(1) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = n+2 \longrightarrow f(f(f(n))) = f(n+2) \rightarrow \boxed{f(n)+2 = f(n+2)}$$

$$f(1) = a \Rightarrow f(3) = a+2 \Rightarrow f(5) = a+4 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{f(n) = a + n - 1} \text{ Si } n \text{ es impar}$$

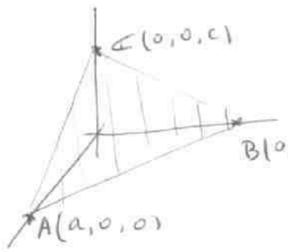
$$f(2) = b \Rightarrow f(4) = b+2 \Rightarrow f(6) = b+6 \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{f(n) = b + n - 2} \text{ Si } n \text{ es par}$$

- Si a es impar $\Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow 3 = a+a-1 \Rightarrow a = 2$ Absurdo.
- Si b es par $\Rightarrow f(b) = 4 \Rightarrow 4 = b+b-2 \Rightarrow b = 3$ Absurdo.
- Si a es par $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(a) = 3 \\ f(a) = b+a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow b+a = 5$
- Si b es impar $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(b) = 4 \\ f(b) = a+b-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b = 5$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}} \text{ o } \boxed{\begin{array}{l} a=4 \\ b=1 \end{array}}$$

$$\boxed{f(n) = n+1} \qquad \boxed{\begin{array}{l} f(n) = n+3 \\ f(n) = n-1 \end{array}}$$

(2)



$$\vec{AB} = (-a, b, 0)$$
$$\vec{AC} = (-a, 0, c)$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-a)^2 + 0 + 0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\hat{A} \text{ es agudo}}$$

(3) Bastaría con cubrir 3 columnas. Por ejemplo una con 14 unos, otra con 14 equis y la 3ª con 14 doses. La quiniela premiada tendrá seguro cinco o más signos repetidos. ($14 = 5+5+4 = 6+4+4 = 6+5+3 = \dots$ etc)

(5) $Q(x) = P'(x)$

a, b, c raíces de $P(x) \Rightarrow P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$ raíces de $Q(x) \Rightarrow Q(x) = 3\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{b+c}{2}\right)$

$$= 3x^2 - \frac{3}{2}(a+2b+c)x + \frac{3}{4}(ab+ac+b^2+bc)$$

$$P'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (bc+ac+ab)$$

$$Q(x) = P'(x) \Rightarrow \begin{array}{l} 2a+2b+2c = \frac{3}{2}(a+2b+c) \longrightarrow a = 2b-c \\ bc+ac+ab = \frac{3}{4}(ab+ac+b^2+bc) \longrightarrow bc+ac+ab = 3b^2 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bc + (2b-c)c + (2b-c)b = 3b^2$$
$$\cancel{bc} + 2bc - c^2 + 2b^2 - \cancel{bc} = 3b^2$$
$$0 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$0 = (b-c)^2 \Rightarrow \boxed{b=c} \Rightarrow \boxed{a=b=c}$$

$$\boxed{P(x) = (x-a)^3} \qquad \boxed{Q(x) = 3(x-a)^2} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

⑥ los cuadrados de los nº enteros terminan en: {0,1,4,9,6,5}

$0^2=0 \quad 1^2=1 \quad 2^2=4 \quad 3^2=9 \quad 4^2=16 \quad 5^2=25$

$9^2=81 \quad 8^2=64 \quad 7^2=49$

Para que sumen 2003, la última cifra de ambos cuadrados debe ser: $4+9=1\underline{3}$

Por otro lado, los números deben ser inferiores a 45.

Por todo ello los casos posibles son:

$$\begin{bmatrix}02\\08\\12\\18\\22\\28\\32\\38\\42\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}03\\07\\13\\17\\23\\27\\33\\37\\43\end{bmatrix}^2 = 2003 \Longrightarrow \begin{bmatrix}4\\64\\144\\324\\484\\784\\1024\\1444\\1764\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}9\\49\\169\\289\\529\\729\\1089\\1369\\1849\end{bmatrix} = \boxed{\text{No hay solución}}$$

⑤ Hay seis casos posibles: $\left[\begin{array}{l}1-xy \text{ es siempre positivo}\\ 1+|x||y| \quad " \quad\quad " \quad\quad "\end{array}\right]$

I | $1>x\geq y\geq 0 \Rightarrow \quad \dfrac{x-y}{1-xy} \leq \dfrac{x+y}{1+xy}$

$\cancel{x}+x^2y-y-\cancel{xy^2} \leq \cancel{x}-x^2y+y-\cancel{xy^2}$

$2x^2y\leq 2y$

$x^2\leq 1$ ✓

II | $1>y\geq x\geq 0 \Rightarrow \quad \dfrac{y-x}{1-xy} \leq \dfrac{x+y}{1+xy}$

$\cancel{y}+xy^2-x-\cancel{x^2y} \leq x-\cancel{x^2y}+\cancel{y}-xy^2$

$2xy^2\leq 2x$

$y^2\leq 1$ ✓

III | $1>x\geq 0\geq y>-1 \Rightarrow \quad \dfrac{x-y}{1-xy} \leq \dfrac{x-y}{1-xy}$ ✓

IV | $1>y\geq 0\geq x>-1 \Rightarrow \quad \dfrac{y-x}{1-xy} \leq \dfrac{y-x}{1-xy}$ ✓

V | $0\geq x\geq y>-1 \Rightarrow \quad \dfrac{x-y}{1-xy} \leq \dfrac{-x-y}{1+xy}$

$x+\cancel{x^2y}-\cancel{y}-xy^2 \leq -x+\cancel{x^2y}-\cancel{y}+xy^2$

$2x\leq 2xy^2$

$1\geq y^2$ ✓ (por ser $x<0$)

VI] · $0 > y > x \Longrightarrow \dfrac{y-x}{1-xy} \leq \dfrac{-x-y}{1+xy}$

$$y + \cancel{xy^2} - \cancel{x} - x^2 y \leq -\cancel{x} - y + x^2 y + \cancel{xy^2}$$

$$2y \leq 2x^2 y$$

$$1 \geq x^2 \quad \checkmark \quad (\text{por ser } y<0)$$

Todas las demostraciones se harían al revés de como han sido hechas.