EJEMPLO 9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief.**[5] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Sea x_1 la producción de la industria i. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 = x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n = x_n \end{array} \tag{8}$$

O bien, reescribiendo el sistema (8) en la forma del sistema (7) se obtiene

$$\begin{array}{l} (1-a_{11})\,x_1 - \quad a_{12}x_2 - \cdots - \quad a_{1n}x_n = e_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})\,x_2 - \cdots - \quad a_{2n}x_n = e_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ -a_{n1}x_1 - \quad a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})\,x_n = e_n \end{array} \tag{9}$$

El sistema (9) de n ecuaciones con n incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 10 El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

[5] Así llamado en honor al economista norteamericano Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel en Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.