HOJA 12: FUNCIONES ALGEBRAICAS. SOLUCIONES

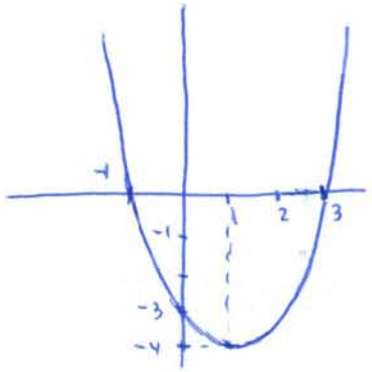
(1) a) $f(x) = x^2 - 6x + 14 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 14 = (x-3)^2 + 5$

b) $V(3,5)$.

— o —

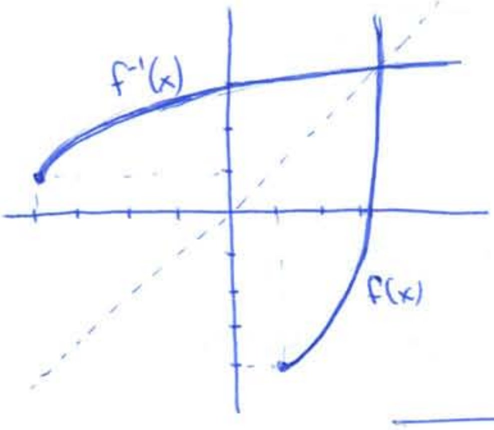
(2) a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$; $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow V(1,-4)$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \to (3,0) \\ -1 \to (-1,0) \end{cases}$; corta eje OY en $(0,-3)$



b) Para que exista $f^{-1}(x)$, $f(x)$ debe ser inyectiva, luego el dominio lo debemos restringir a una sola rama de la parábola, por ej: $Dom(f) = [1, +\infty)$.

Gráfica de $f(x)$, con $x \in [1, +\infty)$, y gráfica de $f^{-1}(x)$:



c) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$

$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow x = (y-1)^2 - 4 \Rightarrow$

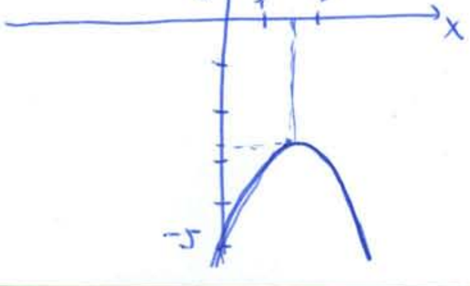
$\Rightarrow (y-1)^2 = x + 4 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x+4}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 1$.

— o —

(3) a) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$; Vértice: $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$, Eje: $x = \frac{3}{2}$

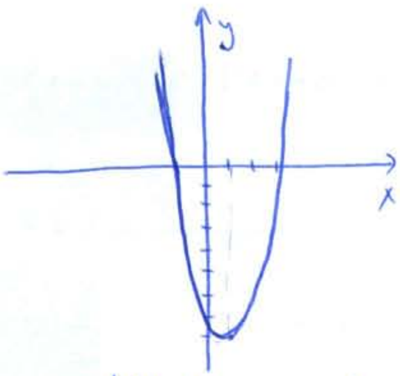
Corte eje OY: $(0,-5)$; Corte eje OX: no corta.



b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Vértice: $V(1, -8)$; eje: $x = 1$; corte eje OX $\begin{cases} (3,0) \\ (-1,0) \end{cases}$

corte eje OY: $(0, -6)$



c) $f(x) = 2(x+1)(x-3)$; corte eje OX: $\begin{cases} (3,0) \\ (-1,0) \end{cases}$; corte eje OY: $(0, -6)$

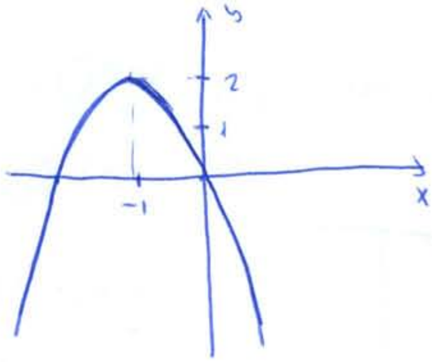
$V(1, -8)$; eje $x = 1$

La gráfica es la misma que en b)

d) $f(x) = -2x(x+2)$

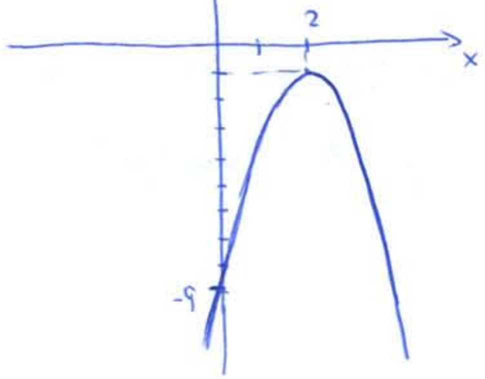
Vértice: $V(-1, 2)$; eje: $x = -1$; corte eje OX: $(0,0)$; $(-2,0)$.

Corte eje OY: $(0,0)$



e) $f(x) = -2(x-2)^2 - 1$; $V(2, -1)$; eje: $x = 2$

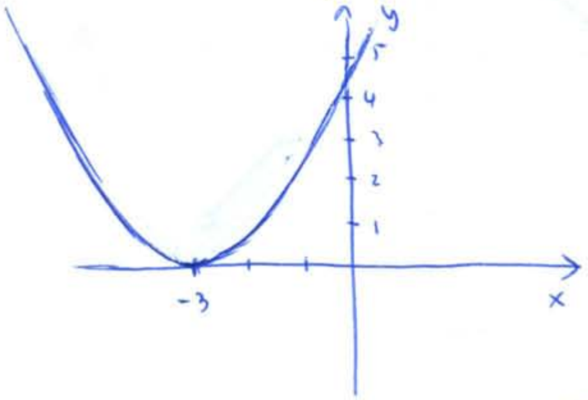
Corte eje OX: no corta ; corte eje OY: $(0, -9)$



f) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 \rightarrow$ Corte eje OX: $(-3,0)$

Corte eje OY: $(0, \frac{9}{2})$

$V(-3,0)$; eje: $x=-3$



(Comprobar las gráficas con la GDC).

---

4 a) $y = a(x-1)(x-2)$

$f(0)=4 \rightarrow a(-1)\cdot(-2)=4 \rightarrow a=2 \rightarrow f(x) = 2(x-1)(x-2)$

b) Por simetría, el segundo pto. de corte con el eje OX será $(2,0)$, luego: $y = a(x+4)(x-2)$; $f(0)=4 \rightarrow a\cdot 4\cdot(-2)=4 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$

c) $y = a(x-3)^2-2$; $f(0)=16 \rightarrow 9a-2=16 \rightarrow a=2 \rightarrow$

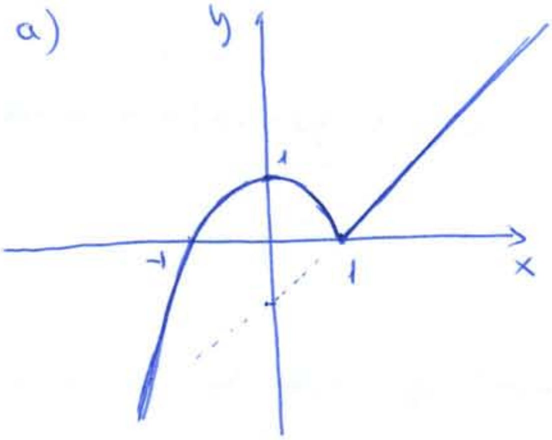
$\rightarrow f(x) = 2(x-3)^2-2$

d) $y = a(x-3)^2+8$; pasa por $(1,0) \rightarrow 4a+8=0 \rightarrow a=-2$

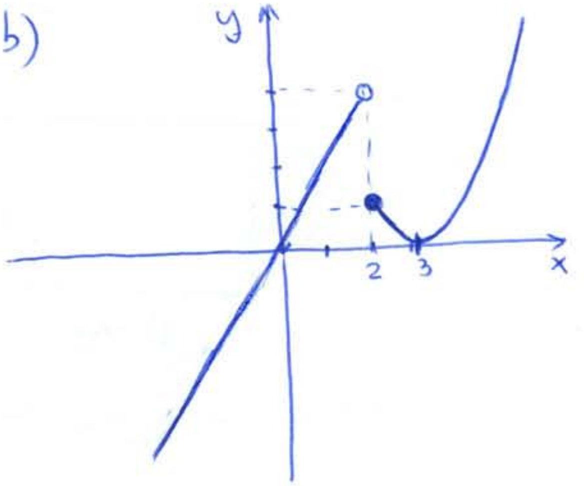
$\rightarrow f(x) = -2(x-3)^2+8$

---

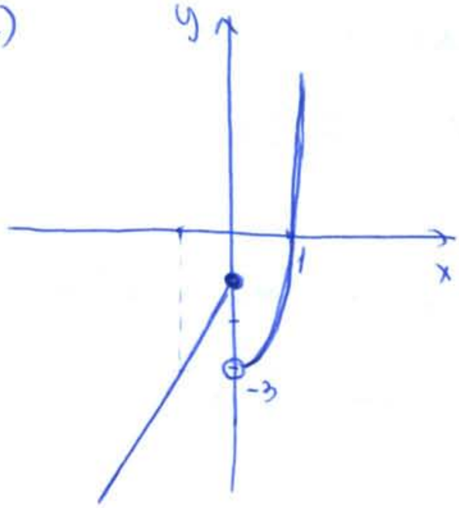
5 a)



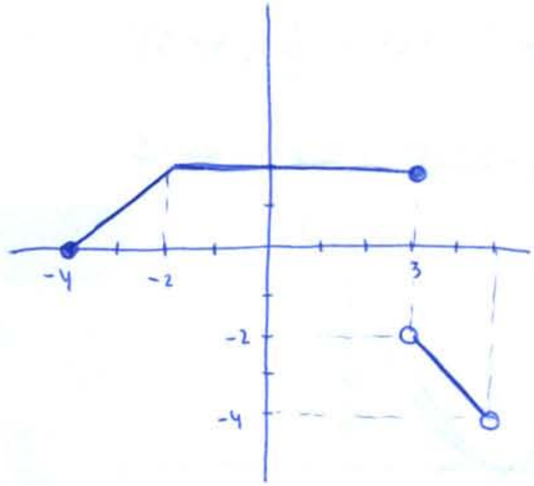
b)



c)



d)



---

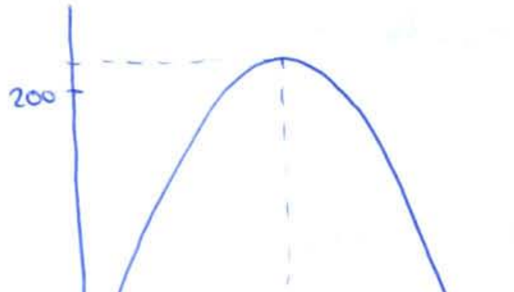
6) a) $P(0) = -30$ (pierde 30 €)

$P(10) = 105$ €

b) $P(x) = 57 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 16x - 30 = 57 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 16x - 87 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 58 \\ 6 \end{cases}$ 58 pasteles o 6 pasteles.

c) Es una función cuadrática, de gráfica:

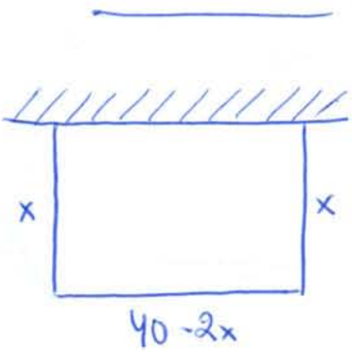


El máximo se encuentra en el vértice de la parábola: $V(32, 226)$

Luego, debe fabricar 32 pasteles, y obtendrá un beneficio máximo de 226 €

---

7) a)



$A(x) = x(40-2x) = 40x - 2x^2$

b) El máximo de la parábola está en el vértice:

$x = \frac{-40}{2\cdot(-2)} = 10$; $f(10) = 400 - 200 = 200 \rightarrow V(10, 200)$

x debe valer 10 m; el área máxima será 200 m^2.

— o —

8 a) $y = a(x-h)^2 + K$; Vértice: $P(-1,2)$

luego: $h = -1$; $K = 2 \rightarrow y = a(x+1)^2 + 2$

b) Pasa por $(1,0)$: $a\cdot 4 + 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$.

— o —

9 a) $f(x) = x^2 + bx + c = (x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$

$\Rightarrow b = -5$; $c = 6$

b) $g(x) = a(x-h)^2 + 3 = a(x-2)^2 + 3 \rightarrow h = 2$

$g(0) = 5 \rightarrow 4a + 3 = 5 \rightarrow a = \frac{1}{2}$.

— o —

10 a) $q = -2$; $r = 4$; b) $\frac{-2+4}{2} = 1 \rightarrow x = 1$ es el eje de simetría

c) Pasa por $(0,-4)$: $-4 = p\cdot(0+2)(0-4) \rightarrow -4 = -8p \rightarrow p = \frac{1}{2}$

— o —

11 a) $f(x) = -10(x+4)(x-6)$

b) $\frac{-4+6}{2} = 1$; $f(1) = -10(1+4)(1-6) = -10\cdot 5\cdot(-5) = 250 \rightarrow V(1, 250)$

$\rightarrow f(x) = -10(x-1)^2 + 250$

c) $f(x) = -10(x-1)^2 + 250 = -10(x^2 - 2x + 1) + 250 = -10x^2 + 20x + 240$

— o —

12 a) $f(x) = a(x+3)(x-1) \rightarrow p = -3$; $q = 1$

$f(0) = 12 \rightarrow a\cdot 3\cdot(-1) = 12 \rightarrow -3a = 12 \rightarrow a = -4$

b) $\frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$; eje de simetría : $x = -1$.

c) $f(-1) = -4(-1+3)(-1-1) = -4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 \Rightarrow V(-1, 16)$

luego el mayor valor de f es 16.

d) $f(x) = -4(x+1)^2 + 16 \Rightarrow h = -1$; $k = 16$.

---

(13) a) Como la parábola tiene su vértice en el eje de las x, debe ser $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow q^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0 \Rightarrow q^2 = 400 \Rightarrow q = \pm 20$.

b) Para $q = 20 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

c) $4x^2 - 20x + 25 = 4x^2 + 20x + 25 \Rightarrow 40x = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 25 \Rightarrow (0, 25)$.

---

(14) a) $f(t) = -0'25t^3 - 2'32t^2 + 1'93t + 106$

i) Cuando $t = 0 \Rightarrow f(0) = 106$ m.

ii) $f(4'5) = -0'25 \cdot (4'5)^3 - 2'32 \cdot (4'5)^2 + 1'93 \cdot 4'5 + 106 = 44'9$ m.

(Se puede dibujar la gráfica de f(t) con la GDC (menú Graph), y usar la opción Y-calc, con $X = 4'5$).

iii) $f(t) = 30 \Rightarrow t = 4'91$ s (con la opción X-calc, e $Y = 30$, en la GDC).

b) $g(t) = -5'2t^2 + 9'5t + 100 \Rightarrow g(t) = 0 \Rightarrow t = 5'39$ s.

c) Ver archivo pdf: en rojo la gráfica de f(t) y en verde la de g(t); los puntos de la tabla en azul.

Se observa que f(t) es mejor modelo, pues se ajusta mejor a los puntos.
