XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática Española RSME

Fase local 2006

Primera sesión (Tanda 2)
Viernes 20 de enero

Problema 1
En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Problema 2
Determinar todos los enteros n tales que

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

es entero.

Problema 3
Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras.
Encontrar la relación existente entre R y r.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática Española RSME

Fase local 2006
Segunda sesión (Tanda 2)
Sábado 21 de enero

Problema 4

Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

sean D y $1 - D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

Problema 5

Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:

$$22 = 2^1 \cdot 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \cdot 3^1.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?. Razónese la contestación.

Problema 6

Los vértices del cuadrilátero convexo $ABCD$ están situados en una circunferencia. Sus diagonales AC y BD se cortan en el punto E. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo ABD. La recta O_1O_2 corta a EB en M y a EA en N.

Demostrar que el triángulo EMN es isósceles.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.