EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO - 2º DE BACHILLERATO

1. a) Halle un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}=(2,3,4)$ y a $\vec{v}=(0,4,2)$
b) ¿Qué relación existe entre el módulo de $\vec{v}$ y el de $k\cdot\vec{v}$ (siendo k un nº real)? ¿Por qué?
c) Si los módulos de $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 3, 4 y 5 respectivamente ¿Entre qué valores estará comprendido el producto mixto de los tres vectores? ¿Por qué?

2. Dados $|\vec{u}|=2\quad|\vec{v}|=8\quad y\quad \vec{u}\times\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ halla los posibles valores de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

3. Calcule los valores de *a* y *b* para que los puntos A(1, 1, 1) B(*a*, 2, *b*) y C(1, 0, 0) estén alineados.

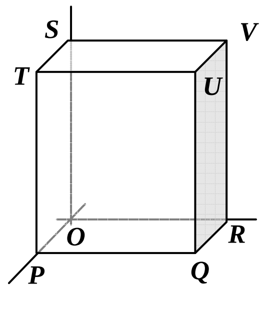
4. Halle *a* y *b* para que las rectas $r\equiv\dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{2-a}$ y $s\equiv\begin{cases}x-bz=0\\2x-y-z+1=0\end{cases}$ sean paralelas.

5. a) Halle la recta *r* que contiene al punto (1, 2, 3) y es paralela a los planos $2x-y-2z+1=0$, $x-2y+4z-2=0$.
b) Halla el plano π que contiene a los puntos A(1,1,-1) B(2,4,-1) y es paralelo a la recta $x=1-y=z$
c) Estudie la posición relativa del plano π y la recta *r*.
d) Halle la distancia entre la recta *r* y el plano π.

6. Halle la distancia del punto P(0,2,-1) al plano que contiene al punto A(1,1,0) y a la recta $x+2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

7. Dados los puntos A(1,2,-1) B(2,4,-1) C(6,3,-1) y D(3,3,5) se pide:
a) Determinar la ecuación del plano que contiene a los puntos A,B y C
b) Hallar el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos A,B,C y D.

8. Escribe la ecuación cartesiana del plano que contiene el punto (0, -4, 5) y es perpendicular a la recta $\begin{cases}2x-3y-7=0\\x+3z-8=0\end{cases}$



9. El ortoedro del dibujo tiene cuatro de sus vértices sobre los puntos **O**(0, 0, 0) **P**(1, 0, 0) **R**(0, 3, 0) y **S**(0, 0, 4). halle la amplitud del ángulo formado por las diagonales *SQ* y *SP*

10. Dados los puntos: A(0,1,3) B(-2,1,2) C(1,1,3)
a) Halle el cuarto vértice D del paralelogramo ABCD
b) Halle el área de dicho paralelogramo

11. Halle el plano que contiene al punto P(1,1,3) y que es perpendicular a los planos $\begin{cases}x-y+z=0\\2x-2y-z+3=0\end{cases}$

12. Halle el punto simétrico de P(3, -2, 2) respecto del plano $\pi\equiv 2x-2y+z+15=0$

13. Halle el plano que contiene a la recta $r\equiv x+2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ y es perpendicular al plano $\pi\equiv 2x-3z-2=0$

14. Halle el plano que contiene al punto P(1,1,3), es perpendicular al plano $\pi\equiv 2x-3z-2=0$ y es paralelo a la recta $r\equiv x+2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$

15. Halle todos los planos paralelos al plano: $x-3y+z-2=0$ que disten $\sqrt{44}$ unidades del punto $(1,2,-3)$

16. Estudie la posición relativa del plano $\pi \equiv 2x-3y+z+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=4+3r \\ y=1-r \\ z=-3r \end{cases}$

17. Sean el plano $\pi \equiv 2x-3y+z-4=0$ y la recta *r* que contiene a los puntos A(6, −4, 8) y B(10, −2, 6)
a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π
b) Halle la recta proyección de r en π

18. a) Halle la ecuación del haz de planos al que pertenecen $\pi_1 \equiv 2x-3z-2=0$ y $\pi_2 \equiv -2x-2y+z=0$
b) Halle el plano perteneciente a dicho haz que pase por el punto (1,1,1)

19. Halle la ecuación del haz de planos que se cortan sobre la recta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

20. Halle los dos puntos pertenecientes a la recta r: $x+2=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ que disten 6 unidades del punto de coordenadas P(-3, -1, 1)

21. a) Halle el punto de la recta $r \equiv x-6=y-7=\frac{z-4}{-2}$ más próximo al punto de coordenadas
b) Halle la distancia del origen de coordenadas a la recta *r.*
c) Halle el punto simétrico al origen respecto de la recta *r.*

22. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: x=y=z$ $\quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$
a) Estudie su posición relativa.
b) Halle la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$

23. Halle un punto de la recta $\begin{cases} y=2+x \\ z=3+2x \end{cases}$ que equidiste de los puntos A(1,0,1) B(0,4,2)

24. Halle la ecuación de la recta perpendicular a las rectas $r_1 \equiv x+2=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-2}$, $r_2 \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ en su punto de corte.

25. Estudie la posición relativa de los tres planos $\pi_1 \equiv 2x-3y+z-3=0$, $\pi_2 \equiv x-y+z-2=0$, $\pi_3 \equiv 2x+y+z-3=0$

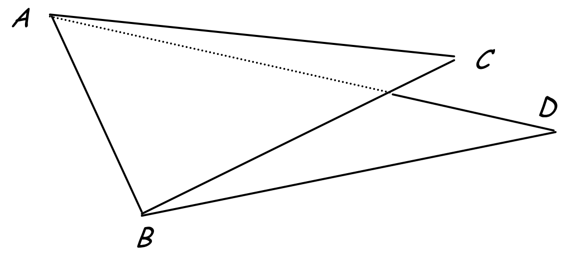
26. Halle el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv 2x-3y+6z-3=0$, $\pi_2 \equiv x-2y+2z-2=0$

27. ¿Pasa por el origen la recta que contiene al punto (1, 0, 1), es paralela al plano $x-y+z-3=0$ y es perpendicular a la recta $x+2=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{0}$?

28. Halle el plano que contiene al origen y no tiene puntos en común con las rectas $r_1 \equiv x+2=\frac{y-5}{-2}=\frac{z}{3}$, $r_2 \equiv \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}$

29. Halle el plano que contiene al eje X y es paralelo a la recta: $\begin{cases} y = 2 + x \\ z = 3 + y \end{cases}$

30. Sean los puntos A(0,1,3) B(-2,1,2) C(1,1,3) y D(1,2,0) del diagrama adjunto.
a) Halle el ángulo agudo determinado por las rectas BD y BC.
b) Halle el ángulo agudo determinado por la recta BD y el plano ABC.
c) Halle el ángulo agudo determinado por los planos ABC y ABD.
d) Halle el volumen del tetraedro ABCD



31. Los vectores $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ satisfacen la ecuación $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$. Demuestre que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}=\vec{w}\times\vec{u}$

32. Sean las rectas:, $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 - r \\ y = 1 - r \\ z = -3r \end{cases}$

a) Demuestre que son paralelas pero no coincidentes.
b) Halle la distancia entre ambas rectas.

33. Sean las rectas $r_1 \equiv x+2=\dfrac{y-5}{-2}=z$ $\;r_2 \equiv x-2=y-1=\dfrac{z+3}{4}$

a) Estudie su posición relativa
b) Halle la recta que **corta** perpendicularmente a ambas rectas.
c) Halle la distancia entre ambas rectas

34. Sean las rectas:, $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3r \\ y = 1 - 2r \\ z = -3 + 6r \end{cases}$

a) Justifique brevemente que r_1 y r_2 son dos rectas secantes pero no coincidentes.
b) Halle el plano π_1 que contiene a r_1 y es perpendicular al plano que contiene a las rectas r_1 y r_2.
c) Halle el plano π_2 que contiene a r_2 y es perpendicular al plano que contiene a las rectas r_1 y r_2.
d) Halle los planos bisectores a π_1 y π_2.
e) Halle las dos bisectrices de r_1 y r_2 resolviendo la intersección del plano bisector hallado, con el plano que contiene a ambas rectas.

35. Sean las rectas:, $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3r \\ y = 1 - 2r \\ z = -3 + 6r \end{cases}$

a) Halle $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, vectores unitarios directores respectivos de las rectas r_1 y r_2.
b) ¿Qué dirección tendría $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ respecto de las rectas r_1 y r_2?
c) A partir de aquí, halle una recta bisectriz de r_1 y r_2.
d) ¿Qué vector emplearía para hallar de forma parecida la otra recta bisectriz de r_1 y r_2?

36. Los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y-z=5$ y $\pi_2 \equiv x-y+2z=k$ se cortan formando la recta $5x+1=9-5y=-5z$. Halle el valor de *k.*

37. Dados los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$, tales que : $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1$ y $|\vec{c}|=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ calcule la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$