Geometría Analítica en exámenes BI – NM (Selección)

Mayo 03 P1

Sean los vectores $c = 3i + 4j$ y $d = 5i - 12j$.

(a) Calcule el producto escalar $c \cdot d$.

(b) Calcule la proyección escalar del vector c en la dirección del vector d.

Nov 03 P1

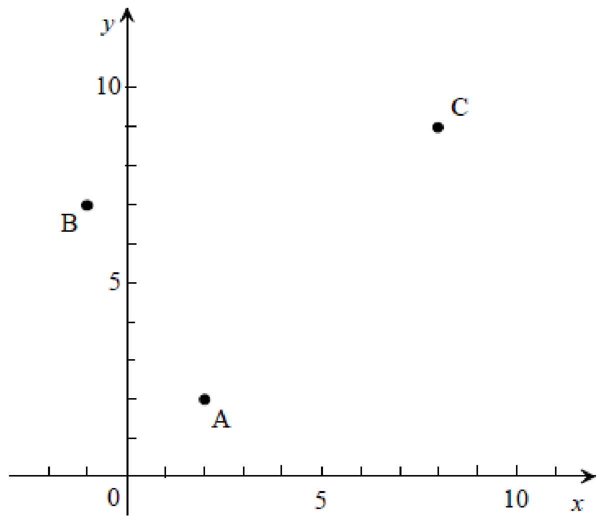
Una ecuación vectorial de la recta L es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

¿Cuáles de las siguientes son también ecuaciones vectoriales de la misma recta L?

A. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ B. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ C. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ D. $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nov 03 P2

Los puntos A, B y C señalados en la siguiente figura son tres de los vértices de un paralelogramo ABCD. El vector de posición del punto A es $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



(a) Escriba el vector de posición de B y el de C.

(b) El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 4 \end{pmatrix}$. Halle d.

(c) Halle $\overrightarrow{BD}$.

La recta L pasa por B y D.

(d) (i) Escriba una ecuación vectorial de L en la forma
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

(ii) Calcule el valor de t en el punto B.

(e) Sea P el punto (7 , 5). Tras encontrar el valor de t en P, compruebe que P pertenece a la recta L.

(f) Compruebe que $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BD}$.

Mayo 04
P2

Los vectores de posición de los puntos A y B son $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivamente.

(a) (i) Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Halle $|\overrightarrow{AB}|$.

El vector de posición del punto D es $\begin{pmatrix} d \\ 22 \end{pmatrix}$.

(b) Halle el vector $\overrightarrow{AD}$ en función de d.

El ángulo $B\hat{A}D$ es de $90°$.

(c) (i) Compruebe que $d = 9$.

(ii) Escriba el vector de posición del punto D.

El cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

(d) Halle el vector de posición del punto C.

(e) Halle el área del rectángulo ABCD.

Nov 04
P2

Los puntos A, B y C tienen vectores de posición $4i + 2j$, $i - 3j$ y $-5i - 5j$. Sea D un punto sobre el eje x tal que ABCD forma un paralelogramo.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{BC}$.

(ii) Halle el vector de posición de D.

(b) Halle el ángulo que forman $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$.

La recta L_1 pasa por A y es paralela a $i + 4j$. La recta L_2 pasa por B y es paralela a $2i + 7j$. Una ecuación vectorial de L_1 es $r = (4i + 2j) + s(i + 4j)$.

(c) Escriba una ecuación vectorial de L_2 en la forma $r = b + tq$.

(d) Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto P. Halle el vector de posición de P.

Mayo 05
P1

Considere la recta L de ecuación $y + 2x = 3$. La recta L_1 es paralela a L y pasa por el punto $(6, -4)$.

(a) Halle la pendiente de L_1.

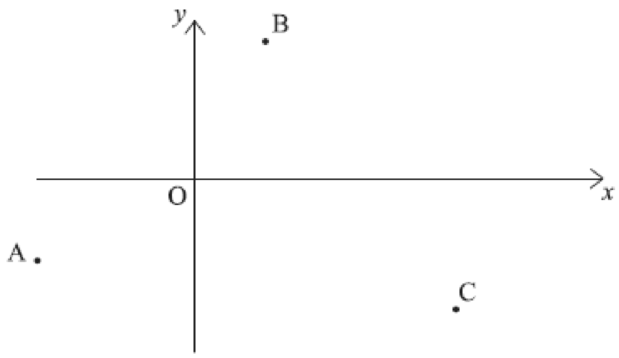
(b) Halle la ecuación de L_1 en la forma $y = mx + b$.

(c) Halle la abscisa, x, del punto donde la recta L_1 corta al eje x.

Mayo 05
P2

En esta pregunta el vector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el este, y el vector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ representa un desplazamiento de 1 km hacia el norte.

La siguiente figura muestra la posición de las ciudades A, B y C respecto a un aeropuerto O, situado en el punto (0, 0). Un avión vuela sobre las tres ciudades a una velocidad constante de $250\ \text{km h}^{-1}$.



La ciudad A se encuentra a 600 km al oeste y 200 km al sur del aeropuerto.
La ciudad B se encuentra a 200 km al este y 400 km al norte del aeropuerto.
La ciudad C se encuentra a 1 200 km al este y 350 km al sur del aeropuerto.

(a) (i) Halle $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Compruebe que el vector de longitud una unidad en la dirección de $\overrightarrow{AB}$ es $\begin{pmatrix}0,8\\0,6\end{pmatrix}$.

A las 12:00 h, un avión sobrevuela la ciudad A dirigiéndose hacia la ciudad B a una velocidad de $250\ \text{km h}^{-1}$.

Sea $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ el vector velocidad del avión. Sea t el número de horas que permanece volando a partir de las 12:00 h. La posición del avión puede venir dada por la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-600\\-200\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}.$$

(b) (i) Compruebe que el vector velocidad es $\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}$.

(ii) Halle la posición del avión a las 13:00 h.

(iii) ¿A qué hora sobrevolará el avión la ciudad B?

Cuando sobrevuela la ciudad B, el avión cambia su dirección para volar hacia la ciudad C. Recorrer los 1 250 km entre B y C le lleva cinco horas. Al sobrevolar la ciudad A, el piloto observó que le quedaban 17 000 litros de combustible. El avión consume 1 800 litros de combustible por hora cuando viaja a $250\ \text{km h}^{-1}$. Cuando el combustible del depósito desciende por debajo de los 1 000 litros, se enciende una señal luminosa.

(c) ¿A qué distancia de la ciudad C se encontrará el avión cuando se encienda la señal luminosa?

Nov 05 P1

A boat B moves with constant velocity along a straight line. Its velocity vector is given by $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

At time $t = 0$ it is at the point $(-2, 1)$.

(a) Find the magnitude of v.

(b) Find the coordinates of B when $t = 2$.

(c) Write down a vector equation representing the position of B, giving your answer in the form $r = a + tb$.

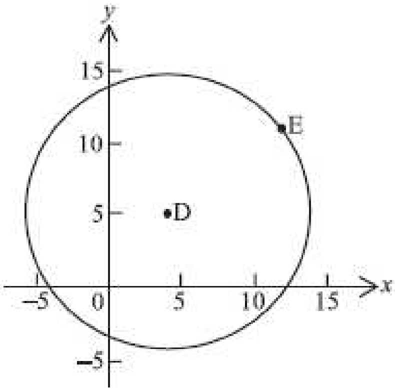
Nov 05 P2

Consider the point D with coordinates $(4, 5)$, and the point E, with coordinates $(12, 11)$.

(a) Find $\overrightarrow{DE}$.

(b) Find $\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

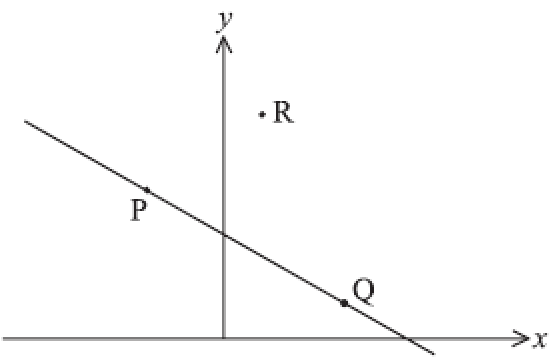
(c) The point D is the centre of a circle and E is on the circumference as shown in the following diagram.



The point G is also on the circumference. $\overrightarrow{DE}$ is perpendicular to $\overrightarrow{DG}$. Find the possible coordinates of G.

Mayo 06 P1

En el diagrama siguiente se muestran los puntos $P(-2, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(1, 6)$.



(a) Halle el vector $\overrightarrow{PQ}$.

(b) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por R y es paralela a la recta (PQ).

Mayo 06 P2

The position vector of point A is $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ and the position vector of point B is $4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}$.

(a) (i) Show that $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$.

(ii) Find the unit vector $\boldsymbol{u}$ in the direction of $\overrightarrow{AB}$.

(iii) Show that $\boldsymbol{u}$ is perpendicular to $\overrightarrow{OA}$.

Let S be the midpoint of [AB]. The line L_1 passes through S and is parallel to $\overrightarrow{OA}$.

(b) (i) Find the position vector of S.

(ii) Write down the equation of L_1.

The line L_2 has equation $\boldsymbol{r}=(5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k})+s(-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$.

(c) Explain why L_1 and L_2 are not parallel.

(d) The lines L_1 and L_2 intersect at the point P. Find the position vector of P.

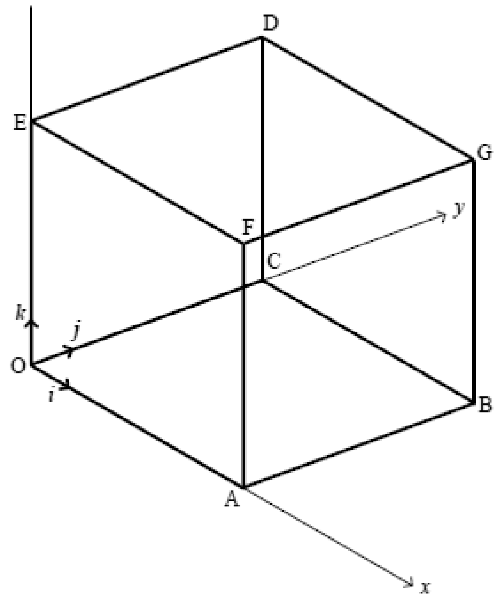
Muestra 06 P1

The diagram shows a cube, OABCDEFG where the length of each edge is 5cm. Express the following vectors in terms of $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{k}$.

(a) $\overrightarrow{OG}$;

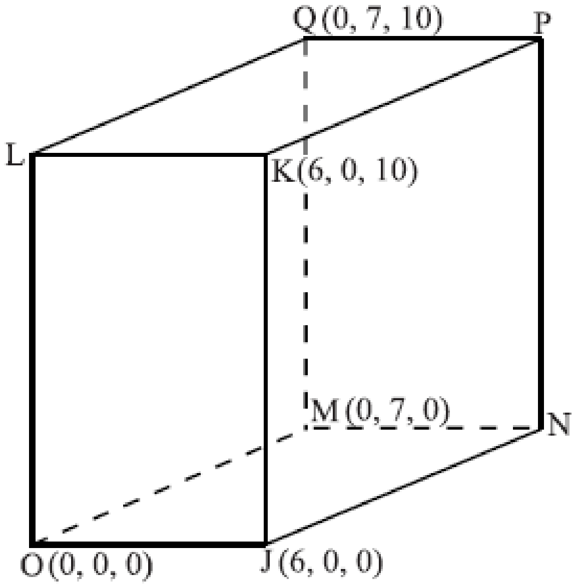
(b) $\overrightarrow{BD}$;

(c) $\overrightarrow{EB}$.



Nov 07 P2

The diagram below shows a cuboid (rectangular solid) OJKLMNPQ. The vertex O is $(0, 0, 0)$, J is $(6, 0, 0)$, K is $(6, 0, 10)$, M is $(0, 7, 0)$ and Q is $(0, 7, 10)$.



(a) (i) Show that $\overrightarrow{JQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\overrightarrow{MK}$.

(b) An equation for the line (MK) is $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(i) Write down an equation for the line (JQ) in the form $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

(ii) Find the acute angle between (JQ) and (MK).

(c) The lines (JQ) and (MK) intersect at D. Find the position vector of D.

Mayo 08 P2

Let $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$. The vector $\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{w}$ is perpendicular to $\boldsymbol{w}$. Find the value of p.

Muestra 06/08 P2

In this question, distance is in kilometers, time is in hours.

A balloon is moving at a constant height with a speed of $18\,\text{km h}^{-1}$, in the direction of the vector $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$.

At time $t=0$, the balloon is at point B with coordinates $(0, 0, 5)$.

(a) Show that the position vector b of the balloon at time t is given by

$$b=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10.8\\14.4\\0\end{pmatrix}.$$

At time $t=0$, a helicopter goes to deliver a message to the balloon. The position vector h of the helicopter at time t is given by

$$h=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}49\\32\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-48\\-24\\6\end{pmatrix}.$$

(b) (i) Write down the coordinates of the starting position of the helicopter.

(ii) Find the speed of the helicopter.

(c) The helicopter reaches the balloon at point R.

(i) Find the time the helicopter takes to reach the balloon.

Nov 08 P2

The diagram shows a parallelogram ABCD.

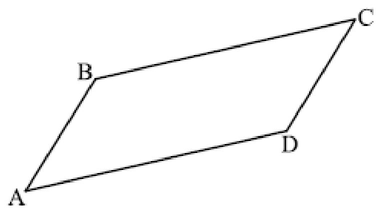


diagram not to scale

The coordinates of A, B and D are $A(1, 2, 3)$, $B(6, 4, 4)$ and $D(2, 5, 5)$.

(a) (i) Show that $\vec{AB}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$.

(ii) Find $\vec{AD}$.

(iii) **Hence** show that $\vec{AC}=\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}$.

(b) Find the coordinates of point C.

(c) (i) Find $\vec{AB}\bullet\vec{AD}$.

(ii) **Hence** find angle A.

(d) Hence, or otherwise, find the area of the parallelogram.

Nov 08
P1

A particle is moving with a constant velocity along line L. Its initial position is $A(6, -2, 10)$. After one second the particle has moved to $B(9, -6, 15)$.

(a) (i) Find the velocity vector, $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Find the speed of the particle.

(b) Write down an equation of the line L.

Nov 09
P2

Consider the points $P(2, -1, 5)$ and $Q(3, -3, 8)$. Let L_1 be the line through P and Q.

(a) Show that $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) The line L_1 may be represented by $r = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) What information does the vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ give about L_1?

(ii) Write down another vector representation for L_1 using $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

The point $T(-1, 5, p)$ lies on L_1.

(c) Find the value of p.

The point T also lies on L_2 with equation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ q \end{pmatrix}$.

(d) Show that $q = -3$.

(e) Let θ be the obtuse angle between L_1 and L_2. Calculate the size of θ.

Mayo 10
P1

Sean $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Halle $\overrightarrow{BC}$.

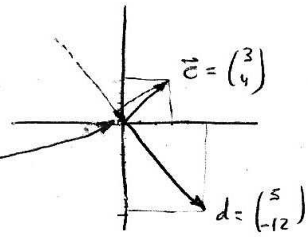
(b) Halle un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$.

(c) Compruebe que $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$.

M03
P1

a) $\vec{c}\cdot\vec{d} = 3\cdot 5 + 4\cdot(-12) = 15-48 = \boxed{-33}$

b) $\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|} = \dfrac{-33}{\sqrt{25+144}} = -\dfrac{33}{13}$



Nov03
P1

$L: \ \vec{r} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

A: No es la misma recta porque $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ no son vectores paralelos

$\boxed{B}$: Sí " " " " porque $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ son vectores paralelos y pasan por el mismo punto $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

C: No es la misma recta porque $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ no son vectores paralelos.

$\boxed{D}$: Sí es " " " " tienen el mismo vector director $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ y el punto $\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ pertenece a la 1ª recta (para $t=1$)

Nov 03
P2

a) $\vec{OA} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$

b) $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8+1\\9-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{d=11}$

c) $\vec{BD} = \begin{pmatrix}11+1\\4-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$

d) $L: \ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{t=0}$

e) $\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 7=-1-12t \\ 5=7+3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12t=-8 \rightarrow t=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3} \\ -3t=2 \rightarrow t=-\frac{2}{3} \end{cases}$ ✓

f) $\vec{CP} = \begin{pmatrix}7-8\\5-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{BD} = \begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{CP}\cdot\vec{BD} = -1\cdot 12 + (-4)\cdot(-3) = -12+12 = 0$ ✓

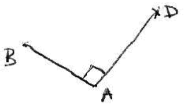
M04 P2

a) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-5)^2+1^2} = \boxed{\sqrt{26}}$

b) $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}d\\22\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}d-4\\25\end{pmatrix}}$

c)



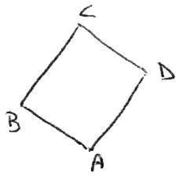
$B\hat{A}D = 90° \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}d-4\\25\end{pmatrix} = 0$

$-5d+20+25=0$

$\boxed{d=9}$ ✓

$\vec{OD} = \boxed{\begin{pmatrix}9\\22\end{pmatrix}}$

d)



$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{AB} = \begin{pmatrix}9\\22\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\23\end{pmatrix}}$

Area $\overline{ABCD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix}5\\25\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AD}| = \sqrt{5^2+25^2} = \sqrt{650}$

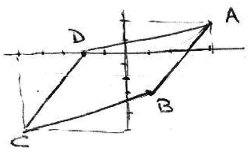
Area $\overline{ABCD} = \sqrt{26} \cdot \sqrt{650} = \boxed{130}$

N04 P2

a) $\vec{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{OB} = \vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{OC} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$



$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} =$

$= -5\vec{i} - 5\vec{j} + (4\vec{i}+2\vec{j}) - (\vec{i}-3\vec{j}) =$

$= \boxed{-2\vec{i}}$

b) $\vec{BD} = -2\vec{i} - (\vec{i}-3\vec{j}) = -3\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{AC} = (-5\vec{i}-5\vec{j}) - (4\vec{i}+2\vec{j}) = -9\vec{i} - 7\vec{j}$

$\cos\alpha = \frac{\vec{BD}\cdot\vec{AC}}{|\vec{BD}|\,|\vec{AC}|} = \frac{(-3)\cdot(-9)+3\cdot(-7)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\,\sqrt{(-9)^2+(-7)^2}} = \frac{6}{\sqrt{260}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 75°}$

c) $L_2: \boxed{\vec{r} = (\vec{i}-3\vec{j}) + t\cdot(2\vec{i}+7\vec{j})}$

$L_1: \vec{r} = (4\vec{i}+2\vec{j}) + s\cdot(\vec{i}+4\vec{j})$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+7t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4+s \\ y = 2+4s \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 1+2t = 4+s \\ -3+7t = 2+4s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t-s=3 & (\times 4) \\ 7t-4s=5 & (\times -1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8t-4s=12 \\ -7t+4s=-5 \end{cases}$

$t = 7 \Rightarrow 14-s=3\ ;\ s=11$

$\Downarrow$ $x = 1+14 = 15$, $y = -3+49 = 46$ ✓ $\Downarrow$ $x = 4+11 = 15$, $y = 2+44 = 46$

$P(15, 46)$

$\boxed{\vec{OP} = 15\vec{i} + 46\vec{j}}$

M05 P1

$L: y+2x=3 \rightarrow y=-2x+3$

a) $L_1 \parallel L \Rightarrow$ pendiente L_1 = pendiente $L = \boxed{-2}$

b) $L_1: y = -2x+b$

$(6,-4) \in L_1 \Rightarrow -4 = -2\cdot 6+b \Rightarrow b=8$ $\quad \boxed{L_1: y=-2x+8}$

c) $y=0 \rightarrow 0=-2x+8\ ;\ \boxed{x=4}$

M05 P2

$\vec{OA} = \begin{pmatrix}-600\\-200\end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix} \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix}1200\\-350\end{pmatrix}$

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}200+600\\400+200\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}800\\600\end{pmatrix}}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{640000+360000} = 1000 \longrightarrow \vec{u} = \frac{1}{|\vec{AB}|}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}800/1000\\600/1000\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0'8\\0'6\end{pmatrix}$ ✓

b) i) $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{AB} = \begin{pmatrix}800\\600\end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = 250$ $\Longrightarrow \vec{v} = 250\cdot\begin{pmatrix}0'8\\0'6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}$ ✓

ii) 13:00h $\longrightarrow t=1 \Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-600\\-200\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-400\\-50\end{pmatrix}}$

iii) $\begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-600\\-200\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}200 = -600+200t\\400 = -200+150t\end{array}\right\} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l}-200t = -800 \longrightarrow t=4\\-150t = -600 \longrightarrow t=4\end{array} \Longrightarrow$ Sobrevolará B a las $\boxed{16h}$

c) Se encenderá la señal luminosa cuando lleva gastados $17000-1000 = 16000\,\ell \Longrightarrow$ Llevará recorridos:

$$16000\,\cancel{\ell}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{1800\,\cancel{\ell}}\cdot 250\,\frac{Km}{\cancel{h}} = 2222'\hat{2}\,Km$$

Veamos la distancia total de viaje entre A y C pasando por B:

Entre A y B hay: $|\vec{AB}| = \sqrt{640000+360000} = 1000\ Km$

Entre B y C hay: $\vec{BC} = \begin{pmatrix}1200-200\\-350-400\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1000\\-750\end{pmatrix}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{1000000+562500} = 1250\ Km$

Se encenderá la señal luminosa a:

$1250 + 1000 - 2222'\hat{2} = \boxed{27'\hat{7}\ Km\ \text{de}\ C}$

N05 P1

$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = \boxed{5}$

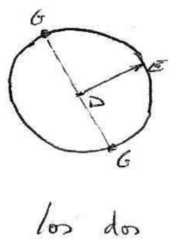
$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}} \qquad t=2 \Longrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}}$

N05 P1

a) $\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD} = \begin{pmatrix}12\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}}$

b) $|\vec{DE}| = \sqrt{8^2+6^2} = \boxed{10}$

c)



$\vec{DG}$ es perpendicular a $\vec{DE}$ con su mismo módulo:

$\vec{DG} = \nearrow \begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{OG} = \vec{OD} + \begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}}$

$\searrow \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{OG} = \vec{OD} + \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-2\\13\end{pmatrix}}$

los dos puntos G son: (10,-3) ó (-2,13)

M06 P1

a) $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

b) $\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}}$

M06 P2

a) i) $\vec{AB} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 21\vec{k}) - (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 20\vec{k}$ ✓

ii) $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{AB}|}\cdot\vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{4+64+400}}\cdot(2\vec{i} - 8\vec{j} + 20\vec{k}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{468}}(2\vec{i} - 8\vec{j} + 20\vec{k})}$

iii) $\vec{OA}\cdot\vec{u} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{468}} + 3\cdot\frac{-8}{\sqrt{468}} + 1\cdot\frac{20}{\sqrt{468}} = \frac{4-24+20}{\sqrt{468}} = 0$ ✓

b) $\vec{OS} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 4\vec{i} - 5\vec{j} + 21\vec{k}}{2} = \boxed{3\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}}$

$L_1: \boxed{\vec{r} = 3\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k} + t\cdot(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})}$

c) L_1 y L_2 no son paralelas porque $3\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$ y $2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ no tienen componentes proporcionales.

d) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\11\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases}3+2t = 5-2s\\-1+3t = 10+5s\\11+t = 10-3s\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2t+2s = 2\\3t-5s = 11\\t+3s = -1\end{cases}$

$M = \begin{pmatrix}2 & 2\\3 & -5\\1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}2 & 2\\3 & -5\end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r(M) = 2$

$M^* = \left(\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 2\\3 & -5 & 11\\1 & 3 & -1\end{array}\right)$ $\quad \begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\3 & -5 & 11\\1 & 3 & -1\end{vmatrix} = 10+18+22+10+6-66 = 0 \Rightarrow r(M^*) = 2$ $\Big\} \Rightarrow S.C.D$

$n = 2$

$\begin{cases}\boxed{2t+2s = 2}\\\boxed{3t-5s = 11}\\\cancel{t+3s=-1}\end{cases} \rightarrow$

$t = \frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\11 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}} = \frac{-32}{-16} = 2 \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\11\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\\13\end{pmatrix}$

$s = \frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 11\end{vmatrix}}{-16} = \frac{16}{-16} = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\\13\end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{OP} = \begin{pmatrix}7\\5\\13\end{pmatrix}}$

Muestra 06 P1

a) $\vec{OG} = \boxed{5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}}$

b) $\begin{cases}\vec{OB} = 5\vec{i} + 5\vec{j}\\\vec{OD} = 5\vec{j} + 5\vec{k}\end{cases} \Rightarrow \vec{BD} = (5\vec{j} + 5\vec{k}) - (5\vec{i} + 5\vec{j}) = \boxed{-5\vec{i} + 5\vec{k}}$

c) $\begin{cases}\vec{OE} = 5\vec{k}\\\vec{OB} = 5\vec{i} + 5\vec{j}\end{cases}$ $\vec{EB} = (5\vec{i} + 5\vec{j}) - 5\vec{k} = \boxed{5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}}$

N07 P2

a) $\vec{JQ} = \vec{OQ} - \vec{OJ} = \begin{pmatrix}0\\7\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-6\\7\\10\end{pmatrix}}$

$\vec{MK} = \vec{OK} - \vec{OM} = \begin{pmatrix}6\\0\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}6\\-7\\10\end{pmatrix}}$

b) $JQ: \boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\7\\10\end{pmatrix}}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{JQ}\cdot\vec{MK}}{|\vec{JQ}|\cdot|\vec{MK}|} = \frac{(-6)\cdot 6 + 7\cdot(-7) + 10\cdot 10}{\sqrt{(-6)^2+7^2+10^2}\,\sqrt{6^2+(-7)^2+10^2}} = \frac{15}{185} = \frac{3}{37}$$

$\alpha = \cos^{-1}(3/37) = \boxed{85{,}3493^\circ}$

c) $JQ: \vec{r} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\7\\10\end{pmatrix}$, $MK: \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\-7\\10\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x = 6-6t \\ y = 7t \\ z = 10t \\ x = 6s \\ y = 7-7s \\ z = 10s \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 6-6t = 6s \\ 7t = 7-7s \\ 10t = 10s \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} t+s=1 \\ t+s=1 \\ t=s \end{array}\right\} \to s+s=1;\ s=\frac{1}{2} \Rightarrow t = 1/2$

$\begin{array}{l} x = \frac{6}{2} = 3 \\ y = 7-\frac{7}{2} = \frac{7}{2} \\ z = \frac{10}{2} = 5 \end{array}$ $\begin{array}{l} x = 6-\frac{6}{2} = 3 \\ y = 7/2 \\ z = \frac{10}{2} = 5 \end{array}$ ✓ $\boxed{D = (3, \frac{7}{2}, 5)}$

M08 P2

$\vec{v} + p\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} + p(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = (3+p)\vec{i} + (4+2p)\vec{j} + (1-3p)\vec{k}$

$\vec{v} + p\vec{w} \perp \vec{w} \Rightarrow (\vec{v}+p\vec{w})\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow (3+p)\cdot 1 + (4+2p)\cdot 2 + (1-3p)\cdot(-3) = 0$

$\cancel{3} + p + 8 + 4p - \cancel{3} + 9p = 0;\ 14p = -8;\ \boxed{p = \frac{-4}{7}}$

Muestra 06/08 P2

a) $\vec{v}$ es proporcional a $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = 18$ $\Rightarrow \vec{v} = 18\cdot\frac{1}{\sqrt{9+16}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \frac{18}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10'8\\14'4\\0\end{pmatrix}$ ✓

$\vec{b} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10'8\\14'4\\0\end{pmatrix}$

b) i) $t=0 \Rightarrow \vec{h} = \boxed{\begin{pmatrix}49\\32\\0\end{pmatrix}}$

ii) $|\vec{v}| = \sqrt{48^2+24^2+6^2} = \boxed{54\ Km/h}$

c) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}10'8\\14'4\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}49\\32\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-48\\-24\\6\end{pmatrix}$ $\to \left.\begin{array}{l} 10'8t = 49-48s \\ 14'4t = 32-24s \\ 5 = 6s \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 10'8t + 48s = 49 \\ 14'4t + 24s = 32 \\ \boxed{s = \frac{5}{6}} \end{array}$

Alcanza al globo pasadas $\frac{5}{6}$ h = $\boxed{50\ minutos}$

NOTA: El sistema tiene solución porque:

$s = \frac{5}{6}$ → $10'8t + 48\cdot\frac{5}{6} = 49$; $10'8t = 9 \to t = \frac{9}{10'8} = \frac{1}{1'2} = \frac{5}{6}$ ✓

→ $14'4t + 24\cdot\frac{5}{6} = 32$; $14'4t = 12 \to t = \frac{12}{14'4} = \frac{1}{1'2} = \frac{5}{6}$

Nov 08
P2

a] i] $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ ✓

ii] $\vec{AD} = \begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}}$

iii] $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}}$ ✓

b] $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\6\end{pmatrix}$ $\boxed{C = (7,7,6)}$

c] $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = \boxed{13}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AD}|} = \dfrac{13}{\sqrt{30}\,\sqrt{14}} = \dfrac{13}{\sqrt{420}}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{A} = 50'63^\circ}$

d] $\text{Area} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = \sqrt{30}\,\sqrt{14}\,\sqrt{1 - \left(\dfrac{13}{\sqrt{420}}\right)^2} =$

$= \sqrt{420} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{169}{420}} = \cancel{\sqrt{420}}\,\dfrac{\sqrt{251}}{\cancel{\sqrt{420}}} = \boxed{15'84}$

Nov 08
P1

a] $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}9\\-6\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-2\\10\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}}$

$v = |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{9+16+25} = \boxed{\sqrt{50}}$

b] $\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix}6\\-2\\10\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}}$

Nov 09
P2

a] $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}}$

b] $L_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} \text{ es el punto inicial}}$

Por ejemplo sirve el vector $\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ porque es paralelo a $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$:

$\boxed{L_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}}$

c] $T(-1,5,p) \in L_1 \Rightarrow$
$-1 = 3 + s \rightarrow s = -4$
$5 = -3 - 2s \rightarrow s = -4$ ✓
$p = 8 + 3s \longrightarrow p = 8 + 3 \cdot (-4) = \boxed{-4}$

d] $T(-1,5,-4) \in L_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix}-3\\9\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\q\end{pmatrix} \Rightarrow$
$-1 = -3 + t \rightarrow t = 2$
$5 = 9 - 2t \rightarrow t = 2$ ✓
$-4 = 2 + qt \longrightarrow -4 = 2 + 2q$
$\boxed{q = -3}$

e] Vector director de L_1 : $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

" " " L_2 : $\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

$\cos \alpha = \dfrac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \dfrac{-4}{14} = \dfrac{-2}{7} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-2/7) = \boxed{106,6015^\circ}$

M10
P1

a)
$$\left.\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA}\\ \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}-\vec{AB} &= -\vec{OB} + \vec{OA}\\ \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA}\end{aligned}\right\}$$
$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{BC}$$
$$\vec{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-8\\-1\\-1\end{pmatrix}}$$

b)
$$\vec{AB} = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$$
$$\vec{u} = \frac{1}{7}\vec{AB} = \boxed{\begin{pmatrix}6/7\\-2/7\\3/7\end{pmatrix}}$$

c)
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 6\cdot(-2) + (-2)\cdot(-3) + 3\cdot 2 = -12+6+6 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{AB}, \vec{AC} \text{ son perpendiculares}}$$