B and X .



Town A is 240 km East and 70 km North of O .
Town B is 480 km East and 250 km North of O .
Town X is 339 km East and 238 km North of O .

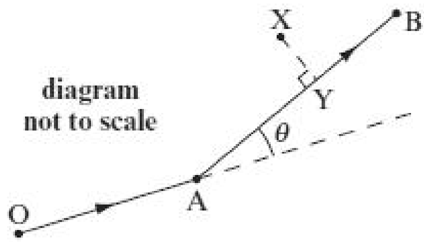
An airplane flies at a constant speed of 300 km h^{-1} from O towards A .

(a) (i) Show that a unit vector in the direction of $\overrightarrow{OA}$ is $\begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.28 \end{pmatrix}$.

(ii) Write down the velocity vector for the airplane in the form $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

(iii) How long does it take for the airplane to reach A ?

At A the airplane changes direction so it now flies towards B . The angle between the original direction and the new direction is θ as shown in the following diagram. This diagram also shows the point Y , between A and B , where the airplane comes closest to X .



(b) Use the scalar product of two vectors to find the value of θ in degrees.

(c) (i) Write down the vector $\overrightarrow{AX}$.

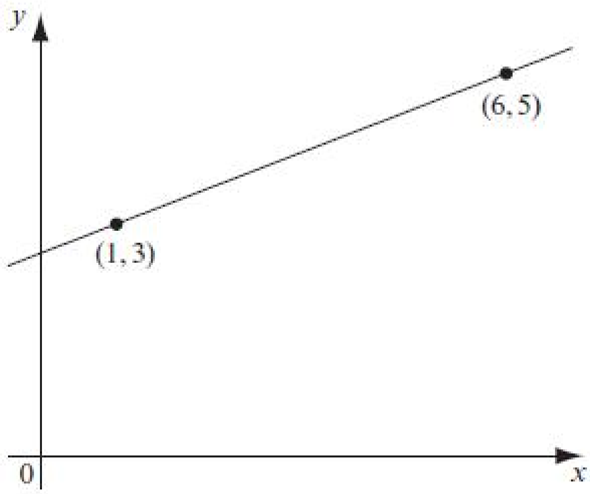
(ii) Show that the vector $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ is perpendicular to $\overrightarrow{AB}$.

(iii) By finding the projection of $\overrightarrow{AX}$ in the direction of $\boldsymbol{n}$, calculate the distance XY .

(d) How far is the airplane from A when it reaches Y ?

Nov 01 P1

The diagram below shows a line passing through the points $(1, 3)$ and $(6, 5)$.



Find a vector equation for the line, giving your answer in the form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \text{ where } t \text{ is any real number.}$$

Nov 01 P2

A trapezium is a quadrilateral with two parallel sides. A trapezium ABCD is defined by four lines with the following equations

$$\text{Line 1: (AB)} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Line 2: (AD)} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Line 3: (CD)} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Line 4: (BC)} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lines 1 and 2 intersect at the point A$(-8, 3)$, and lines 1 and 4 at the point B$(12, 18)$. Lines 3 and 4 intersect at C, and lines 2 and 3 at D.

(a) Which **two** lines are parallel?

(b) Using the intervals $-10 \le x \le 15$ and $0 \le y \le 25$, draw a neat sketch illustrating the four lines and the trapezium formed by them. Label the vertices.

(c) (i) Write down the coordinates of C.

(ii) Show algebraically that the coordinates of D are $(-5, 14)$.

(d) The vector $-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ is perpendicular to $\overrightarrow{AB}$. Use this fact to find the projection of $\overrightarrow{AD}$ in the direction of $-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

(e) Calculate the area of the trapezium ABCD.

Nov 01 P1

The vectors $\begin{pmatrix} 2x \\ x-3 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \end{pmatrix}$ are perpendicular for two values of x.

(a) Write down the quadratic equation which the two values of x must satisfy.

(b) Find the two values of x.

Nov 01 P1

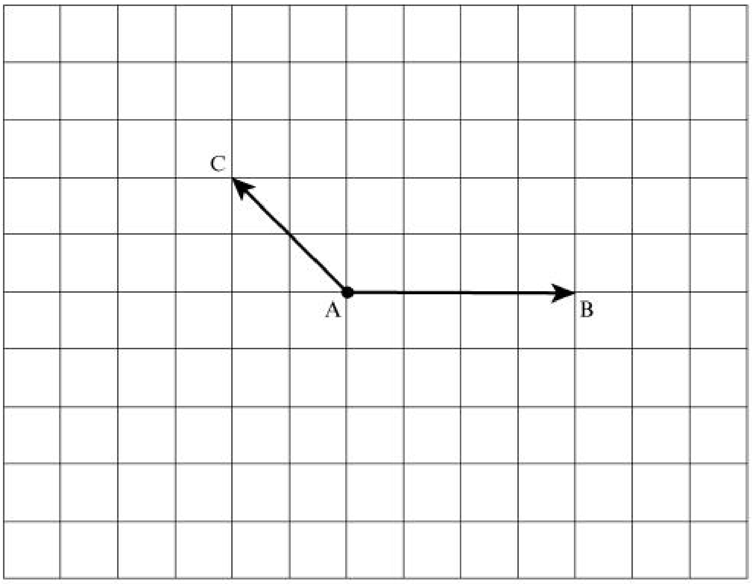
A triangle has its vertices at A$(-1, 3)$, B$(3, 6)$ and C$(-4, 4)$.

(a) Calculate $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(b) Find the **cosine** of angle A of the triangle.

Mayo 02 P1

El diagrama a continuación muestra los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



Marque en el diagrama los siguientes puntos

(a) el punto D tal que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$;

(b) el punto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

(c) el punto Q tal que $\overrightarrow{AQ}$ es la proyección del vector $\overrightarrow{AC}$ en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

Mayo 02 P2

Tres de las coordenadas del paralelogramo STUV son $S(-2,-2)$, $T(7,7)$, $U(5,15)$.

(a) Halle el vector $\overrightarrow{ST}$ y a partir de allí las coordenadas de V .

(b) Halle una ecuación vectorial de la recta (UV) de la forma $r = p + \lambda d$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Muestre que el punto E, de vector de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ está sobre la recta (UV) y halle el valor de λ para este punto.

El punto W tiene vector de posición $\begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

(d) (i) Si $|\overrightarrow{EW}| = 2\sqrt{13}$, muestre que uno de los valores de a es -3, y halle el otro valor posible de a.

(ii) Para $a = -3$, calcule el ángulo entre $\overrightarrow{EW}$ y $\overrightarrow{ET}$.

Mayo 02 P1

La ecuación vectorial de una recta es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Halle la ecuación de esta recta que tiene la forma $ax + by = c$, donde a, b, y $c \in \mathbb{Z}$.

Nov 02 P1

Calcule el ángulo agudo entre las rectas de ecuaciones

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } r = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nov 02 P2

En el diagrama a continuación aparece el punto O de coordenadas $(0, 0)$, el punto A con vector de posición $a = 12i + 5j$, y el punto B con vector de posición $b = 6i + 8j$. El ángulo formado por (OA) y (OB) es θ.

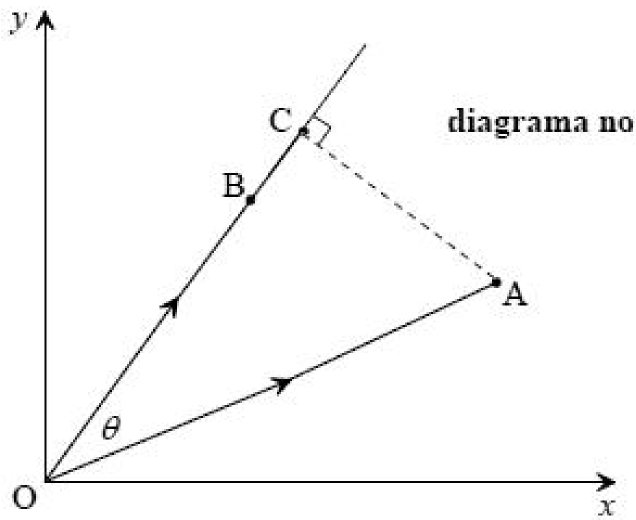


diagrama no dibujado a escala

Halle

(a) (i) $|a|$;

(ii) un vector unitario en la dirección de b;

(iii) el valor **exacto** de $\cos\theta$ expresado como $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$.

El punto C es el pie de la perpendicular trazada desde A a (OB). El vector de posición de C está dado por c.

(b) (i) Halle la proyección escalar de a en la dirección de b.

(ii) Halle c y exprese su respuesta en la forma $mi + nj$, donde se han de hallar m y n.

(iii) Calcule $|\mathbf{AC}|$.

Mayo 03 P1

Las ecuaciones vectoriales de dos rectas vienen dadas por

$$r_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las rectas se cortan en el punto P. Halle el vector de posición de P.

Mayo 03 P1

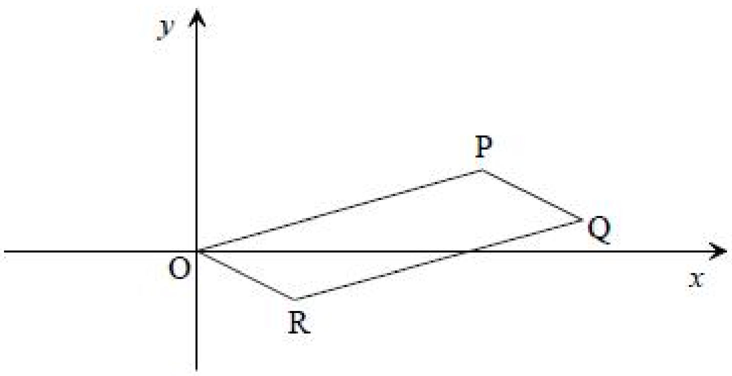
Sean los vectores $c = 3i + 4j$ y $d = 5i - 12j$.

(a) Calcule el producto escalar $c \cdot d$.

(b) Calcule la proyección escalar del vector c en la dirección del vector d.

Mayo 03 P2

En la figura aparece un paralelogramo OPQR en el cual $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.



(a) Halle el vector $\vec{OR}$.

(b) Use el producto escalar de dos vectores para demostrar que

$$\cos \mathrm{O\hat{P}Q} = -\frac{15}{\sqrt{754}}.$$

(c) (i) Explique por qué $\cos \mathrm{P\hat{Q}R} = -\cos \mathrm{O\hat{P}Q}$.

(ii) A partir de ello, demuestre que $\mathrm{sen}\, \mathrm{P\hat{Q}R} = \frac{23}{\sqrt{754}}$.

(iii) Calcule el área del paralelogramo OPQR, expresando su respuesta como un número entero.

Nov 03 P1

Una ecuación vectorial de la recta L es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

¿Cuáles de las siguientes son también ecuaciones vectoriales de la misma recta L?

A. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ B. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ C. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ D. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

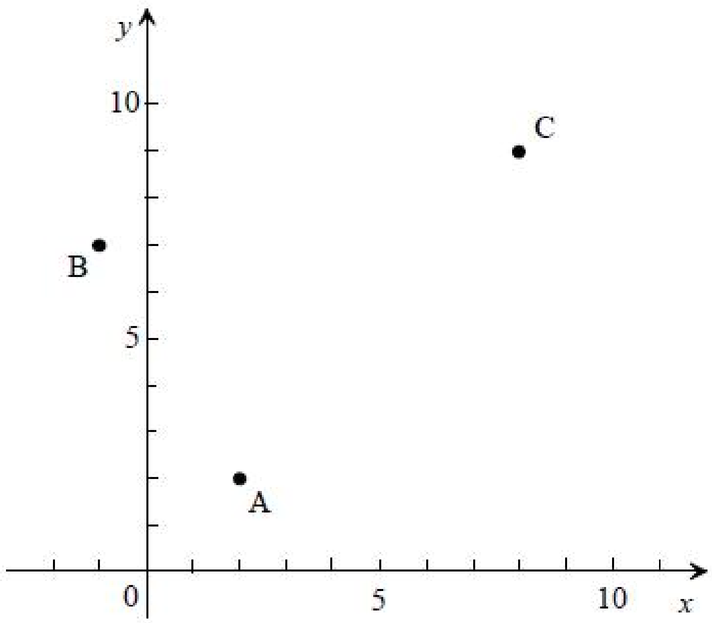
Nov 03
P1

(a) Halle el producto escalar de los vectores $\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

(b) Existen dos señales en los puntos P$(60, 25)$ y Q$(-30, 40)$. Un topógrafo que se encuentra situado en O$(0, 0)$ mira hacia la señal en P. Halle el ángulo que debe girarse para mirar hacia la señal en Q.

Nov 03
P2

Los puntos A, B y C señalados en la siguiente figura son tres de los vértices de un paralelogramo ABCD. El vector de posición del punto A es $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



(a) Escriba el vector de posición de B y el de C.

(b) El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 4 \end{pmatrix}$. Halle d.

(c) Halle $\overrightarrow{BD}$.

La recta L pasa por B y D.

(d) (i) Escriba una ecuación vectorial de L en la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

(ii) Calcule el valor de t en el punto B.

(e) Sea P el punto $(7, 5)$. Tras encontrar el valor de t en P, compruebe que P pertenece a la recta L.

(f) Compruebe que $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BD}$.

Mayo 04
P2

Los vectores de posición de los puntos A y B son $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivamente.

(a) (i) Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Halle $|\overrightarrow{AB}|$.

El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 22 \end{pmatrix}$.

(b) Halle el vector $\overrightarrow{AD}$ en función de d.

El ángulo $B\hat{A}D$ es de 90°.

(c) (i) Compruebe que $d = 9$.

(ii) Escriba el vector de posición del punto D.

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

(d) Halle el vector de posición del punto C.

(e) Halle el área del rectángulo ABCD.

Mayo 04
P2

The points A and B have the position vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectively.

(a) (i) Find the vector $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Find $|\overrightarrow{AB}|$.

The point D has position vector $\begin{pmatrix} d \\ 23 \end{pmatrix}$.

(b) Find the vector $\overrightarrow{AD}$ in terms of d.

The angle $B\hat{A}D$ is 90°.

(c) (i) Show that $d = 7$.

(ii) Write down the position vector of the point D.

The quadrilateral ABCD is a rectangle.

(d) Find the position vector of the point C.

(e) Find the area of the rectangle ABCD.

Mayo 04 P1

Dos rectas, L_1 y L_2, tienen las siguientes ecuaciones vectoriales.

$$L_1: \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + t(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})$$
$$L_2: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + s(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$$

El ángulo entre L_1 y L_2 es θ. Halle el coseno del ángulo θ.

Nov 04 P2

Los puntos A, B y C tienen vectores de posición $4i + 2j$, $i - 3j$ y $-5i - 5j$. Sea D un punto sobre el eje x tal que ABCD forma un paralelogramo.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{BC}$.

(ii) Halle el vector de posición de D.

(b) Halle el ángulo que forman $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$.

La recta L_1 pasa por A y es paralela a $i + 4j$. La recta L_2 pasa por B y es paralela a $2i + 7j$. Una ecuación vectorial de L_1 es $r = (4i + 2j) + s(i + 4j)$.

(c) Escriba una ecuación vectorial de L_2 en la forma $r = b + tq$.

(d) Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto P. Halle el vector de posición de P.

Mayo 05 P1

Considere la recta L de ecuación $y + 2x = 3$. La recta L_1 es paralela a L y pasa por el punto $(6, -4)$.

(a) Halle la pendiente de L_1.

(b) Halle la ecuación de L_1 en la forma $y = mx + b$.

(c) Halle la abscisa, x, del punto donde la recta L_1 corta al eje x.

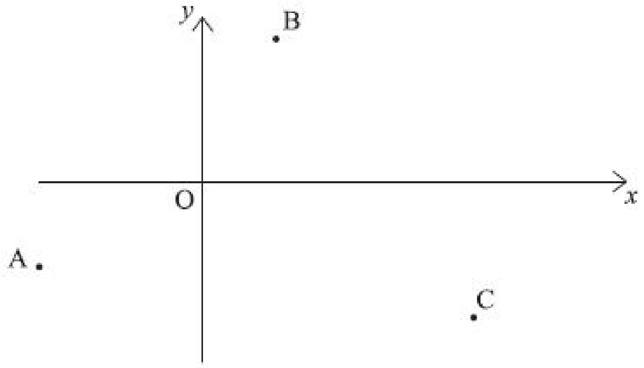
Mayo 05 P1

Halle el coseno del ángulo comprendido entre los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mayo 05
P2

En esta pregunta el vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el este, y el vector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el norte.

La siguiente figura muestra la posición de las ciudades A, B y C respecto a un aeropuerto O, situado en el punto (0, 0). Un avión vuela sobre las tres ciudades a una velocidad constante de $250\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$.



La ciudad A se encuentra a 600 km al oeste y 200 km al sur del aeropuerto.
La ciudad B se encuentra a 200 km al este y 400 km al norte del aeropuerto.
La ciudad C se encuentra a 1 200 km al este y 350 km al sur del aeropuerto.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Compruebe que el vector de longitud una unidad en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ es $\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}6\end{pmatrix}$.

A las 12:00 h, un avión sobrevuela la ciudad A dirigiéndose hacia la ciudad B a una velocidad de $250\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Sea $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ el vector velocidad del avión. Sea t el número de horas que permanece volando a partir de las 12:00 h. La posición del avión puede venir dada por la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-600\\-200\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}.$$

(b) (i) Compruebe que el vector velocidad es $\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}$.

(ii) Halle la posición del avión a las 13:00 h.

(iii) ¿A qué hora sobrevolará el avión la ciudad B?

Cuando sobrevuela la ciudad B, el avión cambia su dirección para volar hacia la ciudad C. Recorrer los 1250 km entre B y C le lleva cinco horas. Al sobrevolar la ciudad A, el piloto observó que le quedaban 17 000 litros de combustible. El avión consume 1800 litros de combustible por hora cuando viaja a $250\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$. Cuando el combustible del depósito desciende por debajo de los 1000 litros, se enciende una señal luminosa.

(c) ¿A qué distancia de la ciudad C se encontrará el avión cuando se encienda la señal luminosa?

Nov 05 P1

A boat B moves with constant velocity along a straight line. Its velocity vector is given by $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

At time $t = 0$ it is at the point $(-2, 1)$.

(a) Find the magnitude of v.

(b) Find the coordinates of B when $t = 2$.

(c) Write down a vector equation representing the position of B, giving your answer in the form $r = a + tb$.

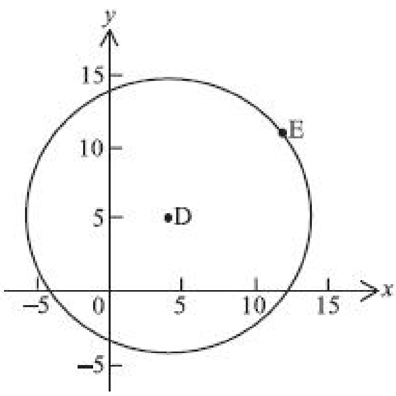
Nov 05 P2

Consider the point D with coordinates $(4, 5)$, and the point E, with coordinates $(12, 11)$.

(a) Find $\overrightarrow{DE}$.

(b) Find $\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

(c) The point D is the centre of a circle and E is on the circumference as shown in the following diagram.



The point G is also on the circumference. $\overrightarrow{DE}$ is perpendicular to $\overrightarrow{DG}$. Find the possible coordinates of G.

Nov 05 P2

Car 1 moves in a straight line, starting at point $A(0, 12)$. Its position p seconds after it starts is given by $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Find the position vector of the car after 2 seconds.

Car 2 moves in a straight line starting at point $B(14, 0)$. Its position q seconds after it starts is given by $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

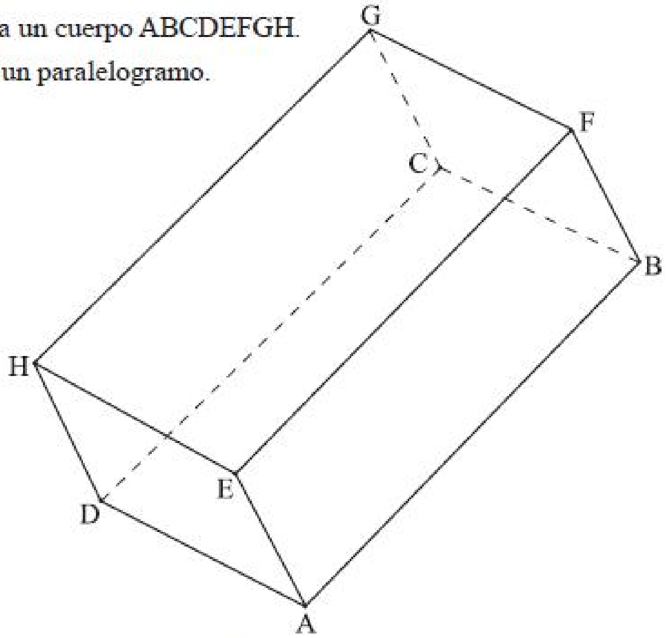
Cars 1 and 2 collide at point P.

(b) (i) Find the value of p and the value of q when the collision occurs.

(ii) Find the coordinates of P.

Mayo 06
P2

El siguiente diagrama muestra un cuerpo ABCDEFGH.
Cada una de las seis caras es un paralelogramo.



Las coordenadas de A y B son $A(7, -3, -5)$, $B(17, 2, 5)$.

(a) Halle

(i) $\vec{AB}$;

(ii) $\left|\vec{AB}\right|$.

Se proporciona la siguiente información.

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AD}\right| = 9, \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AE}\right| = 6$$

(b) (i) Calcule $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$.

(ii) Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

(iii) Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$.

(iv) A partir de lo anterior, escriba el tamaño del ángulo entre cualesquiera dos aristas que se cortan.

(c) Calcule el volumen del cuerpo ABCDEFGH.

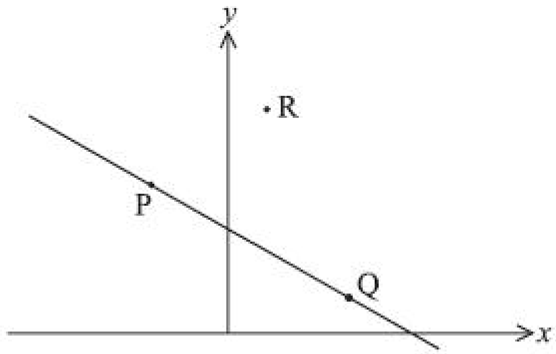
(d) Las coordenadas de G son $(9, 4, 12)$. Halle las coordenadas de H.

(e) Las rectas (AG) y (HB) se cortan en el punto P.

Dado que $\vec{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$, halle el ángulo agudo en P.

Mayo 06 P1

En el diagrama siguiente se muestran los puntos P$(-2, 4)$, Q$(3, 1)$ y R$(1, 6)$.



(a) Halle el vector $\overrightarrow{PQ}$.

(b) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por R y es paralela a la recta (PQ).

Mayo 06 P2

The position vector of point A is $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ and the position vector of point B is $4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}$.

(a) (i) Show that $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$.

(ii) Find the unit vector $\boldsymbol{u}$ in the direction of $\overrightarrow{AB}$.

(iii) Show that $\boldsymbol{u}$ is perpendicular to $\overrightarrow{OA}$.

Let S be the midpoint of [AB]. The line L_1 passes through S and is parallel to $\overrightarrow{OA}$.

(b) (i) Find the position vector of S.

(ii) Write down the equation of L_1.

The line L_2 has equation $\boldsymbol{r}=(5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})+s(-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$.

(c) Explain why L_1 and L_2 are not parallel.

(d) The lines L_1 and L_2 intersect at the point P. Find the position vector of P.

Muestra 06 P1

A triangle has its vertices at A$(-1, 3)$, B$(3, 6)$ and C$(-4, 4)$.

(a) Show that $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-9$.

(b) Show that, to three significant figures, $\cos B\hat{A}C=-0.569$.

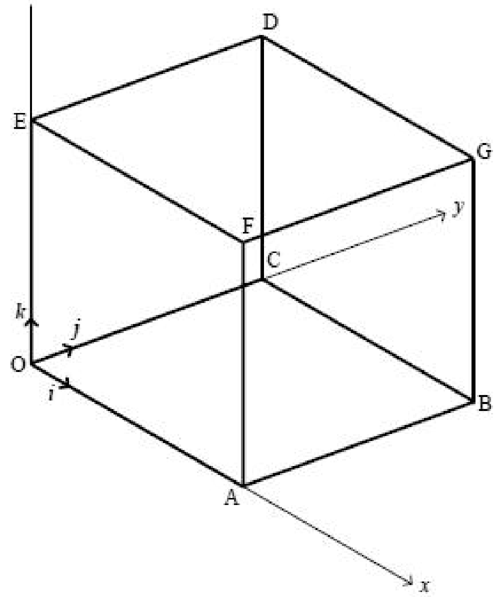
Muestra 06 P1

The diagram shows a cube, OABCDEFG where the length of each edge is 5cm. Express the following vectors in terms of $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{k}$.

(a) $\overrightarrow{OG}$;

(b) $\overrightarrow{BD}$;

(c) $\overrightarrow{EB}$.



Nov 06 P1

The line L passes through the points $A(3, 2, 1)$ and $B(1, 5, 3)$.

(a) Find the vector $\overrightarrow{AB}$.

(b) Write down a vector equation of the line L in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$

Nov 06 P1

The line L passes through $A(0, 3)$ and $B(1, 0)$. The origin is at O. The point $R(x, 3-3x)$ is on L, and (OR) is perpendicular to L.

(a) Write down the vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{OR}$.

(b) Use the scalar product to find the coordinates of R.

Mayo 07 P2

Points P and Q have position vectors $-5\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$ and $-4\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$ respectively, and both lie on a line L_1.

(a) (i) Find $\overrightarrow{PQ}$.

(ii) Hence show that the equation of L_1 can be written as

$$\boldsymbol{r} = (-5+s)\boldsymbol{i} + (11-2s)\boldsymbol{j} + (-8+3s)\boldsymbol{k}.$$

The point $R(2, y_1, z_1)$ also lies on L_1.

(b) Find the value of y_1 and of z_1.

The line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+13\boldsymbol{k}+t(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$.

(c) The lines L_1 and L_2 intersect at a point T. Find the position vector of T.

(d) Calculate the angle between the lines L_1 and L_2.

Mayo 07 P1

Considere los vectores $u = 2i + 3j - k$ y $v = 4i + j - pk$.

(a) Sabiendo que u es perpendicular a v, halle el valor de p.

(b) Sabiendo que $q|u| = 14$, halle el valor de q.

Mayo 07 P2

En esta pregunta, la distancia está en metros y el tiempo en minutos.

Dos aeroplanos están volando, ambos en línea recta.

A las 13:00 horas el primer aeroplano se encuentra en el punto $(3, 2, 7)$. Su vector de posición transcurridos t minutos viene dado por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(a) Halle la velocidad de este aeroplano.

A las 13:00 horas el segundo aeroplano se encuentra en el punto $(-5, 10, 23)$. Transcurridos dos minutos, se encuentra en el punto $(3, 16, 39)$.

(b) Compruebe que su vector de posición transcurridos t minutos viene dado por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(c) Los aeroplanos se encuentran en el punto Q.

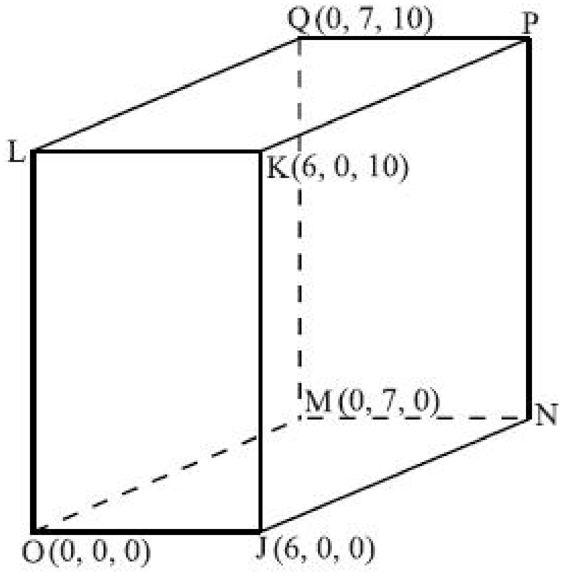
(i) ¿A qué hora se encuentran los aeroplanos?

(ii) Halle la posición de Q.

(d) Halle el ángulo θ que hay entre los caminos de los dos aeroplanos.

Nov 07 P2

The diagram below shows a cuboid (rectangular solid) OJKLMNPQ. The vertex O is (0, 0, 0), J is (6, 0, 0), K is (6, 0, 10), M is (0, 7, 0) and Q is (0, 7, 10).



(a) (i) Show that $\overrightarrow{JQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\overrightarrow{MK}$.

(b) An equation for the line (MK) is $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(i) Write down an equation for the line (JQ) in the form $r = a + tb$.

(ii) Find the acute angle between (JQ) and (MK).

(c) The lines (JQ) and (MK) intersect at D. Find the position vector of D.

Mayo 08 P1

Consider the points $A(1, 5, 4)$, $B(3, 1, 2)$ and $D(3, k, 2)$, with (AD) perpendicular to (AB).

(a) Find

(i) $\vec{AB}$;

(ii) $\vec{AD}$, giving your answer in terms of k.

(b) Show that $k = 7$.

The point C is such that $\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AD}$.

(c) Find the position vector of C.

(d) Find $\cos A\hat{B}C$.

Mayo 08 P2

Let $v = 3i + 4j + k$ and $w = i + 2j - 3k$. The vector $v + pw$ is perpendicular to w. Find the value of p.

Mayo 08 P2

The point O has coordinates $(0, 0, 0)$, point A has coordinates $(1, -2, 3)$ and point B has coordinates $(-3, 4, 2)$.

(a) (i) Show that $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $B\hat{A}O$.

(b) The line L_1 has equation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Write down the coordinates of two points on L_1.

(c) The line L_2 passes through A and is parallel to $\vec{OB}$.

(i) Find a vector equation for L_2, giving your answer in the form $r = a + tb$.

(ii) Point $C(k, -k, 5)$ is on L_2. Find the coordinates of C.

(d) The line L_3 has equation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, and passes through the point C.

Find the value of p at C.

Mayo 08 P2

The line L_1 is represented by $r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ and the line L_2 by $r_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

The lines L_1 and L_2 intersect at point T. Find the coordinates of T.

Muestra 06/08 P2

In this question, distance is in kilometers, time is in hours.
A balloon is moving at a constant height with a speed of $18\,\text{km h}^{-1}$, in the direction of the vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

At time $t = 0$, the balloon is at point B with coordinates $(0, 0, 5)$.

(a) Show that the position vector $\boldsymbol{b}$ of the balloon at time t is given by

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10.8 \\ 14.4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

At time $t = 0$, a helicopter goes to deliver a message to the balloon. The position vector $\boldsymbol{h}$ of the helicopter at time t is given by

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -48 \\ -24 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Write down the coordinates of the starting position of the helicopter.

(ii) Find the speed of the helicopter.

(c) The helicopter reaches the balloon at point R.

(i) Find the time the helicopter takes to reach the balloon.

Muestra 08 P1

Consider the points $A(5, 8)$, $B(3, 5)$ and $C(8, 6)$.

(a) Find

(i) $\overrightarrow{AB}$;

(ii) $\overrightarrow{AC}$.

(b) (i) Find $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

(ii) Find the sine of the angle between $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$.

Muestra 08 P1

Two lines L_1 and L_2 are given by $r_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ and $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Let θ be the acute angle between L_1 and L_2. Show that $\cos\theta = \frac{52}{140}$.

(b) (i) P is the point on L_1 when $s = 1$. Find the position vector of P.

(ii) Show that P is also on L_2.

(c) A third line L_3 has direction vector $\begin{pmatrix} 6 \\ x \\ -30 \end{pmatrix}$. If L_1 and L_3 are parallel, find the value of x.

Muestra 08 P2

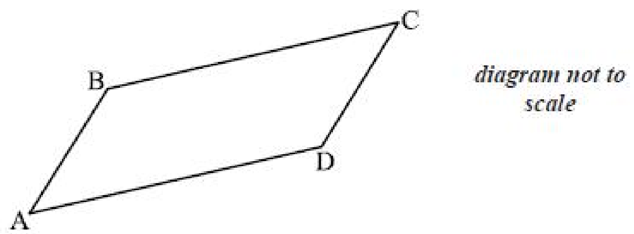
A triangle has its vertices at A(–1, 3) , B(3, 6) and C(–4, 4).

(a) Show that $\vec{AB} \bullet \vec{AC} = -9$.

(b) Find $B\hat{A}C$.

Nov 08 P2

The diagram shows a parallelogram ABCD.



The coordinates of A, B and D are A(1, 2, 3), B(6, 4, 4) and D(2, 5, 5).

(a) (i) Show that $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\vec{AD}$.

(iii) **Hence** show that $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Find the coordinates of point C.

(c) (i) Find $\vec{AB} \bullet \vec{AD}$.

(ii) **Hence** find angle A.

(d) Hence, or otherwise, find the area of the parallelogram.

Nov 08
P1

A particle is moving with a constant velocity along line L. Its initial position is $A(6, -2, 10)$. After one second the particle has moved to $B(9, -6, 15)$.

(a) (i) Find the velocity vector, $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Find the speed of the particle.

(b) Write down an equation of the line L.

Mayo 09
P1

The line L_1 is parallel to the z-axis. The point P has position vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and lies on L_1.

(a) Write down the equation of L_1 in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

The line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. The point A has position vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(b) Show that A lies on L_2.

Let B be the point of intersection of lines L_1 and L_2.

(c) (i) Show that $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\overrightarrow{AB}$.

(d) The point C is at $(2, 1, -4)$. Let D be the point such that ABCD is a parallelogram. Find $\overrightarrow{OD}$.

Mayo 09
P1

Find the cosine of the angle between the two vectors $3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ and $4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Mayo 09
P2

Two lines with equations $r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $r_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ intersect at the point P. Find the coordinates of P.

Mayo 09
P1

The vertices of the triangle PQR are defined by the position vectors

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ and } \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Find

(i) $\overrightarrow{PQ}$;

(ii) $\overrightarrow{PR}$.

(b) Show that $\cos R\hat{P}Q = \frac{1}{2}$.

(c) (i) Find $\sin R\hat{P}Q$.

(ii) Hence, find the area of triangle PQR, giving your answer in the form $a\sqrt{3}$

Nov 09
P2

Consider the points $P(2, -1, 5)$ and $Q(3, -3, 8)$. Let L_1 be the line through P and Q.

(a) Show that $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) The line L_1 may be represented by $r = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) What information does the vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ give about L_1?

(ii) Write down another vector representation for L_1 using $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

The point $T(-1, 5, p)$ lies on L_1.

(c) Find the value of p.

The point T also lies on L_2 with equation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ q \end{pmatrix}$.

(d) Show that $q = -3$.

(e) Let θ be the **obtuse** angle between L_1 and L_2. Calculate the size of θ.

Nov 09
P1

(a) Let $u=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ and $w=\begin{pmatrix}3\\-1\\p\end{pmatrix}$. Given that u is perpendicular to w, find the value of p.

(b) Let $v=\begin{pmatrix}1\\q\\5\end{pmatrix}$. Given that $|v|=\sqrt{42}$, find the possible values of q.

Mayo 10
TZ1
P1#10

The line L_1 is represented by the vector equation $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-25\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}2\\1\\-8\end{pmatrix}$.

A second line L_2 is parallel to L_1 and passes through the point $\mathrm{B}(-8,-5,25)$.

(a) Write down a vector equation for L_2 in the form $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$.

A third line L_3 is perpendicular to L_1 and is represented by $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-7\\-2\\k\end{pmatrix}$.

(b) Show that $k=-2$.

The lines L_1 and L_3 intersect at the point A.

(c) Find the coordinates of A.

The lines L_2 and L_3 intersect at point C where $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}6\\3\\-24\end{pmatrix}$.

(d) (i) Find $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(ii) Hence, find $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$.

Mayo 10
TZ2
P1#2

Sean $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$.

(a) Halle $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

(b) Halle un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(c) Compruebe que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Mayo 10
TZ2
P2#9

En esta pregunta, las distancias vienen dadas en metros.

Los aviones de juguete vuelan en línea recta y a velocidad constante. El Avión 1 pas por un punto A. Su posición, p segundos después de haber pasado por A, viene dad por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Escriba las coordenadas de A.

(ii) Halle la velocidad del avión en ms^{-1}.

(b) Después de siete segundos, el avión pasa por un punto B.

(i) Halle las coordenadas de B.

(ii) Halle la distancia que ha recorrido el avión durante estos siete segundos.

(c) El Avión 2 pasa por un punto C. Su posición, q segundos después de pasar por C, viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

El ángulo que forman las direcciones de vuelo del Avión 1 y del Avión 2 es de $40°$. Halle los dos valores de a.

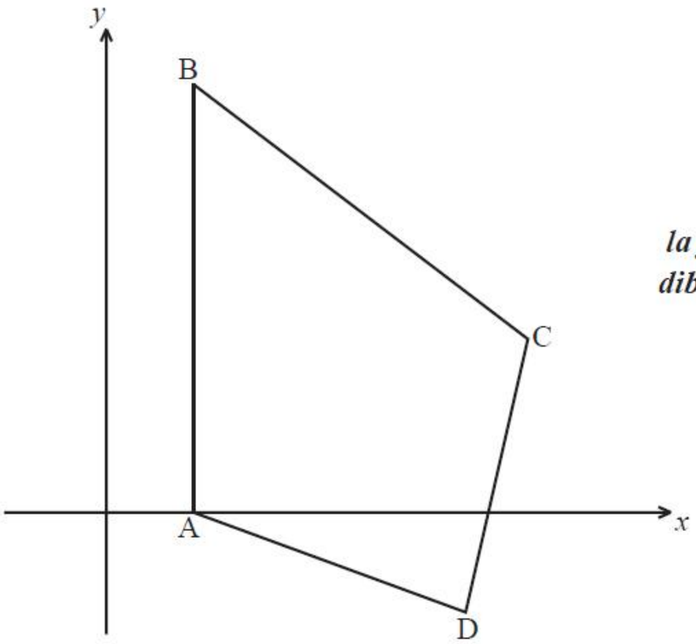
Nov 10
P2#4

Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, para $k > 0$. El ángulo que forman $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es igual a $\frac{\pi}{3}$.

Halle el valor de k.

Nov 10 P1#8

La figura muestra un cuadrilátero ABCD de vértices $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 5)$, $\mathrm{C}(5, 2)$ y $\mathrm{D}(4, -1)$.



la figura no está dibujada a escala

(a) (i) Compruebe que $\vec{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Halle $\vec{\mathrm{BD}}$.

(iii) Compruebe que $\vec{\mathrm{AC}}$ es perpendicular a $\vec{\mathrm{BD}}$.

La recta (AC) tiene por ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$.

(b) (i) Escriba el vector $\boldsymbol{u}$ y el vector $\boldsymbol{v}$.

(ii) Halle una ecuación vectorial para la recta (BD).

Las rectas (AC) y (BD) se cortan en el punto $\mathrm{P}(3, k)$.

(c) Compruebe que $k = 1$.

(d) **A partir de lo anterior** halle el área del triángulo ACD.

Mayo 11 TZ1 P1#2

A line L passes through $A(1, -1, 2)$ and is parallel to the line $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Write down a vector equation for L in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

The line L passes through point P when $t = 2$.

(b) Find

(i) $\overrightarrow{OP}$;

(ii) $|\overrightarrow{OP}|$.

Mayo 11 TZ1 P2#9

The following diagram shows the obtuse-angled triangle ABC such that $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

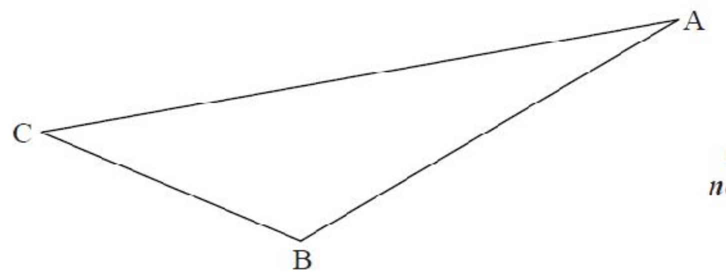


diagram not to scale

(a) (i) Write down $\overrightarrow{BA}$.

(ii) Find $\overrightarrow{BC}$.

(b) (i) Find $\cos A\hat{B}C$.

(ii) Hence, find $\sin A\hat{B}C$.

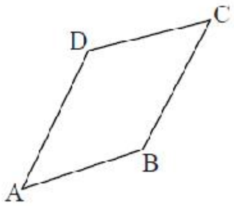
The point D is such that $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ p \end{pmatrix}$, where $p > 0$.

(c) (i) Given that $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{50}$, show that $p = 3$.

(ii) Hence, show that $\overrightarrow{CD}$ is perpendicular to $\overrightarrow{BC}$.

Mayo 11 TZ2 P1#3

La siguiente figura muestra el cuadrilátero ABCD, en el que $\vec{AD} = \vec{BC}$, $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.



la figura no está dibujada a escala

(a) Halle $\vec{BC}$.

(b) Compruebe que $\vec{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Compruebe que los vectores $\vec{BD}$ y $\vec{AC}$ son perpendiculares entre sí.

Mayo 11 TZ2 P2#8

La recta L_1 pasa por los puntos $A(1, -1, 4)$ y $B(2, -2, 5)$.

(a) Halle $\vec{AB}$.

(b) Halle una ecuación para L_1, de la forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

La recta L_2 tiene por ecuación $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Halle el ángulo que forman L_1 y L_2.

(d) Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto C. Halle las coordenadas de C.

Nov 11 P1#8

La recta L_1 pasa por los puntos $P(2, 4, 8)$ y $Q(4, 5, 4)$.

(a) (i) Halle $\vec{PQ}$.

(ii) A partir de lo anterior, escriba una ecuación vectorial para L_1 que sea de la forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$.

La recta L_2 es perpendicular a L_1, y paralela a $\begin{pmatrix} 3p \\ 2p \\ 4 \end{pmatrix}$, donde $p \in \mathbb{Z}$.

(b) (i) Halle el valor de p.

(ii) Sabiendo que L_2 pasa por $R(10, 6, -40)$, escriba una ecuación vectorial para L_2.

(c) Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto A. Halle la coordenada x de A.

Mayo 12
TZ1
P1#8

A line L_1 passes though points $P(-1, 6, -1)$ and $Q(0, 4, 1)$.

(a) (i) Show that $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Hence, write down an equation for L_1 in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

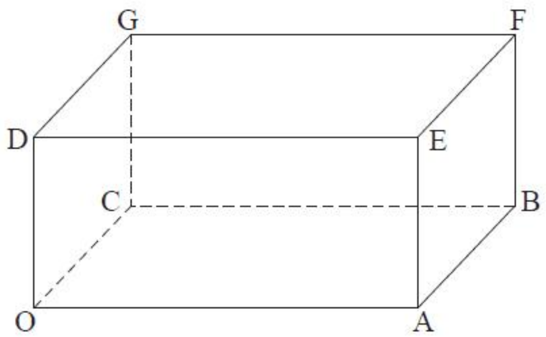
A second line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(b) Find the cosine of the angle between $\overrightarrow{PQ}$ and L_2.

(c) The lines L_1 and L_2 intersect at the point R. Find the coordinates of R.

Mayo 12
TZ2
P2#8

La siguiente figura muestra el ortoedro (sólido rectangular) OABCDEFG, donde O es el origen, y $\overrightarrow{OA} = 4\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OC} = 3\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OD} = 2\boldsymbol{k}$.



(a) (i) Halle $\overrightarrow{OB}$.

(ii) Halle $\overrightarrow{OF}$.

(iii) Compruebe que $\overrightarrow{AG} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

(b) Escriba una ecuación vectorial para

(i) la recta OF;

(ii) la recta AG.

(c) Halle el ángulo obtuso que forman las rectas OF y AG.

Nov 12
P1#6

La recta L pasa por el punto $(5,-4,10)$ y es paralela al vector $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba una ecuación vectorial para la recta L.

(b) La recta L corta al eje x en el punto P. Halle la coordenada x del P.

Nov 12
P1#9

Sean A y B puntos tales que $\vec{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Compruebe que $\vec{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sean C y D puntos tales que ABCD sea un **rectángulo**.

(b) Sabiendo que $\vec{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 4 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$, compruebe que $p = 3$.

(c) Halle las coordenadas del punto C.

(d) Halle el área del rectángulo ABCD.

Mayo 13
TZ1
P1#1

Consider the vectors $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Find

(i) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$;

(ii) $|2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

Let $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, where $\boldsymbol{0}$ is the zero vector.

(b) Find $\boldsymbol{c}$.

Mayo 13 TZ1 P1#8

Consider points $A(1,-2,-1)$, $B(7,-4,3)$ and $C(1,-2,3)$. The line L_1 passes through C and is parallel to $\vec{AB}$.

(a) (i) Find $\vec{AB}$.

(ii) Hence, write down a vector equation for L_1.

A second line, L_2, is given by $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\15\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-3\\p\end{pmatrix}$.

(b) Given that L_1 is perpendicular to L_2, show that $p=-6$.

(c) The line L_1 intersects the line L_2 at point Q. Find the x-coordinate of Q.

Mayo 13 TZ2 P2#4

La recta L_1 tiene por ecuación $\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}10\\6\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-5\\-2\end{pmatrix}$ y la recta L_2 tiene por ecuación $\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$.

Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto A. Halle las coordenadas de A.

Mayo 13 TZ2 P2#8

Considere los puntos $A(5,2,1)$, $B(6,5,3)$, y $C(7,6,a+1)$, donde $a\in\mathbb{R}$.

(a) Halle

(i) $\vec{AB}$;

(ii) $\vec{AC}$.

Sea θ el ángulo que forman $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

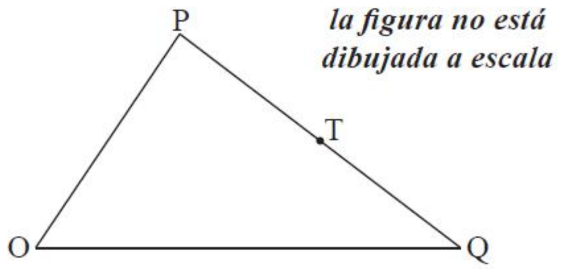
(b) Halle el valor de a para el cual $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

(c) (i) Compruebe que $\cos\theta=\dfrac{2a+14}{\sqrt{14a^2+280}}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de a para el cual $\theta=1,2$.

Nov 13 P1#1

En la siguiente figura, $\vec{OP} = \boldsymbol{p}$, $\vec{OQ} = \boldsymbol{q}$ y $\vec{PT} = \frac{1}{2}\vec{PQ}$.



Exprese cada uno de los siguientes vectores en función de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$;

(a) $\vec{QP}$;

(b) $\vec{OT}$.

Nov 13 P2#9

Considere las rectas L_1 y L_2, cuyas ecuaciones son $L_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Las rectas se cortan en el punto P.

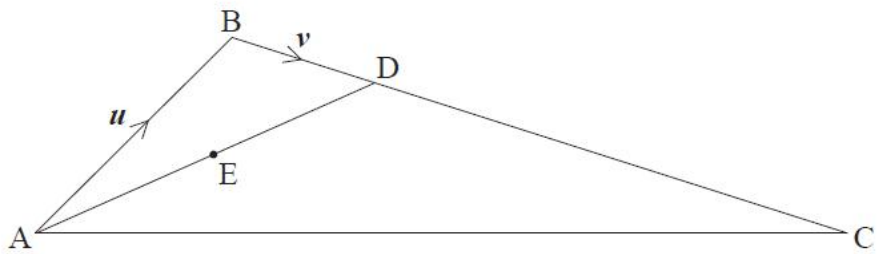
(a) Halle las coordenadas de P.

(b) Compruebe que las rectas son perpendiculares entre sí.

(c) El punto $Q(7, 5, 3)$ pertenece a L_1. El punto R es el punto simétrico de Q respecto a la recta L_2. Halle las coordenadas de R.

Muestra 14 P1#1

In the following diagram, $\boldsymbol{u} = \vec{AB}$ and $\boldsymbol{v} = \vec{BD}$.



The midpoint of $\vec{AD}$ is E and $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$.

Express each of the following vectors in terms of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.

(a) $\vec{AE}$

(b) $\vec{EC}$

Muestra 14 P2#4

Consider the lines L_1, L_2, L_3, and L_4, with respective equations.

$$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} \qquad L_4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Write down the line which is parallel to L_4.

(b) Write down the position vector of the point of intersection of L_1 and L_2.

(c) Given that L_1 is perpendicular to L_3, find the value of a.

Mayo 14 TZ2 P1#4

La recta L es paralela al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Halle la pendiente de la recta L.

La recta L pasa por el punto $(9, 4)$.

(b) Halle la ecuación de la recta L de la forma $y = ax + b$.

(c) Escriba una ecuación vectorial para la recta L.

Mayo 14 TZ2 P1#9

En esta pregunta, las distancias vienen dadas en metros.

Ryan y Jack tienen aviones en miniatura (de aeromodelismo), que despegan en terreno llano. El avión de Jack despega después del de Ryan.

La posición del avión de Ryan t segundos después de despegar viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Halle la celeridad del avión de Ryan.

(b) Halle la altura del avión de Ryan al cabo de dos segundos.

La posición del avión de Jack s segundos después de despegar viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -39 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(c) Muestre que las trayectorias de los aviones son perpendiculares entre sí.

Los dos aviones colisionan se chocan en el punto $(-23, 20, 28)$.

(d) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que despegó el avión de Ryan hasta que despegó el avión de Jack?

Mayo 14 TZ1 P1#8

The line L_1 passes through the points $A(2, 1, 4)$ and $B(1, 1, 5)$.

(a) Show that $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Hence, write down

(i) a direction vector for L_1;

(ii) a vector equation for L_1.

Another line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. The lines L_1 and L_2 intersect at the point P.

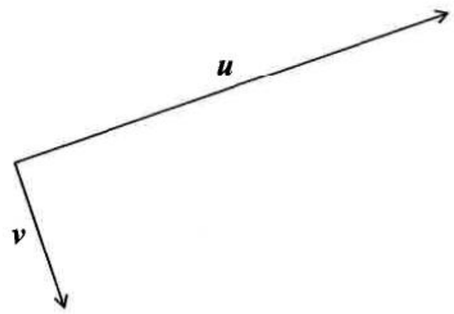
(c) Find the coordinates of P.

(d) (i) Write down a direction vector for L_2.

(ii) Hence, find the angle between L_1 and L_2.

Mayo 14 TZ1 P1#8

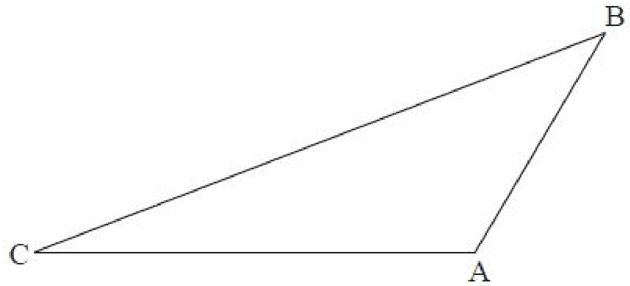
The following diagram shows two perpendicular vectors $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.



(a) Let $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Represent $\boldsymbol{w}$ on the diagram above.

(b) Given that $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ n \\ 3 \end{pmatrix}$, where $n \in \mathbb{Z}$, find n.

Nov 14 P1#7



Sean $\vec{AB} \bullet \vec{AC} = -5\sqrt{3}$ y $\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right| = 10$. Halle el área del triángulo ABC.

Nov 14 P1#10

Sea L_x una familia de rectas cuya ecuación viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ \frac{2}{x} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x^2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donde $x > 0$.

(a) Escriba la ecuación de L_1.

Una recta L_a corta al eje y en un punto P.

(b) Muestre que P tiene por coordenadas $\left(0, \frac{4}{a}\right)$.

La recta L_a corta al eje x en $\mathrm{Q}(2a, 0)$. Sea $d = \mathrm{PQ}^2$.

(c) Muestre que $d = 4a^2 + \frac{16}{a^2}$.

(d) Existe un valor mínimo para d. Halle el valor de a que da este valor mínimo.

Mayo 15 TZ1 P1#8

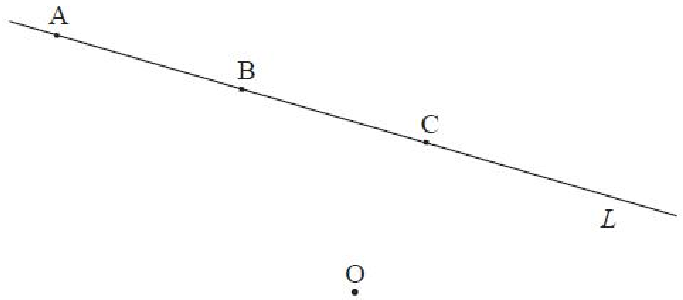
A line L passes through points $\mathrm{A}(-2, 4, 3)$ and $\mathrm{B}(-1, 3, 1)$.

(a) (i) Show that $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

(b) Find a vector equation for L.

The following diagram shows the line L and the origin O. The point C also lies on L.



Point C has position vector $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Show that $y = 2$.

(d) (i) Find $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(ii) Hence, write down the size of the angle between OC and L.

(e) Hence or otherwise, find the area of triangle OAB.

Mayo 15 TZ2 P1#9

Las coordenadas de P y Q son $(1, 0, 2)$ y $(-11, 8, m)$ respectivamente.

(a) Exprese $\overrightarrow{PQ}$ en función de m.

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores perpendiculares, donde $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Halle n.

(c) Sabiendo que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\boldsymbol{b}$,

(i) exprese $\overrightarrow{PQ}$ en función de $\boldsymbol{b}$;

(ii) a partir de lo anterior, halle m.

En el apartado (d), la distancia está en metros y el tiempo está en segundos.

(d) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por Q, de modo tal que su posición viene dada por $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} + t\boldsymbol{a}$.

(i) Escriba un posible vector $\boldsymbol{c}$.

(ii) Halle la celeridad de la partícula.

Mayo 15 TZ2 P2#2

Sean $\boldsymbol{u} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

(a) Halle

(i) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$;

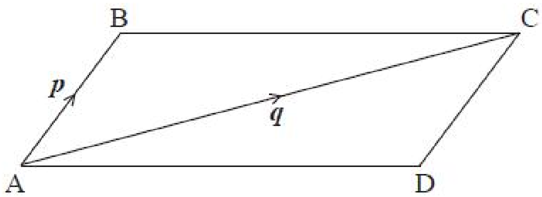
(ii) $|\boldsymbol{u}|$;

(iii) $|\boldsymbol{v}|$.

(b) Halle el ángulo que forman $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Nov 15 P1#2

The following diagram shows the parallelogram ABCD.



Let $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}$ and $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{q}$. Find each of the following vectors in terms of $\boldsymbol{p}$ and/or $\boldsymbol{q}$.

(a) $\overrightarrow{CB}$

(b) $\overrightarrow{CD}$

(c) $\overrightarrow{DB}$

Nov 15 P1#9

A line L_1 passes through the points $A(0, -3, 1)$ and $B(-2, 5, 3)$.

(a) (i) Show that $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Write down a vector equation for L_1.

A line L_2 has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. The lines L_1 and L_2 intersect at a point C.

(b) Show that the coordinates of C are $(-1, 1, 2)$.

(c) A point D lies on line L_2 so that $\left|\vec{CD}\right| = \sqrt{18}$ and $\vec{CA} \bullet \vec{CD} = -9$. Find $A\hat{C}D$.

Mayo 16 TZ2 P1#7

Sean $\boldsymbol{u} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$, donde $m, n \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $\boldsymbol{v}$ es un vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{u}$, halle los posibles valores de m y de n.

Mayo 16 TZ2 P2#10

Considere los puntos $A(1, 5, -7)$ y $B(-9, 9, -6)$.

(a) Halle $\vec{AB}$.

Sea C un punto tal que $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Halle las coordenadas de C.

La recta L pasa por B y es paralela a (AC).

(c) Escriba una ecuación vectorial para L.

(d) Sabiendo que $\left|\vec{AB}\right| = k\left|\vec{AC}\right|$, halle k.

(e) El punto D pertenece a L, de modo tal que $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{BD}\right|$. Halle las posibles coordenadas de D.

Nov 16 P1#4

The position vectors of points P and Q are $\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ and $7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ respectively.

(a) Find a vector equation of the line that passes through P and Q.

(b) The line through P and Q is perpendicular to the vector $2\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{k}$. Find the value of n.

Nov 16
P1#8

Let $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ and $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Find $\vec{AB}$.

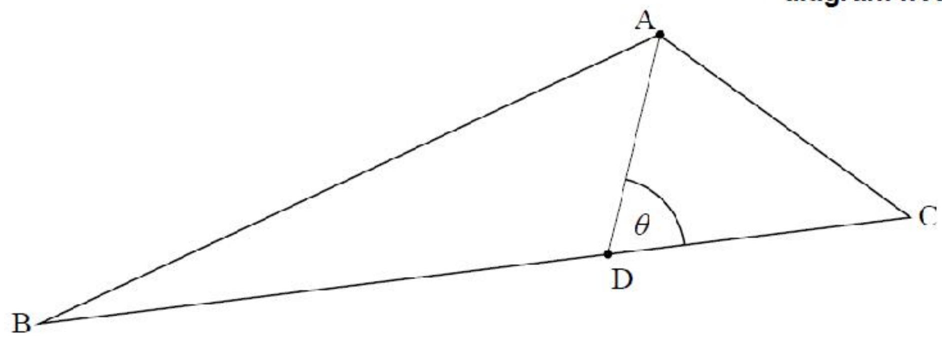
(ii) Find $\left|\vec{AB}\right|$.

The point C is such that $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Show that the coordinates of C are $(-2, 1, 3)$.

The following diagram shows triangle ABC. Let D be a point on [BC], with acute angle $\text{ADC} = \theta$.

diagram not to scale



(c) Write down an expression in terms of θ for

(i) angle ADB;

(ii) area of triangle ABD.

(d) Given that $\dfrac{\text{area } \Delta\text{ABD}}{\text{area } \Delta\text{ACD}} = 3$, show that $\dfrac{\text{BD}}{\text{BC}} = \dfrac{3}{4}$.

(e) Hence or otherwise, find the coordinates of point D.