(1) Total de llaves : $12 \times 12 = 144$

Cada 3 gnomos tendrán en total más de 144 llaves.

Llamando g_1 al nº de llaves del 1^er gnomo, g_2 las del 2º etc tendremos :

$$g_1 + g_2 + g_3 \geq 144$$
$$g_1 + g_2 + g_4 \geq 144$$
$$\cdots$$
$$g_7 + g_6 + g_5 \geq 144$$

En que he escrito todos los tríos posibles.

Hay un total de desigualdades de : $7 \times 6 \times 5 = 210$. El total de sumandos g_m es $210 \times 3 = 630$. Cada g_m será la séptima parte de 630, $\frac{630}{7} = 90$. Es decir, hay 90 g_1, 90 g_2 .. etc.

Sumando las desigualdades :

$$(g_1 + g_2 + g_3) + (g_1 + g_2 + g_4) + \cdots + (g_7 + g_6 + g_5) \geq 210 \cdot 144$$
$$90\,(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7) \geq 210 \cdot 144$$
$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 \geq \frac{210 \cdot 144}{90} = 336 .$$

(2) Para que la raíz cuadrada esté definida :

$$\frac{625}{4} - m \geq 0 \Rightarrow \boxed{m \leq 151}$$

Llamando $K = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - m}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - m}}$:

$$K^2 = \frac{25}{2} + \cancel{\sqrt{\frac{625}{4} - m}} + 2\sqrt{\left(\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - m}\right)\cdot\left(\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - m}\right)} + \frac{25}{2} - \cancel{\sqrt{\frac{625}{4} - m}} =$$

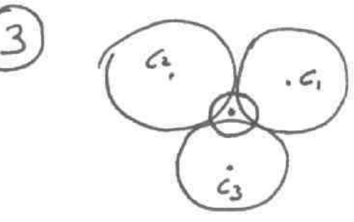
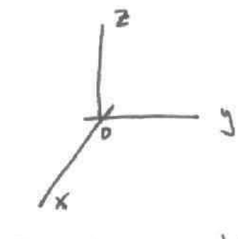
$$= 25 + 2\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{625}{4} - m\right)} = 25 + 2\sqrt{m} \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{25 + 2\sqrt{m}}}$$

Luego debo encontrar m para que $\sqrt{m}$ sea un nº entero que cumple que $25 + 2\sqrt{m}$ sea un cuadrado perfecto, y además $m < 151$:

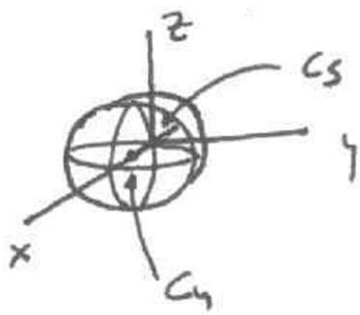
$\boxed{m = 0} \rightarrow K = 5$
$m = 1 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{27}}$
$m = 4 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{29}}$
$m = 9 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{31}}$
$m = 16 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{33}}$
$m = 25 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{35}}$

$m = 36 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{37}}$
$m = 49 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{39}}$
$m = 64 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{41}}$
$m = 81 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{43}}$
$m = 100 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{45}}$

$m = 121 \rightarrow K = \cancel{\sqrt{47}}$
$\boxed{m = 144} \rightarrow K = \sqrt{49} = 7$

3  

Fijando el origen de coordenadas sobre el punto de tangencia de las dos esferas de radio r:

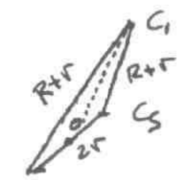


los centros de estas esferas son:

$C_4 = (r, 0, 0)$

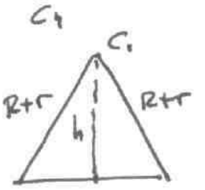
$C_5 = (-r, 0, 0)$

Uniendo estos centros con C_1:
y pasando por los puntos de tangencia:



← (dibujo en perspectiva)

$\overline{OC_1} = h = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2+2Rr} = \sqrt{R(R+2r)}$



← (dibujo en planta)

El vector $\overrightarrow{OC_1}$ tiene entonces $\sqrt{R(R+2r)}$ de módulo, y como por simetría debe formar un ángulo de 30° con respecto del eje Y:

$\overrightarrow{OC_1} = \left(0, \sqrt{R(R+2r)}\cos 30°, \sqrt{R(R+2r)}\sin 30°\right) = \sqrt{R(R+2r)}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Con C_2 sucede lo mismo, pero el ángulo es de $30°+120° = 150°$

$\overrightarrow{OC_2} = \left(0, \sqrt{R(R+2r)}\cos 150°, \sqrt{R(R+2r)}\sin 150°\right) = \sqrt{R(R+2r)}\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Con C_3 sólo tendrá componente z:

$\overrightarrow{OC_3} = \left(0, 0, \sqrt{R(R+2r)}\right)$

El vector $\overrightarrow{C_1C_2}$ tendrá de módulo 2R (por ser las esferas tangentes)

Luego:

$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} = \sqrt{R(R+2r)}\left(0, -\sqrt{3}, 0\right)$

$|\overrightarrow{C_1C_2}| = \sqrt{R(R+2r)} \cdot \sqrt{0+3+0} = \sqrt{3R(R+2r)}$

$2R = \sqrt{3R(R+2r)} \Longrightarrow 4R^2 = 3R^2 + 6Rr;\ R^2 = 6Rr;\ \boxed{R = 6r}$

(4) $x^2+px+q=0$

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \longrightarrow D=p^2-4q$$

Por otro lado, si las soluciones son D, $1-D$ la ecuación sería:

$$(x-D)(x-(1-D))=0$$

$$x^2-x+\cancel{xD}-\cancel{Dx}+D-D^2=0$$

$$x^2-x+(D-D^2)=0 \Longrightarrow \boxed{p=-1} \quad q=D-D^2$$

$$q=D-D^2 \longrightarrow q=(p^2-4q)-(p^2-4q)^2$$

$$q=(-1)^2-4q-((-1)^2-4q)^2$$

$$q=\cancel{1}-4q-\cancel{1}+8q-16q^2$$

$$16q^2-3q=0$$

$$q= \begin{cases}\boxed{0}\\ \boxed{3/16}\end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\boxed{x^2-x=0}$ $\boxed{x^2-x+\frac{3}{16}=0}$

Comprobación:

$x^2-x=0 \qquad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-0}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1\pm1}{2} \begin{cases}1\\0\end{cases}$

$D=1 \longrightarrow 1-D=1-1=0$ ✓

$x^2-x+\frac{3}{16}=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{12}{16}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{4}{16}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{4}}}{2}=\frac{1\pm\frac{1}{2}}{2} \begin{cases}3/4\\1/4\end{cases}$$

$D=\frac{1}{4} \rightarrow 1-D=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ✓

(5) Veamos por el momento sólo los números múltiplos de 2.

Sea $n = 2^x \cdot K$ $\left(\begin{array}{l} x \text{ impar} \neq 1 \\ K \text{ impar, para que no aumente el exponente del } 2\end{array}\right)$

K impar lo podemos representar como $2h+1$.

$$n = 2^x \cdot (2h+1)$$

Veamos cómo serían $\left\{\begin{array}{l} n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4 \\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4 \end{array}\right.$

- $n+1$, $n+3$, $n-1$ y $n-3$ serían impares, por lo que no tendrían el divisor 2 en su descomposición.
- $n+2 = 2^x \cdot (2h+1) + 2 = 2^{x+1}h + 2^x + 2 = 2 \cdot \underbrace{(\underbrace{2^x h + 2^{x-1}}_{\text{par}} + 1)}_{\text{impar}}$

Luego $n+2$ tendría 2^1 en su descomposición.

- $n-2 = 2^x(2h+1) - 2 = 2^{x+1}h + 2^x - 2 = 2 \cdot \underbrace{(\underbrace{2^x h + 2^{x-1}}_{\text{par}} - 1)}_{\text{impar}}$

Luego $n-2$ tendría 2^1 en su descomposición

- $n+4 = 2^x(2h+1) + 4 = 2^{x+1}h + 2^x + 4 = 2^2 \underbrace{(\underbrace{2^{x-1} \cdot h + 2^{x-2}}_{\text{par}} + 1)}_{\text{impar}}$

Luego $n+4$ tendría 2^2 en su descomposición

- $n-4 = 2^x(2h+1)-4 = 2^{x+1}h + 2^x - 4 = 2^2 \underbrace{(\underbrace{2^{x-1}h + 2^{x-2}}_{\text{par}} - 1)}_{\text{impar}}$

Luego $n+4$ tendría 2^2 en su descomposición.

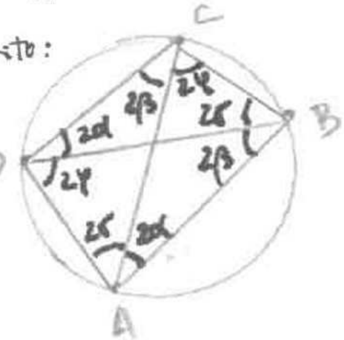
Por lo tanto, centrándonos en un número con descomposición de exponente impar del 2 (p.e. $24 = 2^3 \cdot 3$), necesariamente aparecerán exponentes pares del 2 en el nº+4 y en el nº-4 $\left(\text{p.e. } \begin{array}{l} 24+4 = 28 = 2^2 \cdot 7 \\ 24-4 = 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array}\right)$.

Por lo tanto, <u>en el mejor de los casos</u>, podríamos conseguir 7 números: $n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$.

En el ejemplo anterior no sería posible, por jugar también los restantes nº primos: $21, 22, 23, 24, \underbrace{\cancel{25}}_{=5^2}, 26, 27$

Basta entonces con encontrar un ejemplo con 7 nº que no tenga problemas con los restantes nº primos: $\boxed{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35}$

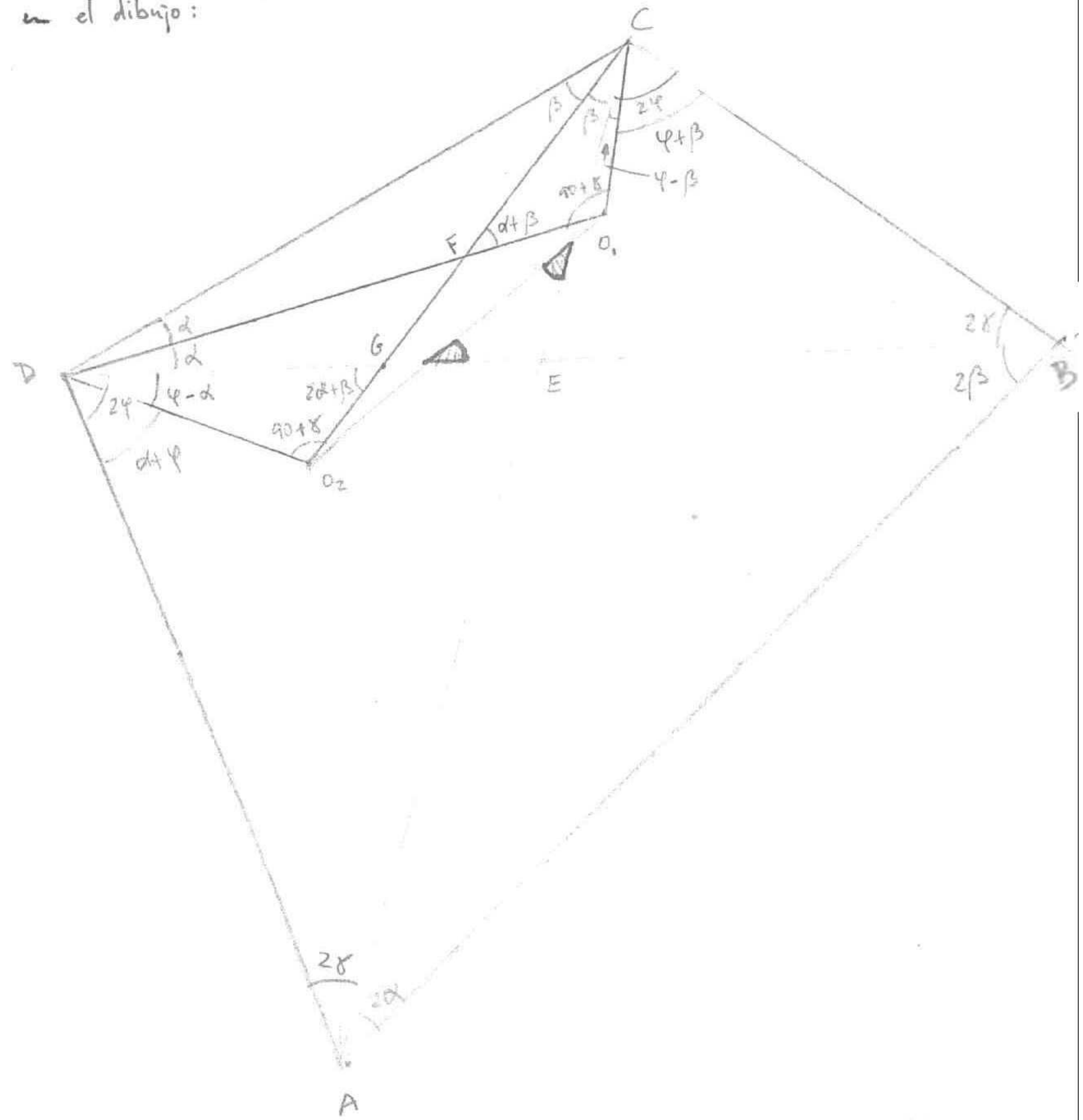
6| La pertenencia de A, B, C y D a una circunferencia se puede formalizar por el Teorema del ángulo inscrito:



$$\hat{BAC} = \hat{BDC} = 2\alpha$$
$$\hat{ABD} = \hat{ACD} = 2\beta$$
$$\hat{DAC} = \hat{DBC} = 2\gamma$$
$$\hat{CBA} = \hat{ADB} = 2\varphi$$

Los llamo respectivamente $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ y 2φ. (Utilizo el doble para que la mitad se exprese sin fracciones)

La descripción de todos los ángulos que se forman son los que se ven en el dibujo:



Tenemos que demostrar que son iguales los ángulos destacados en el dibujo

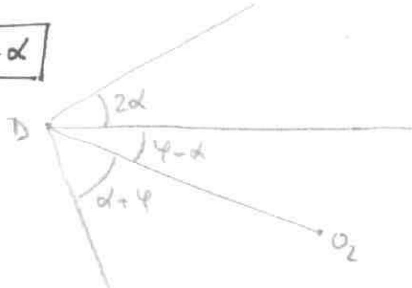
Sigue a continuación la explicación de todos estos ángulos.

• Para empezar, del triángulo $\widehat{DBC}$ (o también de $\widehat{ADC}$):

$$C\hat{D}B + D\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ$$
$$2\alpha + 2\gamma + 2\beta + 2\varphi = 180^\circ$$
$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma+\varphi = 90^\circ}$$

• En el vértice D se forman los siguientes ángulos:

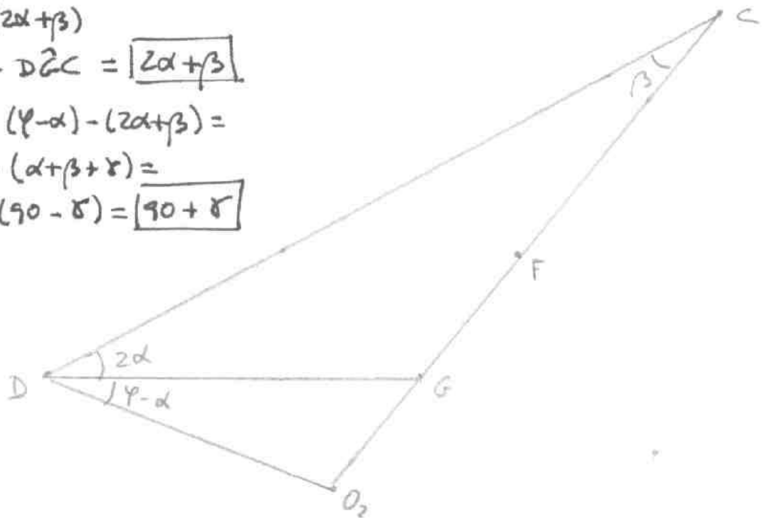
$$\left.\begin{array}{l} B\hat{D}A = 2\varphi \\ O_2\hat{D}A = \frac{1}{2}(2\alpha+2\varphi) = \alpha+\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}O_2 = 2\varphi-(\alpha+\varphi) = \boxed{\varphi-\alpha}$$

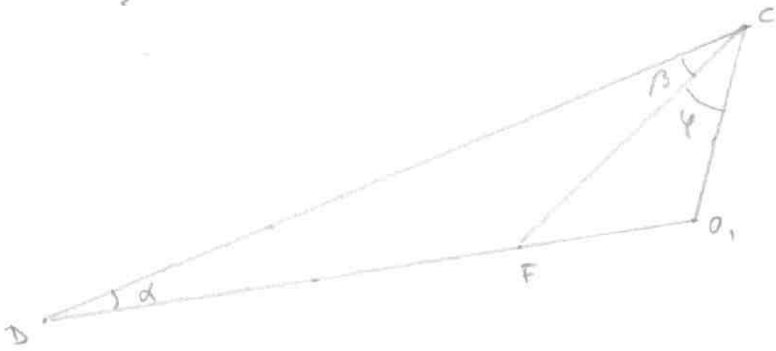


• Con idéntico razonamiento: $O_1\hat{C}A = \boxed{\varphi-\beta}$

• $D\hat{G}C = 180-(2\alpha+\beta)$

$$O_2\hat{G}D = 180 - D\hat{G}C = \boxed{2\alpha+\beta}$$
$$D\hat{O_2}C = 180-(\varphi-\alpha)-(2\alpha+\beta) =$$
$$= 180-(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 180-(90-\gamma) = \boxed{90+\gamma}$$





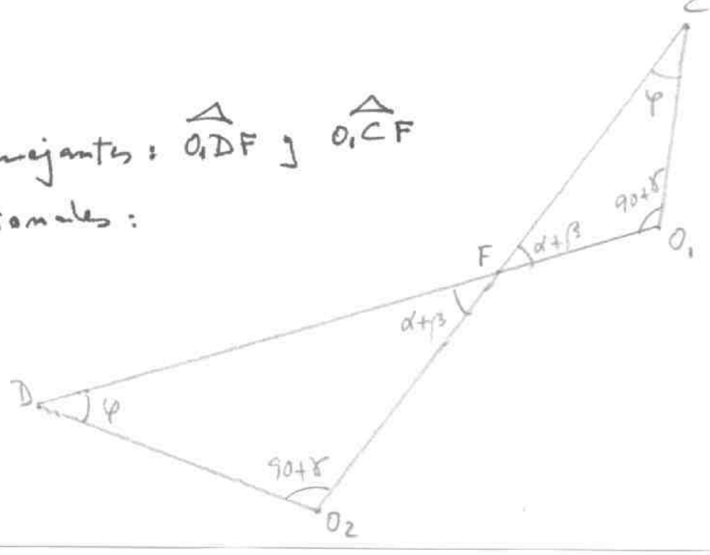
• $D\hat{F}C = 180-(\alpha+\beta)$

$$O_1\hat{F}C = 180 - D\hat{F}C = \boxed{\alpha+\beta}$$
$$C\hat{O_1}F = 180-(\alpha+\beta)-\varphi =$$
$$= 180-(\alpha+\beta+\varphi) =$$
$$= 180-(90-\gamma) =$$
$$= \boxed{90+\gamma}$$

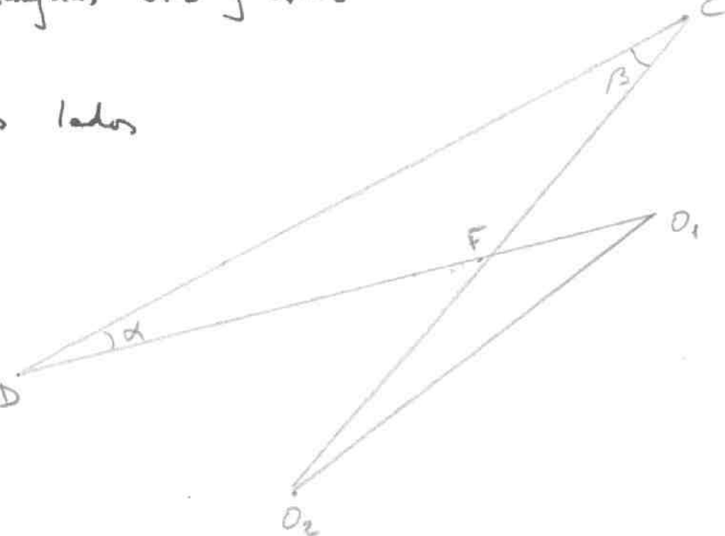
• En consecuencia tengo dos triángulos semejantes: $\widehat{O_1DF}$ y $\widehat{O_1CF}$

Por lo tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{O_2F}{O_1F} = \frac{DF}{CF} = \frac{DO_1}{CO_1} = K$$



• Demostraremos ahora que los triángulos $\widehat{CFD}$ y $\widehat{O_1FO_2}$ son semejantes.



El ángulo F es común, y los lados cumplen: $\dfrac{O_2F}{O_1F} = \dfrac{DF}{CF} = K$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\widehat{FO_1O_2}$:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{\overline{O_1F}^2 + \overline{O_2F}^2 - 2\overline{O_1F}\,\overline{O_2F}\cos\hat{F}} =$$

$$= \sqrt{\overline{O_1F}^2 + K^2\overline{O_1F}^2 - 2\overline{O_1F}\,K\,\overline{O_1F}\cos\hat{F}} =$$

$$= \overline{O_1F}\sqrt{1+K^2-2K\cos\hat{F}}$$

De la misma manera, en el triángulo $\widehat{FCD}$:

$$\overline{CD} = \overline{CF}\sqrt{1+K^2-2K\cos\hat{F}}$$

Por lo tanto: $\boxed{\dfrac{\overline{O_1F}}{\overline{O_1O_2}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{CD}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+K^2-2K\cos\hat{F}}}$

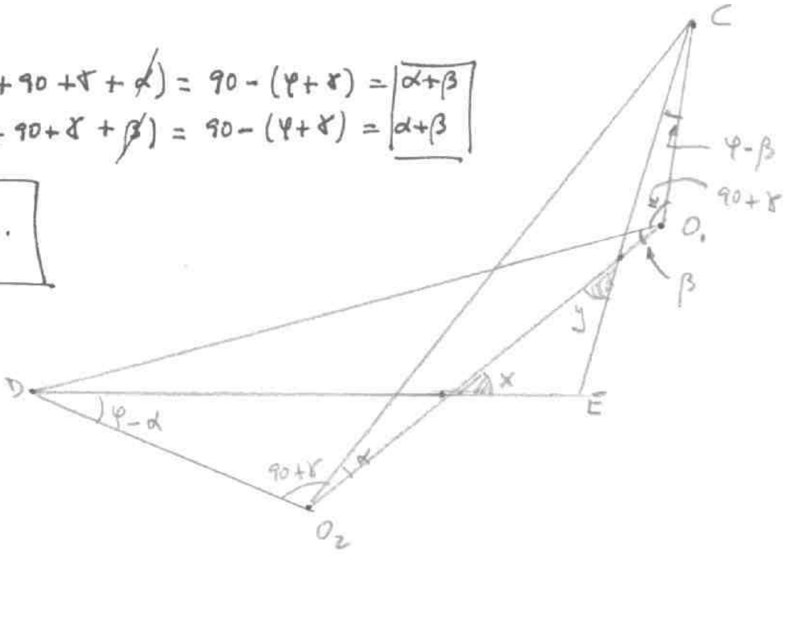
Aplicando el teorema de los senos en los dos triángulos:

$$\operatorname{sen}\hat{O}_2 = \frac{\overline{O_1F}\cdot\operatorname{sen}\hat{F}}{\overline{O_1O_2}} = \frac{\overline{CF}\,\operatorname{sen}\hat{F}}{\overline{CD}} = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \boxed{\hat{O}_2 = \alpha} \Rightarrow \boxed{\hat{O}_2 = \beta}$$

• Por lo tanto:

$$x = 180 - (\varphi - \cancel{\alpha} + 90 + \gamma + \cancel{\alpha}) = 90 - (\varphi+\gamma) = \boxed{\alpha+\beta}$$

$$y = 180 - (\varphi - \cancel{\beta} + 90 + \gamma + \cancel{\beta}) = 90 - (\varphi+\gamma) = \boxed{\alpha+\beta}$$



$\boxed{\text{Luego dicho triángulo es isósceles.}}$