Hoja 9: Variable aleatoria. Distribuciones binomial y normal

1

Se lanzan dos dados. Sea X la variable aleatoria “diferencia entre las puntuaciones”. Halla la función de probabilidad y la función de distribución de X.

2

IBO May 2006

En la siguiente tabla se presenta la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,4	p	0,2	0,07	0,02

a) Halle el valor de p.

b) Calcule el valor esperado de X.

3

Una variable aleatoria tiene una función de probabilidad dada por $P(x) = \dfrac{x^2 + x}{20}$, para $x = 1, 2, 3$. Calcula μ y σ para esta distribución.

4

Un amigo le propone a otro el siguiente juego: “Lanzamos un dado. Si sale un múltiplo de 3 yo te doy 6 euros, y en caso contrario, tú me das 4 euros”.

a) ¿Debe aceptar su juego? ¿Por qué?

b) En caso contrario, ¿cuánto debería darle el amigo para que aceptara el juego?

5

La compañía aseguradora B&B (Bueno&Barato) asegura coches valorados en 6000 euros, bajo estas condiciones:

- **A**: por siniestro total paga 6000 € al dueño del coche.
- **B**: por daños valorados entre 3000 € y 5999 €, paga 3500 € al dueño.
- **C**: por daños entre 1500 € y 2999 €, paga 1000 €.
- **D**: por daños menores de 1500 € no abona nada.

A partir de un estudio estadístico la aseguradora sabe que a lo largo de un año las probabilidades de A, B, C y D para un coche asegurado son de 0,03; 0,12; 0,35 y 0,50, respectivamente. Si la compañía desea obtener una ganancia de al menos 80 € en cada póliza anual de seguro, ¿cuánto debería cobrar por la misma?

6

IBO May 2015

Una bolsa contiene fichas negras y fichas blancas. Rose paga \$10 por jugar a un juego en el que tiene que sacar una ficha de la bolsa. La siguiente tabla muestra la probabilidad de sacar una ficha de cada uno de los colores.

Resultado	negra	blanca
Probabilidad	0,4	0,6

Rose no gana nada si saca una ficha blanca, y gana $\$k$ si saca una ficha negra. El juego es justo. Halle el valor de k.

7

IBO May 2012

la variable aleatoria X presenta la siguiente distribución de probabilidad, siendo $p(X > 1) = 0,5$.

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	p	q	r	0,2

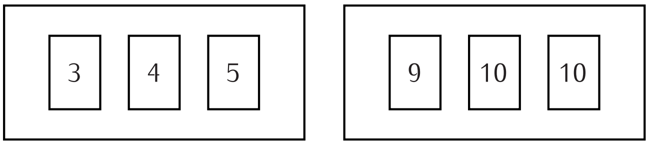
a) Halle el valor de r.

b) Sabiendo que $E(X) = 1,4$, halle el valor de p y el de q.

8

IBO May 2009

Dos cajas contienen cartas numeradas, tal y como se muestra a continuación.



Se extraen dos cartas al azar, una de cada caja.

a) Copie y complete la siguiente tabla, de forma que aparezcan los nueve resultados equiprobables posibles.

3; 9		
3; 10		
3; 10		

Sea S la suma de los números en las dos cartas.

b) Escriba todos los posibles valores de S.

c) Halle la probabilidad de cada uno de los valores de S.

d) Halle el valor esperado de S.

e) Anna juega a un juego, en el cual gana \$50 si S es par y pierde \$30 si S es impar. Anna juega a este juego 36 veces. Halle la cantidad que Anna espera tener al finalizar estos 36 juegos.

9

Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Halla la probabilidad de que en 25 años:

a) Vivan los cuatro.

b) No viva ninguno.

c) Vivan al menos dos.

d) Halla el número medio de supervivientes.

10

Una fábrica produce calculadoras. Sobre un período de tiempo prolongado, se encuentra que el 2 % de las calculadoras producidas son defectuosas. Se prueba una muestra aleatoria de 100 calculadoras.

a) ¿Cuál es el número esperado de calculadoras defectuosas en la muestra?

b) Halla la probabilidad de que tres calculadoras sean defectuosas.

c) Halla la probabilidad de que más de una calculadora sea defectuosa.

11 Un viajero llega a las puertas de una ciudad amurallada y pide permiso para entrar. El centinela le informa de que no es tan fácil acceder a esa ciudad. Para conseguirlo habrá de lanzar 20 veces un dado y sólo entrará si consigue exactamente cinco veces un cinco.

a) ¿Con qué probabilidad logrará el viajero entrar en la ciudad?

b) Un día llegan a la ciudad 100 viajeros. ¿Cuántos se espera que logren entrar?

12 Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya:

a) Como mucho tres niñas.

b) Al menos una niña.

c) Al menos ocho niños.

d) Al menos una niña y un niño.

13 El 15 % de los envases de leche que se venden en un determinado supermercado no tienen etiqueta con el precio por unidad. Si elegimos al azar 6 envases:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga la etiqueta con el precio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad estén etiquetados?

14

a) Una moneda se lanza 50 veces. Halla el número esperado de caras.

b) Un dado se lanza 60 veces. Halla el número esperado de "6".

15 Un estudio realizado sobre una población de pájaros indica que el 49 % son machos. En una muestra aleatoria de 800 pájaros, determina la probabilidad de que:

a) 392 sean machos;

b) más de 400 sean machos;

c) el número de machos esté comprendido entre 398 y 405 ambos inclusive.

16 Una bolsa contiene 15 bolas, numeradas del 1 al 15. Se sacan sucesivamente cinco bolas, con reemplazamiento. Halla la probabilidad de que:

a) todas la bolas extraídas tengan un número mayor que 10.

b) exactamente tres de las bolas extraídas tengan un número mayor que 10.

17 Un test consta de 100 preguntas con cuatro respuestas optativas cada una. Si un alumno se sabe 20 preguntas y responde las restantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar:

a) 50 o más?

b) entre 25 y 75?

c) más de 75?

18

Una caja contiene 35 discos rojos y 5 discos negros. Se extrae al azar un disco y se anota su color. A continuación se devuelve el disco a la caja.

a) En ocho de estas extracciones, halla la probabilidad de que se extraiga disco negro

a) exactamente una vez;

b) al menos una vez.

b) Se lleva a cabo el proceso de extraer y reemplazar 400 veces.

a) ¿Cuál es el número esperado de discos negros que se habrán extraído?

b) Halla la probabilidad de que se extraiga disco negro

- al menos 48 veces;
- exactamente 48 veces.

19

La probabilidad de obtener cara con una moneda no equilibrada es $\frac{1}{3}$.

a) Sammy lanza la moneda tres veces. Halle la probabilidad de obtener:

i) tres caras;

ii) dos caras y una cruz.

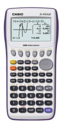
b) Amir juega a un juego que consiste en lanzar la moneda 12 veces.

i) Halle el número esperado de caras.

ii) Amir gana \$ 10 cada vez que sale cara, y pierde \$ 6 cada vez que sale cruz. Halle el valor esperado de sus ganancias.

20

IBO
May 2011



Se tiran dos dados equilibrados de cuatro caras; uno es rojo y el otro verde. En cada dado, las caras están rotuladas con los números 1, 2, 3 y 4. La puntuación que se obtiene con cada dado es igual al número que cae boca abajo.

a) Enumere todos los pares de puntuaciones cuya suma es igual a 6.

A continuación se muestra la distribución de probabilidad correspondiente a la suma de las puntuaciones de los dos dados.

Suma	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidad	p	q	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	r	$\frac{1}{16}$

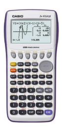
b) Halle el valor de p, de q y de r.

Fred juega a un juego. Coge dos dados equilibrados de 4 caras y los tira cuatro veces. Gana un premio si en tres o más tiradas la suma de los dados es igual a 5.

c) Halle la probabilidad de que Fred gane un premio.

21

IBO
2014



La probabilidad de obtener cara en una moneda trucada es de 0,4. Se lanza la moneda 600 veces.

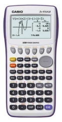
a) i) Escriba la media del número de caras.

ii) Halle la desviación típica del número de caras.

b) Halle la probabilidad de que el número de caras obtenido diste de la media menos de una desviación típica.

22

IBO
May 2008



Paula va al trabajo tres días a la semana. Cada uno de esos días, la probabilidad de que vaya en un autobús rojo es $\frac{1}{4}$.

a) Escriba el número esperado de veces que Paula va a trabajar en un autobús rojo en una semana dada.

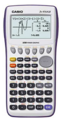
b) En una semana, halle la probabilidad de que vaya al trabajo en un autobús rojo

i) exactamente dos días;

ii) al menos un día.

23

IBO
May 2013



Una bolsa contiene cuatro bolas doradas y seis bolas plateadas.

a) Se sacan al azar dos bolas de la bolsa, con reposición. Sea X el número de bolas doradas que se sacan de la bolsa.

i) Halle $p(X = 0)$.

ii) Halle $p(X = 1)$.

iii) A partir de lo anterior, halle $E(X)$.

Se sacan catorce bolas de la bolsa, con reposición.

b) Halle la probabilidad de que exactamente cinco de las bolas sean doradas.

c) Halle la probabilidad de que como máximo cinco de las bolas sean doradas.

d) Sabiendo que como máximo cinco de las bolas son doradas, halle la probabilidad de que exactamente cinco de las bolas sean doradas. Dé la respuesta con una aproximación de dos cifras decimales.

24

Una fresadora produce tornillos de longitudes, medidas en centímetros, que se distribuyen normalmente con media 2 cm y desviación típica 0,1 cm. Un tornillo no se admite si su longitud es inferior a 1,85 cm o superior a 2,15 cm. Si se examinan 10 000 tornillos, ¿cuántos serán válidos?

25

El propietario de un bar ha adquirido una máquina exprimidora de naranjas que puede procesar naranjas cuyo diámetro no supere los 10 cm. Compra las naranjas a un proveedor que le asegura que el diámetro de sus naranjas se distribuye según una normal de media 8,5 cm y desviación típica 1 cm. Tras unos meses otro proveedor le ofrece naranjas con diámetros dados por una normal de media 8,5 cm y desviación típica 0,75 cm. ¿Debería cambiar de proveedor?

26

Aplicado un test a un grupo de 300 personas, se ha obtenido una distribución normal de media 50 y desviación típica 5.

a) Calcula las puntuaciones que delimitan el 30 % central de la distribución.

b) Calcula el número de personas que obtiene en el test más de 56 puntos o menos de 47.

27

Los pesos de los tomates se distribuyen normalmente con media de 85 g y desviación típica de 15 g. Se venden en tres categorías: A (grandes), B (medianos) y C (pequeños). Todos los tomates con un peso menor que la media se clasifican como C. Si el resto se clasifican de manera que haya la misma cantidad de categoría A y B, halla el peso mínimo de un tomate de categoría A.

28

El número diario de visitantes de un parque de atracciones se distribuye según una normal $N(2000, 250)$.

a) Halla la probabilidad de que en un día determinado el número de visitantes no supere los 2 100.

b) Calcula la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1 500.

c) En un mes de 30 días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2 210?

d) Si se quiere clasificar los días en tres tipos, de manera que el 15 % se considere de “baja asistencia”, el 60 % de “asistencia media” y el 25 % de “asistencia masiva”, ¿cuáles han de ser las cuotas de visitantes que marquen el paso de un tipo a otro?

29

En un país llamado *Tallopia* la estatura de los adultos tiene una distribuación normal, con media 187,5 cm y desviación típica 9,5 cm.

a) ¿Qué porcentaje de los adultos de *Tallopia* tiene estatura superior a 197 cm?

b) Las puertas estándar de *Tallopia* están diseñadas de modo tal que al 99 % de los adultos les sobran por lo menos 17 cm por encima de la cabeza cuando pasan por una puerta. Halla la altura de una puerta estándar de *Tallopia*, expresando la respuesta redondeada al cm más próximo.

30

La altura de los árboles de un bosque sigue una distribución normal con altura media 17 metros. Se selecciona un árbol al azar. La probabilidad de que la altura del árbol seleccionado sea mayor que 24 metros es 0,06.

a) Halle la probabilidad de que el árbol seleccionado tenga una altura menor que 24 metros.

b) La probabilidad de que el árbol tenga una altura menor que D metros es 0,06. Halle el valor de D.

c) Un leñador selecciona al azar 200 árboles. Halle el número esperado de árboles cuyas alturas varían entre 17 y 24 metros.

31

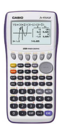
Las alturas de los jaguares se distribuyen normalmente con media 80 cm, y desviación típica σ desconocida. Si el 74,95 % de los jaguares tienen una altura menor de 87 cm, halla el valor de σ.

32

Una autovía urbana tiene un límite de velocidad de 50 km/h. Se sabe que las velocidades de los vehículos que viajan por la autovía se distribuyen normalmente, con una desviación típica de 10 km/h, y que el 30 % de los vehículos que usan la autovía sobrepasan el límite de velocidad. Halla la velocidad media de los vehículos.

33

IBO May 2013



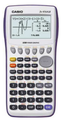
La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 20 y desviación típica 5.

a) Halle $p(X \leq 22,9)$.

b) Sabiendo que $p(X < k) = 0,55$, halle el valor de k.

34

IBO
May 2009



Una camioneta puede ir por el camino A o por el camino B para hacer un determinado viaje.
Si va por el camino A se puede suponer que la duración del viaje sigue una distribución normal, de media 46 minutos y desviación típica 10 minutos.
Si va por el camino B se puede suponer que la duración del viaje sigue una distribución normal, de media μ minutos y desviación típica 12 minutos.

a) Para el camino A, halle la probabilidad de que la duración del viaje sea **superior** a 60 minutos.

b) Para el camino B, la probabilidad de que la duración del viaje sea **inferior** a 60 minutos es 0,85. Halle el valor de μ.

c) La camioneta sale a las 6:00 y necesita llegar antes de las 7:00.

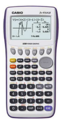
- i) ¿Por qué camino debería ir?
- ii) Justifique su respuesta.

d) A lo largo de cinco días consecutivos la camioneta sale a las 6:00 y va por el camino B. Halle la probabilidad de que

- i) los cinco días llegue antes de las 7:00;
- ii) al menos tres días llegue antes de las 7:00.

35

IBO
May 2014



Un bosque tiene una gran número de árboles altos. Las alturas de los árboles siguen una distribución normal, de media 53 metros y desviación típica 8 metros. Los árboles se catalogan como árboles gigantes si miden más de 60 metros de altura.

a) Se elige al azar un árbol de este bosque.

- i) Halle la probabilidad de que este árbol sea gigante.
- ii) Sabiendo que este árbol es gigante, halle la probabilidad de que mida más de 70 metros.

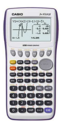
b) Se eligen dos árboles al azar. Halle la probabilidad de que ambos sean gigantes.

c) Se eligen 100 árboles al azar.

- i) Halle el número esperado de árboles gigantes que habrá en este grupo.
- ii) Halle la probabilidad de que en este grupo haya al menos 25 árboles gigantes.

36

IBO
May 2015



Una máquina fabrica una gran cantidad de clavos. La longitud, L mm, de los clavos sigue una distribución normal, donde $L \sim N(50, \sigma^2)$.

a) Halle $P(50 - \sigma < L < 50 + 2\sigma)$.

b) La probabilidad de que la longitud de un clavo sea menor que 53,92 mm es igual a 0,975. Muestre que $\sigma = 2,00$ (con una aproximación de tres cifras significativas).

A todos los clavos que tienen una longitud de al menos t mm se les considera clavos grandes.

c) Se escoge un clavo al azar. La probabilidad de que sea un clavo grande es igual a 0,75. Halle el valor de t.

d)
- i) Se escoge al azar un clavo del montón de clavos grandes. Halle la probabilidad de que la longitud de este clavo sea menor que 50,1 mm.
- ii) Se escogen al azar diez clavos del montón de clavos grandes. Halle la probabilidad de que al menos dos de esos clavos tengan una longitud menor que 50,1 mm.

37

IBO
May 2003

Una empresa fabrica receptores de televisión. La empresa afirma que la vida útil de un televisor tiene una distribución normal, con una media de 80 meses y una desviación típica de 8 meses.

a) ¿Qué proporción de los televisores se rompe en menos de 72 meses?

b)
- Calcula la proporción de televisores con una vida útil de entre 72 y 90 meses.
- Ilustra esta proporción con el correspondiente sombreado en un diagrama de una curva de distribución normal.

c) Cuando un televisor se rompe en menos de x meses, la compañía lo remplaza sin cargo. Se remplaza el 4 % de los televisores. Halla el valor de x.

38

IBO
May 2004

La cantidad de líquido en una lata está normalmente distribuida con una media de 379 ml y una desviación típica de d ml.

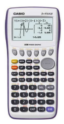
a) Si $d = 2,7$, halla la probabilidad de que una lata contenga menos de 375 ml.

b) Cuando $d = 3,6$, la cantidad de líquido en el 90 % de las latas supera los x ml. Halla el valor de x, aproximando la respuesta con una cifra decimal.

c) La proporción de latas en las que la cantidad de líquido es menor de 370 ml es 0,01. Halla el valor de d.

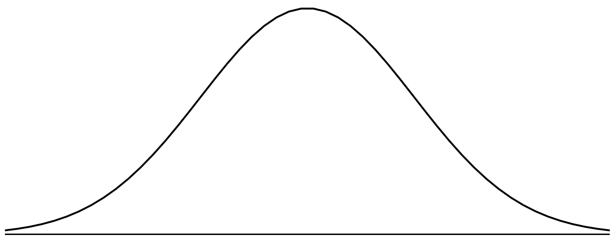
39

IBO
May 2008



Las alturas de un cierto tipo de planta siguen una distribución normal. Las plantas se clasifican en tres categorías.
El 12,92 %, las más cortas, se encuentran en la categoría A.
El 10,38 %, las más altas, se encuentran en la categoría C.
El resto de plantas se encuentran en la categoría B, estando sus alturas comprendidas entre r cm y t cm.

a) Complete la siguiente figura, representando esta información.



b) Sabiendo que la altura media es 6,84 cm y que la desviación típica es 0,25 cm, halle el valor de r y el de t.