HOJA 13: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. a) $y=\log_2 x$ (C es la inversa de B)

   b) $(1,0)$ (ya que $\log_2 1=0$).

---

2. • Traslación de 2 unidades hacia la derecha:

$y=\log_a(x-2)+c \rightarrow \boxed{b=-2}$

• Pasa por $(3,5)$: $5=\log_a(3-2)+c \rightarrow 5=\log_a 1+c \rightarrow$

$\rightarrow \log_a 1=5-c \rightarrow 5-c=0 \rightarrow \boxed{c=5}$

• Pasa por $(5,6)$: $6=\log_a(5-2)+5 \rightarrow 6=\log_a 3+5 \rightarrow \log_a 3=1$

$\rightarrow a^1=3 \rightarrow \boxed{a=3}$

---

3. a) $y=2e^{3x} \rightarrow x=2e^{3y} \rightarrow e^{3y}=\frac{x}{2} \rightarrow 3y=\ln\frac{x}{2} \rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}\ln\frac{x}{2}}$

b) $y=2\ln(x+1) \rightarrow x=2\ln(y+1) \rightarrow \ln(y+1)=\frac{x}{2} \rightarrow e^{\frac{x}{2}}=y+1 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{y=e^{\frac{x}{2}}-1}$

c) $y=e^{-x^2} \rightarrow x=e^{-y^2} \rightarrow \ln x=-y^2 \rightarrow y^2=-\ln x \rightarrow \boxed{y=\sqrt{-\ln x}}$

d) $y=\ln(3x-4) \rightarrow x=\ln(3y-4) \rightarrow e^x=3y-4 \rightarrow 3y=e^x+4 \rightarrow \boxed{y=\frac{e^x+4}{3}}$

e) $y=4^x-2 \rightarrow x=4^y-2 \rightarrow 4^y=x+2 \rightarrow \log_4 4^y=\log_4(x+2) \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{y=\log_4(x+2)}$

f) $y=\log(2x+1)+2 \rightarrow x=\log(2y+1)+2 \rightarrow \log(2y+1)=x-2 \rightarrow$

$\rightarrow 10^{x-2}=2y+1 \rightarrow 2y=10^{x-2}-1 \rightarrow \boxed{y=\frac{10^{x-2}-1}{2}}$

---

(4) a) $y=e^{-x} \to x=e^{-y} \to \ln x=-y \to y=-\ln x=f^{-1}(x)$, $x>0$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^{-x})=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

---

(5) a) $y=e^{x-11}-8 \to x=e^{y-11}-8 \to x+8=e^{y-11} \to$

$\to \ln(x+8)=y-11 \to y=11+\ln(x+8)=f^{-1}(x)$

b) Ha de ser $x+8>0 \to x>-8 \to \mathrm{Dom}\, f^{-1}(x)=(-8,+\infty)$

---

(6) a) $g(x)=\ln 5x^3=\ln 5+\ln x^3=\ln 5+\underbrace{3\ln x}_{f(x)}=f(x)+\ln 5$

b) $g(x)=f(x)+\ln 5 \to$ la gráfica de $g(x)$ es como la de $f(x)$ pero trasladada $\ln 5$ unidades hacia arriba, según el vector $\begin{pmatrix}0\\ \ln 5\end{pmatrix}$

---

(7) a) $y=2^x \to \ln y=x\ln 2 \to y=e^{x\ln 2}=e^{0'693x}$

b) $y=3^x \to \ln y=x\ln 3 \to y=e^{x\ln 3}=e^{1'10x}$

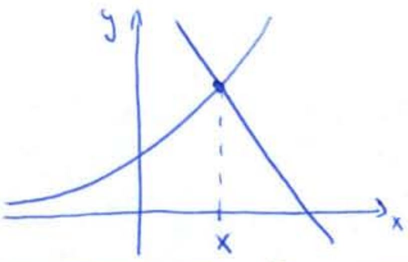
c) $y=4^{-2x} \to \ln y=-2x\ln 4 \to y=e^{-2x\cdot\ln 4}=e^{-2'77x}$

d) $y=7^{0'5x} \to \ln y=0'5x\ln 7 \to y=e^{0'5x\ln 7}=e^{0'973x}$

e) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x \to \ln y=x\ln\frac{2}{5} \to y=e^{x\ln\frac{2}{5}}=e^{-0'916x}$

---

(8) Con GDC:



$x=1'059 \simeq 1'06$

---

9 a) $f(t)=4500\,e^{-0'0113t}$; si $t=4 \rightarrow f(4)=4500\,e^{-0'0113\cdot 4}=$

$=4301'13 \simeq 4300$ árbols.

b) $4000=4500\,e^{-0'0113t} \rightarrow e^{-0'0113t}=\dfrac{40\cancel{00}}{45\cancel{00}} \rightarrow -0'0113t=\ln\dfrac{40}{45}$

$\rightarrow t=\dfrac{\ln\frac{40}{45}}{-0'0113}=10'42$ años $\rightarrow 2003+10'42=2013'42 \rightarrow$ durante el año 2013.

---

10 a) $N=5000\cdot e^{-Kt} \rightarrow 2500=5000\,e^{-K\cdot 5} \rightarrow e^{-5K}=\dfrac{250\cancel{0}}{500\cancel{0}} \rightarrow$

$\rightarrow e^{-5K}=0'5 \rightarrow -5K=\ln 0'5 \rightarrow K=\dfrac{\ln 0'5}{-5}=0'1386.$

b) $50=5000\,e^{-0'1386t} \rightarrow \dfrac{5\cancel{0}}{500\cancel{0}}=e^{-0'1386t} \rightarrow -0'1386t=\ln\dfrac{1}{100}$

$\rightarrow t=\dfrac{\ln 0'01}{-0'1386}=33'23$ años.

---

11 a) Focas A: $A(0)=5000\cdot e^{0'02\cdot 0}=5000$

Focas B: $B(0)=3500\cdot e^{0'025\cdot 0}=3500$

b) $A(10)=5000\cdot e^{0'02\cdot 10}=6107'01 \simeq 6107$ focas.

c) $7000=3500\,e^{0'025t} \rightarrow e^{0'025t}=2 \rightarrow 0'025t=\ln 2 \rightarrow$

$\rightarrow t=\dfrac{\ln 2}{0'025}=27'73$ años.

d) $A(t)=B(t) \rightarrow 5000e^{0'02t}=3500e^{0'025t} \rightarrow \dfrac{50\cancel{00}}{35\cancel{00}}=\dfrac{e^{0'025t}}{e^{0'02t}}$

$\rightarrow \dfrac{50}{35}=e^{0'025t-0'02t} \rightarrow e^{0'005t}=\dfrac{10}{7} \rightarrow 0'005t=\ln\dfrac{10}{7} \rightarrow$

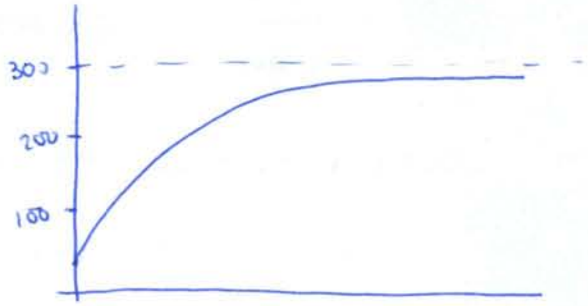
$\rightarrow t=\dfrac{\ln\frac{10}{7}}{0'005}=71'33$ años

---

(12) a) Si $t=0 \rightarrow f(t)=30 \rightarrow 30=n_0(1-0'9e^{-0'15\cdot 0}) \rightarrow$

$\rightarrow 30=n_0(1-0'9) \rightarrow 30=0'1n_0 \rightarrow n_0=\frac{30}{0'1}=300$

b)



con GDC.

c) $f(6)=300(1-0'9e^{-0'15\cdot 6})=190'23$ truchas

d) $y=300$ es asíntota horizontal, luego a largo plazo el nº de truchas se estabilizará en 300, sin sobrepasar este límite.

---

(13) a) i) $D=1420+100\cdot 10=2420$

ii) $2000=1420+100n \rightarrow n=5'8$ años $\rightarrow 1994+5'8=1999'8 \rightarrow$ a finales del año 1999

b) i) $P=1200000\cdot 1'025^{10}=1.536.101'453$

ii) % crecimiento: $\frac{1536101'453-1200.000}{1.200.000}=0'28=28\%$

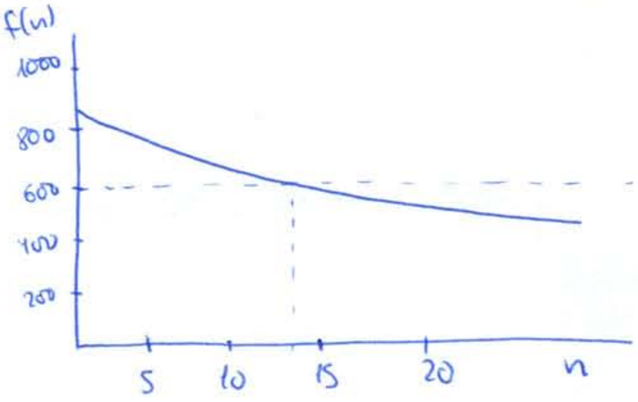
iii) $2.000.000=1.200.000\cdot 1'025^n \rightarrow 1'025^n=\frac{20}{12} \rightarrow n\log 1'025=\log\frac{5}{3}$

$\rightarrow n=\frac{\log\frac{5}{3}}{\log 1'025}=20'69$ años. $1999+20'69=2014'69 \rightarrow$ durante el 2014.

c) i) $\frac{P}{D}=\frac{1200000}{1420}=845'07$ personas / médico.

ii) $\frac{P}{D}=\frac{1200.000\cdot 1'025^n}{1420+100n}=600$

Representando la función $f(n)=\frac{1200.000\cdot 1'025^n}{1420+100n}$ con la GDC:



$f(n) = 600 \to n = 14'20$

Después de 15 años completos (a comienzos de 2009).

---

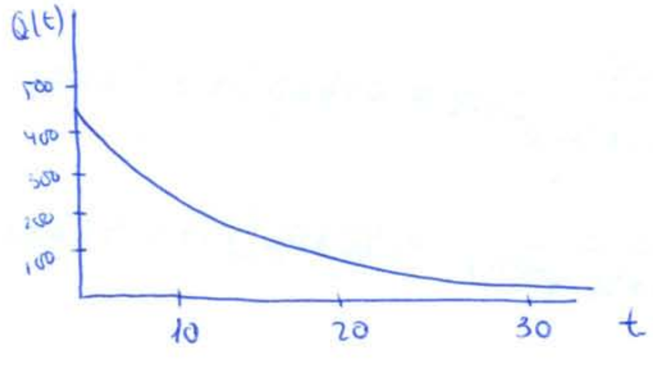
(14) a) $Q(5) = 250 \to Q_0 e^{-0'1151 \cdot 5} = 250 \to Q_0 = \dfrac{250}{e^{-0'5755}} = 444'50$

b) $Q(10) = Q_0 \cdot e^{-0'1151 \cdot 10} \to \dfrac{Q(10)}{Q_0} = e^{-0'1151 \cdot 10} = 0'3163 = 31'63\ \%$

c) $\dfrac{Q(t)}{Q_0} = \dfrac{1}{2} \to e^{-0'1151 t} = \dfrac{1}{2} \to -0'1151 t = \ln\dfrac{1}{2} \to t = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{-0'1151} =$

$= 6'022$ segundos

d)



---

(15) a) $\ln W = \ln 2'4 + 1'84 \cdot 1'5 = 3'635 \to W = e^{3'635} = 37'92$ Kg.

b) $\ln 50 = \ln 2'4 + 1'84 h \to \ln 50 - \ln 2'4 = 1'84 h \to h = \dfrac{\ln 50 - \ln 2'4}{1'84} =$

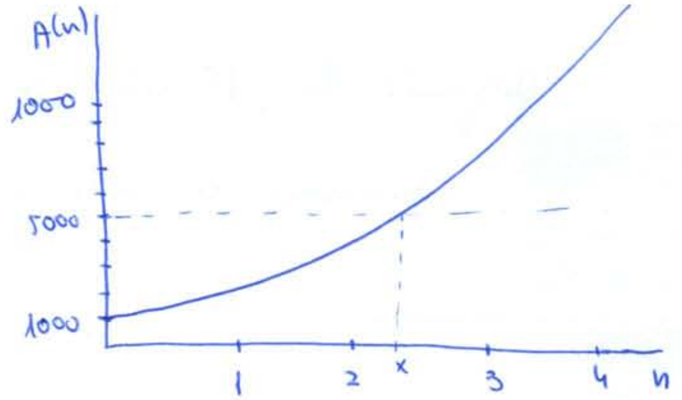
$= 1'65$ m

c) $\ln W - \ln 2'4 = 1'84 h \to \ln \dfrac{W}{2'4} = 1'84 h \to e^{1'84 h} = \dfrac{W}{2'4} \to$

$\to \boxed{W(h) = 2'4 \cdot e^{1'84 h}}$

---

(16) a) $A(n) = 1000e^{0'7n}$



$y = 5000 \rightarrow x = 2'30$ semanas

(con GDC)

b) $5000 = 1000\, e^{0'7n} \rightarrow 5 = e^{0'7n} \rightarrow 0'7n = \ln 5 \rightarrow n = \dfrac{\ln 5}{0'7} = 2'30$

---

(17) a) i) $n=5 \rightarrow T = 280 \cdot 1'12^5 = 493'46 \simeq 493$ taxis.

ii) $560 = 280 \cdot 1'12^n \rightarrow 1'12^n = 2 \rightarrow n \log 1'12 = \log 2 \rightarrow$

$\rightarrow n = \dfrac{\log 2}{\log 1'12} = 6'12 \rightarrow 2000 + 6'12 = 2006'12 \rightarrow$ durante el 2006.

b) i) $n=5 \rightarrow P = \dfrac{2560000}{10 + 90\, e^{-0'1 \cdot 5}} = 39635'99 \simeq 39.636$ personas

ii) $n=7 \rightarrow P = \dfrac{2560000}{10 + 90 \cdot e^{-0'1 \cdot 7}} = 46806'997 \simeq 46807$ personas

No es el doble.

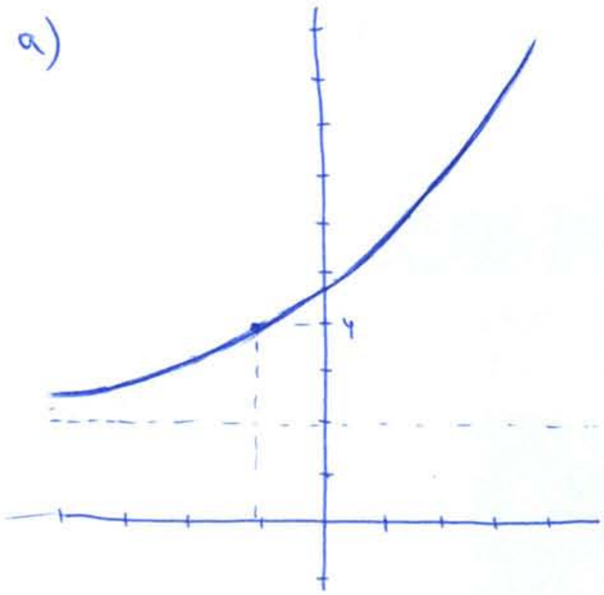
c) i) $R = \dfrac{P}{T} = \dfrac{25600}{280} = 91'4$ personas/taxi en 2000 (finales)

ii) $R = \dfrac{2560000}{10+90\, e^{-0'1n}} : 280 \cdot 1'12^n = \dfrac{2560.000}{280 \cdot 1'12^n (10 + 90\, e^{-0'1n})} < 70$

Con GDC: $n = 9'3 \rightarrow$ Después de 10 años completos.

---

18 a)



$f(x)=e^{x+1}+2$

(traslación de 2 unidads hacia arriba y 1 hacia la izquierda respecto a $y=e^x$).

b) $g(x)=f(x-3)-1=e^{x-3+1}+2-1=e^{x-2}+1$

---

19 a) $A(0)=12e^{0'4\cdot 0}=12$ bacterias.

b) $A(4)=12e^{0'4\cdot 4}=59'4$ bacterias $\simeq 59$.

c) $400=12e^{0'4t} \to \frac{400}{12}=e^{0'4t} \to \ln\frac{100}{3}=0'4t \to$

$\to t=\frac{\ln\frac{100}{3}}{0'4}=8'77$ horas.

d) $B(4)=60 \to 24e^{K\cdot 4}=60 \to e^{4K}=\frac{60}{24} \to 4K=\ln\frac{5}{2}$

$\to K=\frac{\ln 5/2}{4}=0'229$.

e) $12e^{0'4t}=24e^{0'229t} \to \frac{24}{12}=\frac{e^{0'4t}}{e^{0'229t}} \to 2=e^{0'171t} \to$

$\ln 2=0'171t \to t=\frac{\ln 2}{0'171}=4'05 \to$ luego han de transcurrir

5 horas completas
