

① a)
$$\begin{pmatrix} x & y & z & c \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{4E_1 - E_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4E_2 + E_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y + 3z = -1 \\ 22z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

S.C.D. sol (*)

b)
$$\begin{pmatrix} x & y & z & c \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 - E_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3E_1 - E_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 - E_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = \frac{5}{2}z \\ z = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sistema HOMOGÉNEO

S.C.I. (Algunos textos dicen simplemente Sistema Homogéneo Compatible ya que todo sistema homogéneo tiene la solución TRIVIAL $x=y=z=0$)
(... pero no es muy correcto ya que todos los sistemas homogéneos son COMPATIBLES)

c)
$$\begin{pmatrix} x & y & z & c \\ 5 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 - 3E_3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -22 & 22 & -2 \\ 1 & 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-E_2}{2}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 - 5E_3} \begin{pmatrix} 0 & -33 & 33 & -10 \\ 0 & -11 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 + 3E_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 11 & -11 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 0 = -7 \\ 11y - 11z = 1 \\ x + 7y - 6z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{S.I.}$$

sol.

d)
$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & c \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 9 & -5 & 23 \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2E_1 + E_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 21 \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3E_1 - 2E_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 21 \\ 0 & 7 & -7 & 7 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 + E_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x + 3y + z + t = 1 \\ -y + z - t = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 - z - t \\ -y = 3 - z + t \end{cases}$$

S.C.I.
$$\begin{cases} x = -2\alpha + \beta + 5 \\ y = \alpha - \beta - 3 \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sol.

e)
$$\begin{pmatrix} x & y & z & c \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 - E_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2E_1 - E_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 - E_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

S.C.D.
Sistema HOMOGÉNEO

(algunos textos califican a este tipo de sistema como "homogéneo incompatible" ya que solo tienen la solución TRIVIAL $x=y=z=0$, pero no es muy correcto). Debe explicarse esta particularidad.

(*) Para abreviar, en adelante, abreviaremos Sistema Compatible Determinado (SCD), Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) y Sistema Incompatible o Imposible (S.I.) Pero en una "prueba convencional de control o examen" deberá explicarse su significado.

① (→ cont.).

f)
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 18 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_2 - 2E_3 \\ E_1 - 3E_3}} \begin{pmatrix} 0 & 19 & 38 \\ 0 & 19 & 38 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_1 - E_2 \\ \frac{1}{19}E_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 0=0 \\ y=2 \\ x-7y=-10 \end{cases} \sim \begin{cases} \text{S.C.D.} \\ y=2 \\ x=4 \end{cases} \text{ sol}$$

② a) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$
 $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$
 $A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$; $A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$; $A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -12$
 $A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 5 = -4$; $A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$; $A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$
 $A_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$; $A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3$; $A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 2A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 1 \cdot 1 - 2(-4) + 1 \cdot 1 = 10$; $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ sol.

b) $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -12 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 3/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$ sol.
 $AX = B \quad X = A^{-1}B$

③ a) $AA^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark + 1 - a = 0 \\ \checkmark + 1 - b = 0 \\ -2 - 2 + a = 0 \\ \checkmark - 2 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \\ a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \text{ ok}$
 $A \cdot X = B$
sol. $\begin{cases} i) a=4; b=7 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}$ sol.

c) $\underline{X} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$ sol.

④
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}}_A \quad \begin{matrix} A: \text{matriz del sistema} \\ A': \text{matriz ampliada con} \\ \text{los términos independientes.} \end{matrix}$$

 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 + 3 + 18 - 3 - 2m = -5m + 22$
 $\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$
 $\text{Si } |A'| = 0 \Leftrightarrow m = \frac{22}{5}$
 $\text{entonces } \text{rg}(A') = 2$

(Teorema de Rouché-Frobenius!)
 Si $\boxed{m = \frac{22}{5}}$ $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 2 \Rightarrow \text{S. Compatible determinado } (n=2)$
sol.

(→)

→ (cont)

- ⑥ a) S.C.I. b) S.I. c) NO, pues basta que las ecuaciones (excedente en número mayor que el de incógnitas) sean combinación lineal de las restantes para que el sistema sea S.C. Dº Ind.
 d) NO, pues puede que haya ecuaciones que no sean combinación lineal de las restantes en número superior al de incógnitas: Ejemplo:
$$\begin{cases} E_1 & x - y = 2 \\ E_2 & -2x + 3y = 5 \\ E_3 & -x + 2y = 0 \end{cases}$$
 es S.I. porque las ecuaciones E_1 y E_2 son independiente linealmente y la E_3 es independiente de las anteriores, siendo así $rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$ (T. de Rouché-Frobenius)

- ⑦ Basta añadir una combinación lineal de las dos primeras, exceptuando el término independiente: por ejemplo ...
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ E_1 + E_2 + 0 \cdot z = 1 \quad (\neq 5+4) \end{cases}$$
 será S.I. pues $rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$

- ⑧ p: n° cajas pequeñas (250g)
 m: " " medianas (500g)
 g: " " grandes (1kg)
 4000 pta/kg = 4 pta/gramos.
- a)
$$\begin{cases} p + m + g = 60 \\ p = m + 5 \\ (250p + 500m + 1000g)4 = 125000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + m + g = 60 \\ p - m = 5 \\ p + 2m + 4g = 125 \end{cases}$$
- b)
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 125 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 115 \end{array} \right) \xrightarrow{4E_1 - E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 125 \end{array} \right) \xrightarrow{2E_2 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 125 \end{array} \right) \sim \begin{cases} p + m + g = 60 \\ p - m = 5 \\ 5p = 125 \end{cases}$$
- sol: $p = 25, m = 20, g = 15$ cajas.

- ⑨ a: n° paquete detergente A
 b: n° paquetes detergente B
 λ : precio (pta/paquete) de B
- a)
$$\begin{cases} a + b = 1000 \\ 500a + \lambda b = 440000 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1000 \\ 500 & \lambda & 440000 \end{array} \right)$$
- sol: Si $\lambda = 500$: $|A| = 0$, $rg(A) = 1 \neq rg(A') = 2 \rightarrow$ S. Incompatible
 Si $\lambda \neq 500$: $|A| \neq 0$, $rg(A) = rg(A') = 2 = n \rightarrow$ S.C. Determinado.
- b)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1000 \\ 500 & \lambda & 440000 \end{array} \right) \xrightarrow{500E_1 - E_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 500 - \lambda & 60000 \end{array} \right) \sim \begin{cases} a + b = 1000 \\ (500 - \lambda)b = 60000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1000 - \frac{60000}{500 - \lambda} \\ b = \frac{60000}{500 - \lambda} \end{cases}$$
- Como a y b deben ser ambos positivos (= n° de paquetes), $\lambda < 500$. Además deben ser n° enteros, por tanto 60000 debe ser múltiplo de $500 - \lambda$, es decir λ no puede ser 408 pues $60000 : (500 - 408)$ no es entero. sol: $\lambda = 400$ pta/paquete B. $b = \frac{60000}{100} = 600$

- ⑩ x_1 : matriculados en 1ª
 x_2 : " en 2ª
 x_3 : " en 3ª
- a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 352 \\ x_3 = \frac{1}{4}x_1 \\ x_1 - x_2 = 2x_3 - 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 350 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 350 \end{array} \right) \xrightarrow{2E_2 + E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 352 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 350 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 352 \\ -x_1 + 4x_3 = 0 \\ 7x_3 = 350 \end{cases}$$
- sol: $x_2 = 102, x_1 = 200, x_3 = 50$

(→ cont.)

11) a) $(AB)+C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$; $3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sol

b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ sol.

c) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1+E_2, E_1+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2-E_3, E_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

sol. S.C. Indeterminado → infinitas soluciones
pues $rg(A) = rg(A') = 2 < 3$ (n° incógnitas) (T. Rouché)

d) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=1 \\ 0=0 \end{cases}$

una solución, por ejemplo para $z=0$: $\begin{cases} x+y=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}, z=0$

12) a, b, c: consumos (l) en las respectivas gasolineras A, B, C.

m: pta/l en gasolinera C

a) $\begin{cases} 120a + 118b = mC + 4680 \\ b = c \\ 120a = 118b + 1260 \end{cases}$ sol.

b) $\begin{cases} 120a + 118b - mC = 4680 \\ b - c = 0 \\ 120a - 118b = 1260 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 120 & 118 & -m & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 120 & -118 & 0 & 1260 \end{array} \right)$; Como $\begin{vmatrix} 120 & 118 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ el rango de A es ≥ 2 .

$|A| = \begin{vmatrix} 120 & 118 & -m \\ 0 & 1 & -1 \\ 120 & -118 & 0 \end{vmatrix} = 120 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -118 & 0 \end{vmatrix} + 120 \begin{vmatrix} 118 & -m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$
 $= 120(-118) + 120(-118+m) = -28320 + 120m$
 Si $|A|=0$, $m=236$, $rg(A)=2$
 Si $|A| \neq 0$, $m \neq 236$, $rg(A)=3$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 120 & 118 & -m & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 236 & -m & 3320 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1-E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 120 & 118 & -m & 4680 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 236 & -m & 3320 \end{array} \right)$; $\begin{vmatrix} 120 & 118 \\ 0 & 236 \end{vmatrix} = 120 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 236 & 3320 \end{vmatrix} \neq 0$ $rg(A')=3$ $\forall m$

Por tanto: Si $m=236$, $rg(A)=2 \neq rg(A')=3$ - S. Incompatible
 Si $m \neq 236$, $rg(A)=3=rg(A')=n$ - S. Comp. Determinado.

13) a) $AB = 2C - D$ $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ x+ay \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ 2-z \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax+y = 2-z \\ x+ay = 2-z \\ x = -z \end{cases}$ sol.

b) $\begin{cases} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=2 \\ x+z=0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$
 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = \Delta$
 $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1)$
 $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1)$
 $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2a = -2(a-1)$

Regla de Cramer

→ discutir →

(→ cont.)

(13) (cont) $a \neq 0$ pues si $a=0$ entonces $\Delta=0$ $\Delta x \neq 0$ $\Delta y \neq 0$ $\Delta z \neq 0$ y el sistema sería incompatible, contra el supuesto. sol.

c) Para que sea S.C. Determinado (solución única) debe ser $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ todos no nulos, o sea $a \neq 0$ y $a \neq 1$. sol.

d) En el caso $a=1$, $\Delta=\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$ y el sistema es S.C.I., con infinitas soluciones. sol.

(14) a) n : unidades vendidas de champú Normal
 v : " " " Vitaminado
 a : " " " Anticasca.
 m : precio venta champú anticasca (€/unidad)

$$\begin{cases} 2n + 3v + ma = 112 \\ 2n = 3v + ma - 56 \\ 3v + ma = 28m \end{cases} \quad \begin{cases} 2n + 3v + ma = 112 \\ 2n - 3v - ma = -56 \\ 3v + ma = 28m \end{cases}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 112 \\ 2 & -3 & -m & -56 \\ 0 & 3 & m & 28m \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1-E_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 112 \\ 0 & 6 & 2m & 168 \\ 0 & 3 & m & 28m \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{E_2}{2}-E_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 112 \\ 0 & 3 & m & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 84-28m \end{pmatrix}$$

T. de Rouché-Frobenius

Si $84-28m=0 \Rightarrow m=3$ €/unidad

entonces $rg(A)=2=rg(A') < 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow$ y el sistema es C. Indeterminado. Si $m \neq 3$ no hay solución.

c) Para $a=20$ y $m=3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 112 \\ 0 & 3 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2n + 3v + 3a = 112 \\ 3v + 3a = 84 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2n + 3v = 52 \\ 3v = 24 \end{cases}$$

sol: $n=14$
 $v=8$
 $a=20$

(15) a) $AX=B$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & -3 & a & a \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = 12-3a; \quad |A|=0 \Rightarrow a=4$$

Cmo $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, para $a=4 \rightarrow \text{rango}(A)=2$

Para $a=4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1+E_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3E_1+E_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2-E_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg(A')=2$$

sol.

luego si $a \neq 4$, $|A| \neq 0$, $rg(A)=3=rg(A')=n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow$ S.C. Determinado.
 si $a=4$, $|A|=0$, $rg(A)=2=rg(A') < n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow$ S.C. Indeterminado.

b) Si $AX=C$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \checkmark \text{ El sistema ahora es HOMOGÉNEO, y al menos} \\ \text{tiene la solución TRIVIAL } x=y=z=0, \forall a. \end{matrix}$$

$\checkmark$ Para $a=4$ el sistema es S.C.I. y se reduce a

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Das posibles soluciones dando valores a z :

z	x	y
3	-5	-1
-3	5	1

16) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{vmatrix} = a + 2a + 4a - a - 4a^2 - 2 = -4a^2 + 6a - 2$
 $\Delta = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0; a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{1}{2}$

si $\underline{a=1}$ $\Delta=0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y=0, \Delta_z \neq 0$
S. Incompatible
 si $\underline{a=\frac{1}{2}}$, $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$
S. C. Indeterminada

si $a \neq 1, a \neq \frac{1}{2}, \Delta \neq 0 \rightarrow$ S. Compatible Determinada.

c) P. ejemplo para $\underline{a=0}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x+2y+z=1 \\ x=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=1 \\ z=-1 \end{cases}$ sol.

17) $(AB-C)D = 2E \Rightarrow \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \sim \begin{cases} y+z=0 \\ y+z=2a \\ x+y+z=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2a \\ y+z=2a \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2a \\ y+z=2a \\ 0=2a \end{cases}$

b) NO, ya que si $\underline{a \neq 0}$ el S. es Incompatible y si $\underline{a=0}$ es Comp. Indeter-
 minada con infinitas soluciones.

c) Si $\underline{a=0}$: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-k \\ z=k \end{cases}$ sol.
 P. ejemplo con $\underline{k=1}$: $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

18) n : n° fotos calidad Normal
 p : n° " " Optima.
 A : MB/foto tipo p.
 a) $\begin{cases} n+p=24 \\ n \cdot 0,20 + p \cdot A = 9,2 \end{cases}$ sol. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0,20 & A & 9,2 \end{array} \right)$

b) Si $\underline{A=0,2 \text{ MB/foto}}$ $|A|=0$
 y el sistema es Incompatible sol.

($\rightarrow$ cont.)

→ 18 (cont.) Si $A \neq 0,2 \text{ MB/ft}$ el Sist. es Compatible Determinado.

P2/9

c) No, ni se cambia el valor de A, es decir la calidad de los fotos ya que la solución para cada valor de A es única.

$$(19) a) AB = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 0+my \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 10x+4y \\ 2my \end{pmatrix}_{2 \times 1} \text{ ; } DE = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}_{2 \times 1} (3 \text{ m})_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \text{ m} \\ 3m \text{ m}^2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ sol}$$

$$EB = \begin{pmatrix} 3 \text{ m} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 15+my \end{pmatrix}_{1 \times 1} \text{ sol}$$

$$b) AB+C=D \Rightarrow \begin{pmatrix} 10x+4y \\ 2my \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 10x+4y = 10 \\ 10x+2my = 10m \end{cases} \text{ sol}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 10 \\ 10 & 2m & 10m \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 10 \\ 0 & 4-2m & 10-10m \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2-m & 5-5m \end{array} \right)$$

Si $\underline{m \neq 2}$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A') = n$ infinitas - S.C. Determinado. Sol. única.
Si $\underline{m=2}$, $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A') = 2$ - S. Incompatible.

$$(20) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} - \begin{pmatrix} 7 \\ ay \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}_{2 \times 1} \text{ ; } \begin{pmatrix} ax+y \\ y \end{pmatrix}_{2 \times 1} - \begin{pmatrix} 7 \\ ay \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}_{2 \times 1} \text{ ; } \begin{cases} ax = 6-ay \\ y-ay = 1-a \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} ax+ay = 6 \\ (1-a)y = 1-a \end{cases} \text{ sol}$$

$$b) \text{ Si } \underline{a=1} : \begin{cases} x+y = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ S.C. Indeterminado (infinitas soluciones)}$$

$$\text{ Si } \underline{a \neq 1} : \begin{cases} a(x+y) = 6 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} \text{ Si } \underline{a=0} : \text{ S. Incomp} \\ \text{ Si } \underline{a \neq 0} : \text{ S.C. Determinado (sol. única)} \end{cases}$$

Para $\underline{a=1}$ con $y \neq 1$:

$$\boxed{x = 6-y} \text{ , p.ej: } \boxed{x=4; y=2}$$

$$(21) a) AB = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -y & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ -m & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} mx-m & 1 \\ -my & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ ; } EA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} x & 1 \\ -y & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3x-2y & 3 \end{pmatrix}_{1 \times 2} \text{ sol}$$

$$CE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} (3 \text{ 2})_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ sol}$$

$$b) (AB)C=D \Rightarrow \begin{pmatrix} mx-m & 1 \\ -my & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} mx-m+2 = 2 \\ -my = 3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx = m \\ (2-m)y = 3 \end{cases} \text{ sol}$$

Para $\underline{m=2}$ $\begin{cases} x=1 \\ 0=3 \end{cases}$ S. Incompatible

Para $\underline{m \neq 2}$ $\begin{cases} mx = m \\ y = \frac{3}{2-m} \end{cases} \begin{cases} \text{ Si } \underline{m=0} : \text{ S.C. Indeterminado } \begin{cases} x=k \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} k \in \mathbb{R} \text{ sol.} \\ \text{ Si } \underline{m \neq 0} : \text{ S.C. Determinado (sol. única)} \end{cases}$

22) a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (x \ m) \left[2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3m = -y + 2m + 2 \\ x + m = -2x - my + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{cases} \underline{\text{sol.}}$$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2-m \\ 3 & m & 5-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2-m \\ 0 & 1-m & -3 \end{pmatrix}$ sol: Para $1-m \neq 0$, $\boxed{m \neq 1}$ el Sistema
es Compatible Determinado (sol. única)
 Si $\underline{m=1}$, S. Incompatible.

Para $\underline{m=4}$: $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -3y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \underline{\text{sol.}}$

23) a) $(AB)C = D - E \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (m \ 1) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ my+m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} my \\ 2y+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} mx & x \\ my & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-my+m \\ (m-2)y+m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mx+x \\ my+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-my+m \\ (m-2)y+m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} mx+x = x-my+m \\ my+y = (m-2)y+m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx+my = m \\ 3y = m-1 \end{cases} \underline{\text{sol.}}$$

b) Si $\underline{m=0}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ 3y = -1 \end{cases}$ S. C. Indeterminado (infinitas soluciones) $\left. \begin{array}{l} \text{Siempre tiene} \\ \text{solución } \forall m \end{array} \right\}$

Si $\underline{m \neq 0}$ $\begin{cases} x+y = 1 \\ 3y = m-1 \end{cases}$ S. C. Determinado (sol. única)

24) a) $AB = \begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}_{2 \times 1} \underline{\text{sol.}}$ $ED = [3x + 16x] = [19x]_{1 \times 1} \underline{\text{sol.}}$ $DE = \begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}_{2 \times 2} \underline{\text{sol.}}$

b) $C - 2AB = -D \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} y-2-2(x-y) \\ -m-2(x-my) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -4x \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x+3y = 2 \\ 2x+2my = m \end{cases} \underline{\text{sol.}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2m & m \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6-2m & 4-m \end{pmatrix}$; Si $6-2m=0 \Rightarrow \underline{m=3}$ $\text{rg}(A)=1 \neq 2=\text{rg}(A')$
S. Incompatible

Para $\underline{m \neq 3}$ $\text{rg}(A)=2=\text{rg}(A')=n^{\circ} \text{ incógnitas}$ - S. C. Determinado (sol. única) sol.

25) a) $AB = C + 4D$; $\begin{pmatrix} x & 2y \\ x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y-3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5x+my \\ 5x+2my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ y+9 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 5x+my = 4 \\ 5x+(2m-1)y = 9 \end{cases} \underline{\text{sol.}}$$

b) Si $\boxed{m=1}$ $\text{rg}(A)=1 \neq \text{rg}(A')=2$ S. Incomp
 Si $\boxed{m \neq 1}$ $\text{rg}(A)=2=\text{rg}(A')=n^{\circ} \text{ incógnitas}$
S. C. Determinado (sol. única)

$\begin{pmatrix} 5 & m & 4 \\ 5 & 2m-1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 5 & m & 4 \\ 0 & m-1 & 5 \end{pmatrix}$

(26) a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix} \underline{\text{sol.}}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \underline{\text{sol.}}$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} m & 0 & m+2 \\ m & m-1 & 2m+1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} m & 0 & m+2 \\ 0 & m-1 & m-1 \end{array} \right)$ $\checkmark$ Si $\underline{m=1}$ S.C. Indetermin. (infinitas soluciones)

$\checkmark$ Si $\underline{m=0}$ S. Incompatible

$\checkmark$ Si $\underline{m \neq 1 \text{ y } m \neq 0}$ S.C. Determinado (soluc. única)

$\checkmark$ Para $\underline{m=1}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x=3 \\ y=k \text{ (cualquiera)} \end{cases}$

p.ej. $\begin{bmatrix} x=3 \\ y=0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} x=3 \\ y=1 \end{bmatrix}$

(27) x : n.º unidades vendidas a minoristas. (400€/unidad)
 y : n.º " " a Mayoristas.
 m : €/unidad a Mayoristas.

a) $\begin{cases} 400x + my = 270000 \\ 400x = 480m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400x + my = 270000 \\ 400x = 480m \end{cases}$ sol.

• Si $\underline{m=0}$ $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A') = 2 \Rightarrow \underline{\text{SI}}$

• Si $\underline{m \neq 0}$ $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A') = \text{n.º incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{S.C. Deter.}}$ (sol. única)

$\Rightarrow$ Podría ser $\underline{m = 562,5}$

b) Si $m = 562,5$ €/ud. May.

$\begin{cases} 400x + 562,5y = 270000 \\ 400x = 480 \cdot 562,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=675 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{NO}} \text{ pudo venderse a ese precio a los Mayoristas.}$