INDUCCIÓN EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demostrar que la suma de los η primeros números naturales es igual a $\eta(\eta +1)/2$.

   Solución: Queremos probar que

   $$\forall\eta \in N : 1 + 2 + 3 + \ldots + \eta = \eta(\eta +1)/2$$

   Sea $\rho(\eta) : 1 + 2 + 3 + \ldots + \eta = \eta(\eta +1)/2$; debemos probar que $\rho(\eta)$ satisface las propiedades (1) y (2) del teorema 2.

   (1) $\rho(1)$: $1 = 1(1 + 1)/2$, lo cual es verdadero.

   (2) Sea $\eta \in N$, debemos probar que $\rho(\eta) \Rightarrow \rho(\eta + 1)$ es verdadero. Nótese que *si* $\rho(\eta)$ *es falsa la implicación es verdadera,* de modo que *hay que hacer la demostración suponiendo que* $\rho(\eta)$ *es verdadera.* (Esto es lo que se llama *hipótesis inductiva).*

   Supongamos entonces que $\rho(\eta)$ es verdadera, es decir, que $1 +2 +3 + ... + \eta = \eta(\eta+1)/2$ es verdadera.

   Como $\rho(\eta+1) : 1 +2 +3 + ... + (\eta+1) = (\eta+1) [(\eta+1) + 1] /2$,
   $\rho(\eta+1)$ debe poder formarse de $\rho(\eta)$ sumando $\eta+1$ a ambos miembros de la igualdad (de la hipótesis inductiva) :

   $$\begin{aligned} 1 +2 + 3 + \ldots + \eta+ (\eta+1) &= \eta(\eta+1)/2 + (\eta+1) \\ &= (\eta+1) [\eta /2+1] \\ &= (\eta+1) (\eta+2) /2 \end{aligned}$$

   Hemos confirmado nuestras sospechas, lo que, en lenguaje formal, significa que hemos deducido que $\rho(\eta+1)$ es verdadera, suponiendo que $\rho(\eta)$ lo es. Así, hemos probado que $\forall\eta \in N : \rho(\eta) \Rightarrow \rho(\eta+1)$ es verdadera.

   Luego, $\forall\eta \in N : 1 +2 + 3 + \ldots + \eta = \eta (\eta+1) /2$ es una *fórmula correcta.*

2. Probar que , $\forall \eta \in N$: $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+\eta(\eta+2) = \eta(\eta+1)(2\eta+7)/6$.

Solución : Sea $\rho(\eta) : 1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+\eta(\eta+2) = \eta(\eta+1)(2\eta+7)/6$

Entonces $\rho(1) : 1\cdot3 = 1\cdot(1+1)(2\cdot1+7)/6 = 2\cdot9/6 = 3$,

prueba que $\rho(1)$ es verdadera.

Hipótesis inductiva :

$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+\eta(\eta+2) = \eta(\eta+1)(2\eta+7)/6$
(suponemos que $\rho(\eta)$ es verdadera)

Tesis : $1\cdot2+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+(\eta+1)(\eta+3) = (\eta+1)(\eta+2)(2\eta+9)/6$
(queremos probar que $\rho(\eta+1)$ es verdadera)

Tenemos : $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\ldots+\eta(\eta+2) + (\eta+1)(\eta+3) =$
$= \eta(\eta+1)(2\eta+7)/6 + (\eta+1)(\eta+3)$
$= (\eta+1)/6[\eta(2\eta+7) + 6(2\eta+7)]$
$= (\eta+1) [(2\eta^2 + 13\eta + 18)]/6$
$= (\eta+1)(2\eta+9)(\eta+2)/6$

lo que prueba que $\rho(\eta+1)$ es verdadera.

Luego, la fórmula es verdadera para todo $\eta \in N$

3. Determinar si el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6

   Solución : Sea $\rho(\eta) : (2\eta-1)(2\eta+1)(2\eta+3) = 6q$, donde q es algún número natural.
   Queremos determinar si $\rho(\eta)$ se cumple $\forall \eta \in N$.

   $\rho(1) : 1\cdot3\cdot5 = 6q \Rightarrow q = \dfrac{5}{2} \notin N \therefore \rho(1)$ es falso. Luego $\rho(\eta)$ no es necesariamente cierto para todo $\eta \in N$.

4. Determinar si la suma de 3 enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

Solución : Sea $\rho(\eta)$: $\eta+(\eta+1)+(\eta+2)=6q$, $q \in N$.
Entonces $\rho(1)$: $1+2+3=6$ es verdadera $[q=1]$

Hipótesis inductiva : $\rho(\eta)=\eta+(\eta+1)+(\eta+2)=6q_1$, $q_1 \in N$ es verdadera.

Por dem. $\rho(\eta+1) = (\eta+1)+(\eta+2)+(\eta+3) = 6q_2$, $q_2 \in N$ es verdadera

$$(\eta+1)+(\eta+2)+(\eta+3) = \{(\eta+1)+(\eta+2)+\eta\}+3 = 6q_1 + 3 =$$
$$6(q_1+\frac{1}{2}). \text{ Pero } q_1+\frac{1}{2} \notin N.$$

Luego $\rho(\eta)$ verdadero no implica $\rho(\eta+1)$ verdadero.

Por lo tanto, $\rho(\eta)$: $\eta+(\eta+1)+(\eta+2) = 6q$, $q \in N$, es falso. La suma de 3 enteros consecutivos no es necesariamente divisible por 6.

NOTAS : (1) ejercicio 3 y 4 muestran que las propiedades (1) y (2) del teorema 2 son necesarias.

(2) en los ejercicios siguientes no se explicitarán las funciones proposicionales $\rho(\eta)$; el lector no tendrá dificultades en identificarlas.

5. Determinar todos los números naturales para los cuales :
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \eta > 2^n$.

Solución : La fórmula no es válida para $\eta = 1, 2, 3$.

Para $\eta = 4$, se tiene que: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 = 16$ es verdadero

Supongamos que la desigualdad es válida para $k \in N$, con $k \geq 4$; esto es $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k > 2^k$, $k \geq 4$.

Por demostrar que la desigualdad es válida para $k+1$, es decir que
$$1 \cdot 2 \cdot \ldots (k+1) > 2^{k+1}, \quad k \geq 4 .$$
En efecto :

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1) = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k) \cdot (k+1) > 2^k \cdot (k+1)$$

$$> 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$
Luego $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1) > 2^{k+1}$, y por lo tanto:
$\forall \eta \in N$, $\eta \geq 4$: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \eta > 2^\eta$ [*teorema* 3]

6. Demostrar por inducción, que si η es impar, $7^{\eta} + 1$ es divisible por 8.

Solución: Antes de aplicar inducción conviene hacer un cambio de índices.
Sea $\eta = 2i - 1$.

Entonces si $i = 1,2,3, \ldots$ se tiene que $\eta = 1,3,5, \ldots$, y nuestro enunciado se transforma en :

$7^{2i-1} + 1$ *es divisible por* 8 , $\forall i \in N$.

Para $i = 1$: $7^{1} + 1$ es divisible por 8 es una proposición verdadera.

Hipótesis inductiva: $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8.

Tesis: $7^{2i+1} + 1$ es divisible por 8.

Dado que nuestra única información es la hipótesis debemos hacer que la expresión $7^{2i-1} + 1$, aparezca en nuestro desarrollo.

$$7^{2i+1} + 1 = 7^{2}\,(7^{2i-1})\ + 1 = 7^{2}\,(7^{2i-1} + 1) - 7^{2} + 1$$

$$= 7^{2}\,(7^{2i-1} + 1) - 48$$

y aquí ambos sumandos son divisibles por 8

Luego: 8 divide a : $7^{2i+1} + 1$

Así, por teorema (2) resulta que $7^{\eta} + 1$ es divisible por 8 para todo η impar

7. Se define $f : N \to N$ en la forma siguiente

$$f(1) = 25 \text{ y } \forall \eta \in N : \quad f(\eta+1) = f(\eta) + 4$$

a) Examinando algunos valores de f, conjeturar una fórmula para f en términos de η.

b) Demostrar la conjetura de a)

Solución : a) $f(1) = 25$, $f(2) = f(1) + 4 = 25 + 4$

$f(3) = f(2) + 4 = 25 + 2 \cdot 4$,

$f(4) = f(3) + 4 = 25 + 3 \cdot 4$

una fórmula razonable para f parece ser

$$f(\eta) = 25 + (\eta-1) \cdot 4$$

b) Si $\eta = 1$ tenemos

$25 + (1-1) \cdot 4 = f(1)$; lo que prueba que la fórmula es válida para 1.

Supongamos que para $\eta \in N$ la fórmula es verdadera, entonces,

$$\begin{aligned} f(\eta + 1) &= f(\eta) + 4 && \left[\textit{definición de } f\right] \\ &= 25 + (\eta - 1) \cdot 4 + 4 && \left[\textit{hipótesis inductiva}\right] \\ &= 25 + \eta \cdot 4, \end{aligned}$$

prueba que también es verdadera para $\eta + 1$.

Luego, el teorema (2) nos dice que $\forall \eta \in N$

$f(\eta) = 25 + (\eta - 1) \cdot 4$ es verdadera.

8.- Sean a_1, a_2, ... , $a_\eta \in (-1, 0]$. Probar que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_\eta) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\eta$$

Solución: Si $\eta = 1$, la desigualdad es $1 + a_1 \geq 1 + a_1$, que ciertamente es verdadera.

Supongámosla válida para algún $\eta \in N$, entonces
$(1+ a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_\eta) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\eta$.

Si $a_{\eta+1} \in (-1,0]$, entonces $1 + a_{\eta+1} > 0$, con lo que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_\eta)(1+ a_{\eta+1})$$

$$\geq (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\eta)(1+ a_{\eta+1})$$

$$\geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\eta + a_{\eta+1} + a_1 a_{\eta+1} + a_2 a_{\eta+1} + \ldots + a_\eta a_{\eta+1}.$$

Pero $a_1 a_{\eta+1} \geq 0$, $a_2 a_{\eta+1} \geq 0$, ... , $a_\eta a_{\eta+1} \geq 0$ luego

$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1+ a_{\eta+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\eta+1}$, relación que prueba que la desigualdad es válida para $\eta + 1$. Así, ésta es verdadera para todo $\eta \in N$.