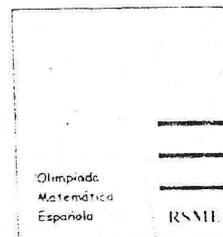




# XLI Olimpiada Matemática Española



## Fase local

### *Primera sesión*

*Tarde del viernes 21 de enero de 2005*

#### Problema 1.

Se considera un triángulo  $ABC$  con  $\angle BAC = 45^\circ$  y  $\angle ACB = 30^\circ$ . Si  $M$  es el punto medio del lado  $BC$ , se pide demostrar que  $\angle AMB = 45^\circ$  y que  $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$ .

#### Problema 2.

Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.

Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca.

Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.

Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

#### Problema 3.

Encontrar todos los números enteros positivos  $n$  tales que  $3^n + 5^n$  es múltiplo de  $3^{n-1} + 5^{n-1}$

#### NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.



*Segunda sesión*

*Mañana del sábado 22 de enero de 2005*

**Problema 4.**

Sean  $x_1, x_2$  las raíces del polinomio  $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$ , siendo  $m$  un número real. Probar que  $P(x_1^3) = P(x_2^3)$ .

**Problema 5.**

En el interior de un cuadrado  $ABCD$  se construye el triángulo equilátero  $ABE$ . Sea  $P$  el punto intersección de las rectas  $AC$  y  $BE$ . Sea  $F$  el punto simétrico del  $P$  respecto de la recta  $DC$ . Se pide demostrar que:

- a) el triángulo  $CEF$  es equilátero.
- b) el triángulo  $DEF$  es rectángulo e isósceles.
- c) el triángulo  $BDF$  es isósceles.
- d) el triángulo  $PDF$  es equilátero.

**Problema 6**

Encontrar todas las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$x^2 \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$$

NOTAS:

- No está permitido el uso de calculadora.
- El tiempo para resolver los problemas es de tres horas y media.
- Cada problema se calificará sobre 7 puntos.