① $A+B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+d & e \end{pmatrix}.$

$AB = A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot d & a \cdot 0 + b.e \\ c.1 + 0 \cdot d & c.0 + 0.e \end{pmatrix} =$

dimensiones: $(2\times 2)\ (2\times 2) \rightarrow 2\times 2$

$= \begin{pmatrix} a+bd & be \\ c & 0 \end{pmatrix}.$

② dim $A = (2\times 2)$

dim $AB = (2\times 1)$

luego dim $B = (2\times 1)$ ↳ SI

dim $CA = (2\times 1)$

↳ imposible pues A tiene 2 columnas.

↳ NO

③ $A \cdot (B+C)$

$p\times q$ $3\times m$ $n\times 4$

dim B = dim C para poder sumar

por tanto: $\boxed{3=n,\ m=4}$.

ambos, y su suma: (3×4)

dim $A(B+C) = (p\times q)\cdot(3\times 4) = (p\times 4)$

por tanto: $q=3$ y $p=4$ porque sea cuadrada; sol: $\boxed{\begin{matrix} m=4 & n=3 \\ p=4; & q=3 \end{matrix}}$

④ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$-3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

por definición de matriz UNIDAD de orden 3.

$A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 15 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$ sol.

⑤ $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \\ -x \quad +z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+2y+z = 0 \\ -x \quad +z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -z=-2 \\ -x+z=0 \end{cases}$

(mét. GAUSS) $F_2 - 2F_1 = F_1'$

$\boxed{\begin{cases} y=-3 \\ z=2 \\ x=2 \end{cases}}$ sol.

⊛ TEORÍA IMPORTANTE :

"PRINCIPIO DE INDUCCIÓN"

(Estudiar)

⑥ $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^1\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = a\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a^2 & 3a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = a^2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} a^2 & 4a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^3\begin{pmatrix} a & 4 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

sol:

$\boxed{A^{100} = a^{99}\begin{pmatrix} a & 100 \\ 0 & a \end{pmatrix}}$

$\Uparrow$

Hipótesis: $A^k = a^{k-1}\begin{pmatrix} a & k \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$ aplicando (hágase) el P. de Inducción $\Rightarrow A^n = a^{n-1}\begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$

(cont →)