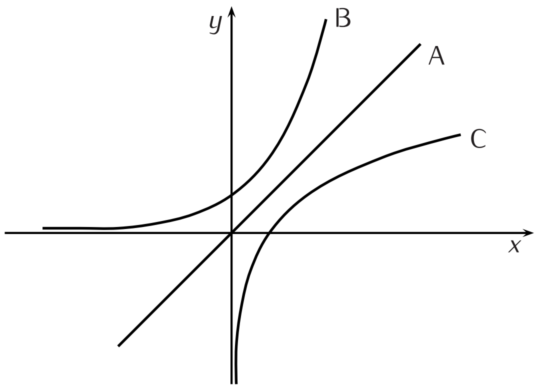
Hoja 13: Funciones exponenciales y logarítmicas

1

IBO May 2000

La siguiente figura muestra tres gráficas.



A es una parte de la gráfica de $y = x$.
B es una parte de la gráfica de $y = 2^x$.
C es simétrica de la gráfica B respecto de la recta A.
Escriba:

a) La ecuación de C de la forma $y = f(x)$.

b) Las coordenadas del punto en el que C corta al eje OX.

2

La gráfica de $y = \log_a(x + b) + c$ tiene las siguientes propiedades:

- La asíntota vertical tiene por ecuación $x = 2$.
- Pasa por los puntos de coordenadas $(3, 5)$ y $(5, 6)$

Halla el valor de a, b y c.

3

Halla la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2e^{3x}$ **b)** $f(x) = 2\ln(x + 1)$, $x > -1$

c) $f(x) = e^{-x^2}$ **d)** $f(x) = \ln(3x - 4)$, $x > 4/3$

e) $f(x) = 4^x - 2$ **f)** $f(x) = \log(2x + 1) + 2$, $x > 1/2$

4

IBO May 2003

Sean $f(x) = e^{-x}$, y $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x \neq -1$. Halle:

a) $f^{-1}(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

5

IBO May 2005

La función f viene dada por $f(x) = e^{(x-11)} - 8$.

a) Halle $f^{-1}(x)$.

b) Escriba el dominio de $f^{-1}(x)$.

6

IBO May 2011

Sean $f(x) = 3\ln x$ y $g(x) = \ln 5x^3$.

a) Exprese $g(x)$ de la forma $f(x) + \ln a$, donde $a \in \mathbb{Z}^+$.

b) La gráfica de g es una transformación de la gráfica de f. Dé una descripción geométrica completa de esta transformación.

7

Escribe las siguientes funciones en la forma $y = e^{kx}$, dando k con tres cifras significativas:

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^x$ **c)** $y = 4^{-2x}$ **d)** $y = 7^{0,5x}$ **e)** $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

8

Resuelve la ecuación $e^x = 5 - 2x$, expresando la respuesta con **cuatro** cifras significativas.

9

El número de árboles en un bosque está disminuyendo. Un modelo de esta disminución está dado por la función $f(t) = n_0 e^{-kt}$, donde n_0 es el número de árboles a comienzos de 2003 ($t = 0$), y el tiempo t está medido en años. Halla:

a) El número de árboles a comienzos de 2007, si $n_0 = 4500$ y $k = 0,0113$.

b) En qué año se espera que el número de árboles caiga por debajo de 4000.

10

El número N de átomos radiactivos de cierto material presentes en el tiempo t años puede escribirse en la forma $N = 5000\, e^{-kt}$, siendo 5000 el número de átomos presentes cuando $t = 0$, y k una constante positiva. Se sabe que $N = 2500$ cuando $t = 5$ años.

a) Determina el valor de k.

b) ¿Para qué valor de t será $N = 50$?

11

En una isla habitan dos especies de focas, A y B. El número de focas A está dado por la función $A(t) = 5000\, e^{0,02t}$, y el número de focas B por la función $B(t) = 3500\, e^{0,025t}$, donde t está en años. Halla:

a) El número inicial de focas A y de focas B.

b) El número de focas A después de 10 años.

c) Cuántos años deben transcurrir para que el número de focas B sea el doble del inicial.

d) Cuántos años transcurrirán para que la población de A y B sea la misma.

12

Se introducen 30 truchas en un estanque. El número de truchas a partir de este momento está modelado por la función $f(t) = n_0(1 - 0,9\, e^{-0,15t})$, $t \geq 0$, donde t está medido en semanas.

a) Muestra que el valor de $n_0 = 300$.

b) Dibuja la gráfica de $n = f(t)$ para el dominio $0 \leq t \leq 50$, donde n es el número de truchas al cabo de t semanas.

c) Estima el número de truchas en el estanque al cabo de 6 semanas.

d) Estima el número de truchas en el estanque a largo plazo.

13

IBO May 2004

En una ciudad existían 1420 médicos trabajando al 1 de enero de 1994. Después de n años, el número de médicos, D, que trabajan en la ciudad viene dado por

$$D = 1420 + 100n$$

a) i) ¿Cuántos médicos trabajaban en la ciudad a comienzos del año 2004?

ii) ¿En qué año hubo por primera vez más de 2000 médicos trabajando en la ciudad?

A comienzos del año 1994, la ciudad tenía una población de 1,2 millones de habitantes. Pasados n años, la población de la ciudad, P, viene dada por

$$P = 1\,200\,000\,(1,025)^n$$

b) i) Halle la población de P a comienzos de 2004.

ii) Calcule el porcentaje de crecimiento de la población entre el 1 de enero de 1994 y el 1 de enero de 2004.

iii) ¿En qué año la población será por primera vez mayor que 2 millones de habitantes?

c) i) ¿Cuál era el número medio de personas por médico a comienzos de 1994?

ii) ¿Después de cuántos años **completos** descenderá por primera vez el número de personas por médico por debajo de 600?

14

La carga Q, en culombios, almacenada en las placas de un condensador después de t segundos está dada por $Q(t) = Q_0\, e^{-0,1151t}$, $t \geq 0$, donde Q_0 es la carga inicial.

a) Si la carga es de 250 culombios tras 5 segundos, halla la carga inicial.

b) ¿Qué proporción de la carga inicial permanece tras 10 segundos?

c) ¿Cuánto tiempo tardará la carga en reducirse a la mitad?

d) Dibuja la gráfica de la función $Q(t)$, para $t \geq 0$.

15

La relación entre el peso medio, W en kg, y la estatura, h en metros, de niños con edades comprendidas entre 5 y 13 años, está dado aproximadamente por la fórmula: $\ln W = \ln 2,4 + 1,84h$.

a) Usando este modelo, halla el peso medio de un niño de 12 años que mide 1,5 metros.

b) ¿Qué estatura tendrá un niño de 10 años que pesa 50 kg?

c) Halla la función $W(h)$.

16

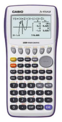
Un biólogo que estudia una plaga de langostas, observa que el área afectada por la plaga está dada por $A(n) = 1000\, e^{0,7n}$, donde A está en hectáreas, y n es el número de semanas tras la observación inicial.

a) Dibuja la gráfica de $A(n)$ frente a n, y usa esta gráfica para estimar el tiempo que transcurre hasta que el área afectada alcanza 5000 ha.

b) Comprueba tu respuesta del apartado **a)** algebraicamente (usando logaritmos).

17

IBO May 2008



Una ciudad está preocupada por el tema de la polución, y decide observar el número de personas que utiliza taxis. Al final del año 2000, había 280 taxis en la ciudad. Después de n años el número de taxis, T, que hay en la ciudad viene dado por

$$T = 280 \times 1{,}12^{n}.$$

a) i) Halle el número de taxis que hay en la ciudad al final del año 2005.

ii) Halle el año en el cual el número de taxis será el doble del número de taxis que había al final del año 2000.

b) Al final del año 2000 había en la ciudad 25 600 personas que utilizaban taxis. Después de n años, el número de personas, P, en la ciudad que utilizan taxis viene dado por

$$P = \frac{2\,560\,000}{10 + 90e^{-0{,}1n}}$$

i) Halle el valor de P al final de 2005, redondeando su respuesta al número entero más próximo.

ii) Después de siete años completos, ¿será el valor de P el doble del valor que tenía al final del año 2000? Justifique su respuesta.

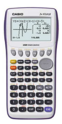
c) Sea R la razón entre el número de personas qeu utiliza taxis en la ciudad y el número de taxis. La ciudad reducirá el número de taxis si $R < 70$.

i) Halle el valor de R al final del año 2000.

ii) ¿Después de cuántos años completos la ciudad reducirá el número de taxis por primera vez?

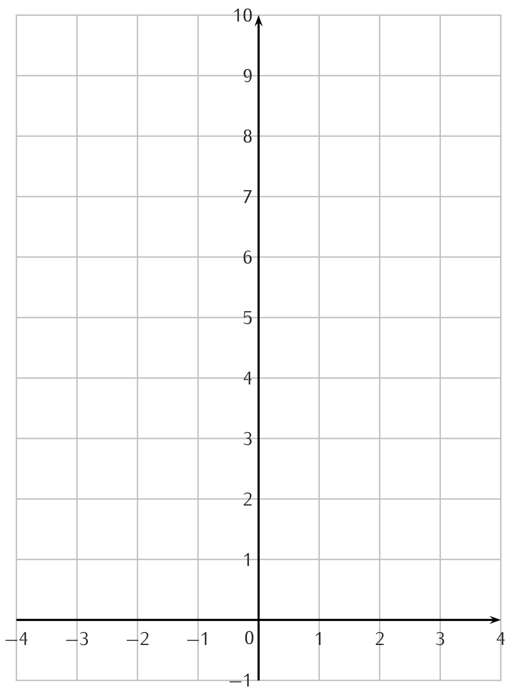
18

IBO May 2015



Sea $f(x) = e^{x+1} + 2$, para $-4 \le x \le 1$.

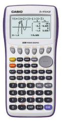
a) En la siguiente cuadrícula, dibuje aproximadamente el gráfico de f.



b) El gráfico de f se traslada mediante el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ para obtener así el gráfico de una función g. Halle una expresión para $g(x)$.

19

IBO
May 2014



El número de bacterias presentes en dos colonias A y B, empieza a aumentar al mismo tiempo. El número de bacterias en la colonia A al cabo de t horas viene dado por la función $A(t) = 12e^{0{,}4t}$.

a) Halle el número inicial de bacterias en la colonia A.

b) Halle el número de bacterias en la colonia A al cabo de cuatro horas.

c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el número de bacterias en la colonia A llegue a 400?

d) El número de bacterias en la colonia B al cabo de t horas viene dado por la función $B(t) = 24e^{kt}$. Al cabo de cuatro horas, hay 60 bacterias en la colonia B. Halle el valor de k.

e) El número de bacterias en la colonia A supera por primera vez al número de bacterias en la colonia B cuando han transcurrido n horas, donde $n \in \mathbb{Z}$. Halle el valor de n.