# SOLUCIONARIO: SISTEMAS LINEALES – ponte a prueba

①

$$AP=PA \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+2c=a\\b+2d=2a+b\\c=c\\d=2c+d\end{cases}\quad\begin{cases}2c=0\\d=a\\c=c\\2c=0\end{cases}\quad\begin{cases}\boxed{c=0}\\\boxed{a=d}\\c=c\ ✓\\c=0\ ✓\end{cases}$$

$$\boxed{P=\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}}\quad a,b\in\mathbb{R}$$

Solución.

②

$$\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}}_{B}\Leftrightarrow AX=B\qquad \boxed{X=A^{-1}B}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{vmatrix}=2+0+5-(-5-4+0)=16\neq 0$$

$\exists A^{-1}\Rightarrow$ A es regular $\Rightarrow$ S. C. Determinado (solución Única)

M. Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&5&7\\1&1&-2&-2\\-1&1&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\2F_2-F_1\\2F_3+F_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&5&7\\0&2&-9&-11\\0&2&7&5\end{array}\right)\overset{F_3-F_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&5&7\\0&+2&-9&-11\\0&0&16&16\end{array}\right)\sim\begin{cases}2x+5z=7\\2y-9z=-11\\16z=16\end{cases}\quad \text{sol:}\ \boxed{\begin{cases}x=2\\y=-1\\z=1\end{cases}}$$

③ a)

$$|A|=\begin{vmatrix}x&y&x\\y&0&y\\1&z&z\end{vmatrix}=0+y^2+\cancel{zyx}-(0+\cancel{xyz}+y^2z)$$

$$=y^2-y^2z=\boxed{y^2(1-z)}$$

Si $|A|=0\Rightarrow\nexists A^{-1}$

$$y^2(1-z)=0\Rightarrow\begin{cases}y^2=0\\ \vee\ (ó)\\ 1-z=0\end{cases}\quad\begin{cases}\boxed{y=0}\\ ó/y\\ \boxed{z=1}\end{cases}$$

b) $BA=C\to$ S. Comp.?

$$\underset{1\times3}{(a\ 2\ 3)}\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}x&y&x\\y&0&y\\1&z&z\end{pmatrix}}=\underset{1\times3}{(4\ 0\ 2)}\Rightarrow\begin{cases}ax+2y+3=4\\ay+3z=0\\ax+2y+3z=2\end{cases}\quad\begin{cases}ax+2y=1\\ay+3z=0\\ax+2y+3z=2\end{cases}\sim\underbrace{\begin{pmatrix}a&2&0\\0&a&3\\a&2&3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{B}\sim$$

$\sim AX=B\Rightarrow\boxed{X=A^{-1}B}$, si $\exists A^{-1}$ $(|A|\neq0)$

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}a&2&0\\0&a&3\\a&2&3\end{vmatrix}\underset{\text{R. Sarrus}}{=}3a^2+\cancel{6a}+0-(0+\cancel{6a}+0)=\boxed{3a^2}\Rightarrow$$

Discusión

$$\begin{cases}a=0\Rightarrow \text{S. } \cancel{\text{Comp}}\ \text{Incompatible}\ \cancel{\text{indeterm}}\ (?)\\ a\neq0\Rightarrow\boxed{\text{S. Compatible Determ}}\end{cases}$$

sol.

c) $\boxed{a=0}$

$$\begin{cases}2y=1\\3z=0\\2y+3z=2\end{cases}\quad\begin{cases}y=1/2\\z=0\\y=1\end{cases}\Big\rangle\ \text{Imposible}-\boxed{\text{S. Incompatible}}\ \text{Sol}$$

$\boxed{a\neq0}$ R. Cramer

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{1}{3a^2}\begin{vmatrix}1&2&0\\0&a&3\\2&2&3\end{vmatrix}=\frac{3a+12-6}{3a^2}=\frac{3a+6}{3a^2}=\boxed{\frac{a+2}{a^2}}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{3a^2}\begin{vmatrix}a&1&0\\0&0&3\\a&2&3\end{vmatrix}=\frac{3a-6a}{3a^2}=\frac{-3a}{3a^2}=\boxed{-\frac{1}{a}}$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{1}{3a^2}\begin{vmatrix}a&2&1\\0&a&0\\a&2&2\end{vmatrix}=\frac{2a^2-a^2}{3a^2}=\frac{a^2}{3a^2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

sol: $\boxed{x=\dfrac{a+2}{a^2},\quad y=-\dfrac{1}{a},\quad z=\dfrac{1}{3}}$

④ $\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2a\\a^2\end{pmatrix}$ ; $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}\underset{\text{R.Sarrus}}{=}2-1-(1)=0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$, $rg(A)=2$ (menor $\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq0$)

a) Gauss

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}-1\\2a\\a^2\end{matrix}\end{array}\right)}_{A^*}\underset{F_3-F_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&1&1&2a\\0&1&1&a^2+1\end{array}\right)\underset{F_3-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&1&1&2a\\0&0&0&\underbrace{a^2-2a+1}_{(a-1)^2}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } a=1,\ rg(A^*)=2\\ \text{Si } a\neq1,\ rg(A^*)=3\end{cases}$$

Discusión

Si $a=1 \Rightarrow rg(A)=2=rg(A^*)<3=$ nº incógnitas : S. Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

Si $a\neq1 \Rightarrow rg(A)=2\neq3=rg(A^*)$ : S. Incompatible

b) $\boxed{a=0}\Rightarrow$ S. Incompatible (no hay solución). sol.

c) $\boxed{a=1}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\begin{cases}x-y+z=-1\\ y+z=2\\ \boxed{0=0}\end{cases}\begin{cases}x-y=-1-z\\ y=2-z\end{cases}\boxed{\begin{array}{l}x=1-2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}}\ \lambda\in\mathbb{R}$

---

⑤ $\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\end{array}\right)}_{A^*}$ ; $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{vmatrix}\underset{\text{R.Sarrus}}{=}\alpha^3+1+1-(\alpha+\alpha+\alpha)=\alpha^3-3\alpha+2\underset{\text{R.Ruffini}}{=}\boxed{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}$

$$\begin{array}{r|rrrr}&1&0&-3&2\\1&&1&1&-2\\\hline&1&1&-2&0\\1&&1&2&\\\hline&1&2&0&\end{array}$$

a) Si $\boxed{\alpha\neq1 \text{ y } \alpha\neq-2}$, $|A|\neq0$ $\exists A^{-1}$ (A es regular) $\Rightarrow$ S. Compatible Determinado (s. única) sol.

Si $\boxed{\alpha=1 \text{ ó } \alpha=-2}$, $|A|=0$, $\nexists A^{-1}$ (A es singular) $\Rightarrow rg(A)<3$

$\boxed{\alpha=1}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ : $rg(A)=1=rg(A^*)<3$ S.C. Indeterminado (Infinitas soluciones) sol

$\boxed{\alpha=-2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{array}\right)\underset{\substack{2F_2+F_1\\2F_3+F_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\0&-3&3&3\\0&3&-3&3\end{array}\right)\underset{F_3+F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\0&-3&3&3\\0&0&\boxed{0}&\boxed{6}\end{array}\right)\Rightarrow rg(A)=2\neq3=rg(A^*)$

S. Incompatible. No tiene solución. sol

b) R. Cramer ; $\boxed{\alpha\neq1}\boxed{\alpha\neq-2}$ $\Delta=|A|=(\alpha-1)^2(\alpha+2)$

$$x=\frac{\Delta(x)}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}(\alpha^2+1+1-\alpha-1-\alpha)=\frac{\cancel{\alpha^2-2\alpha+1}}{\cancel{(\alpha-1)^2}(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

$$y=\frac{\Delta(y)}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\alpha&1&1\\1&1&1\\1&1&\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}(\alpha^2+1+1-1-\alpha-\alpha)=\frac{\cancel{\alpha^2-2\alpha+1}}{\cancel{(\alpha-1)^2}(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

$$z=\frac{\Delta(z)}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}(\alpha^2+1+1-\alpha-\alpha-1)=\frac{\cancel{\alpha^2-2\alpha+1}}{\cancel{(\alpha-1)^2}(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

sol: $\boxed{x=y=z=\dfrac{1}{\alpha+2}}$

c) Si $\boxed{\alpha=0}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{array}\right)\underset{F_2-F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\underset{F_1+F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&2&1\\0&-1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\begin{cases}2z=1\\-y+z=0\\x+y=1\end{cases}$

sol: $\boxed{\begin{array}{l}z=1/2\\y=1/2\\x=1/2\end{array}}$

(*)

sigue →

→(✱) **Nota al apartado c) del 5** Como el enunciado pide "razonadamente" se puede "razonar" la solución SIN RESOLVER el sistema por los métodos convencionales ASÍ:

Para $\alpha = 0$ $\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x \quad +z=1 \\ x+y \quad =1 \end{array}\right.$ es completamente simétrico, es decir si cambiamos entre sí las letras $x, y, z$, el sistema no cambia en absoluto, luego las tres valdrán lo mismo $\boxed{x=y=z}$

Si sumamos las 3 ecuaciones: $2x+2y+2z=3 \Rightarrow 2(x+y+z)=3 \Rightarrow \boxed{x+y+z=\frac{3}{2}}$

y como son iguales, cada una será $1/2$, $\boxed{x=y=z=\frac{1}{2}}$, como obtuvimos antes.

---

(6) Sea: A: nº vehículos marca A
B: nº vehículos " B
C: nº vehículos " C

$10000A + 15000B + 20000C = 332 \cdot 10^6$ (€)
$A+B+C = 21000$ (vehículos)
$\alpha A + B = 21000$ (vehículos)

a) $\boxed{\left\{\begin{array}{ll} A+B+C & = 21000 \\ \alpha A + B & = 21000 \\ 10A + 15B + 20C & = 332000 \end{array}\right.}$ sol.

b) Si $\boxed{\alpha = 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 3 & 1 & 0 & 21000 \\ 10 & 15 & 20 & 332000 \end{array}\right) \underset{20F_1-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 3 & 1 & 0 & 21000 \\ 10 & 5 & 0 & 88000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 420000 \\ -332000 \\ \hline 88000 \end{array}$$

$$\underset{5F_2-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 3 & 1 & 0 & 21000 \\ 5 & 0 & 0 & 17000 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 105000 \\ -88000 \\ \hline 17000 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} A+B+C & =21000 \\ 3A+B & =21000 \\ 5A & =17000 \end{array}\right. \qquad A = \frac{17000}{5} \notin \mathbb{Z}$$

No hay solución pues A debe ser entero natural

c) la pregunta NO TIENE SENTIDO: o no hay solución o las hay y son reales. Otra cosa sería que pudieran darse valores incoherentes con el problema, por ejemplo valores de A, B ó C negativos, o no enteros (como es el caso.

---