XL Olimpiada Matemática Española

Fase local

Primera sesión

Tarde del viernes 16 de enero de 2004

Problema 1.

Encontrad todas las funciones $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ tales que $f\left(f(n)\right) = n + 2$ para todo número natural n.

Problema 2.

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden en el mismo eje. Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Problema 3.

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.

XL Olimpiada Matemática Española

Fase local

Segunda sesión

Mañana del sábado 17 de enero de 2004

Problema 4.

Demostrad que si $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$,

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

Problema 5.

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q.

Problema 6

Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.