PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1 La suma del perímetro de un cuadrado de lado a cm, y de la circunferencia de un círculo de radio r cm es de 240 cm. ¿Cuál es el valor de r si la suma de las áreas ha de ser mínima?

2 Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?

3 ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? ¿Cuál es este valor?

4 ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa?

5 Dos números no negativos son tales que sumando el primero al cuadrado del segundo resulte 9. Halle estos números de manera que su suma sea tan grande como sea posible

6 Halla dos números que sumen 20 y su producto sea máximo.

7 Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica con una capacidad de 160 litros. Halla las dimensiones del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.

8 A un placa de vidrio rectangular de 15 cm de largo y 10 cm de ancho se le ha roto en una esquina un pedazo triangular de tal modo que la longitud ha disminuido en 5cm y la anchura en 3cm. Queremos aprovechar el vidrio de manera que forme una nueva placa rectangular. ¿Cómo debemos hacer los cortes si queremos que tenga la mayor superficie posible?

9 Dada una lámina rectangular de tamaño 2m x 1m estudio cómo deberíamos cortar sus cuatro esquinas de manera que se pueda formar con ella una caja abierta de volumen máximo

10 Estudia qué puntos de la curva $y^2 = 4x$ son los más cercanos al punto (4, 0)

11 Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora, una a 60 km/h y la otra a 120 km/h. Ambas se dirigen hacia el punto de corte y han salido al mismo tiempo desde dos estaciones situadas respectivamente a 40km y 30 km del punto de intersección.
a) Halla la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo transcurrido desde el inicio del recorrido.
b) Halla el mínimo de esta distancia.

12 Se dibuja un rectángulo cuyos vértices inferiores se encuentran en el eje OX y cuyos vértices superiores se encuentran en la curva $y = senx$, siendo $0 \leq x \leq \pi$
a) Escriba una expresión para el área del rectángulo
b) Halle el área máxima del rectángulo

13 Una hoja de papel debe contener 18 cm2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

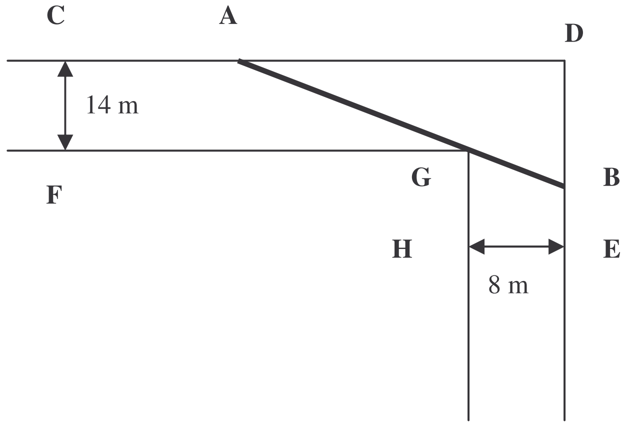
14 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

15 Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

16 De una lámina cuadrada de lado 10 cm. se cortan cuadrados en cada uno de los vértices con el objeto de hacer una caja abierta por arriba. Calcula el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen de la caja sea máximo.

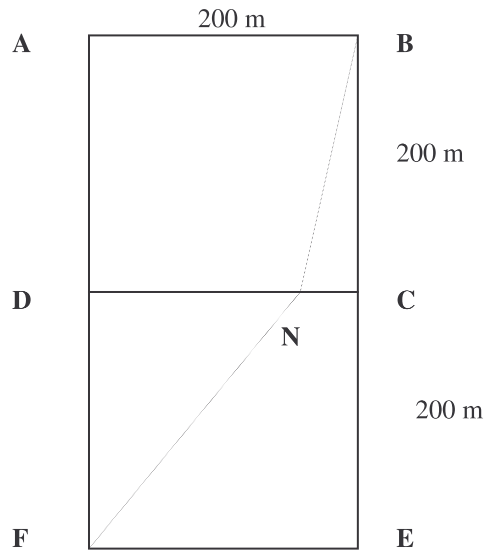
PROBLEMAS AVANZADOS DE OPTIMIZACIÓN

1 El dibujo muestra un canal con orillas CDE y FGH y un recodo en ángulo recto. El ancho del canal a lo largo de la sección CF es de 14 m y a lo largo de la sección HE de 8 m. Flota en el canal un palo AB, de grosor insignificante, que hay que maniobrar por el recodo en posición.
Demuestre que $8\cos ec\theta + 14\sec\theta$ representa la longitud del palo donde θ es el ángulo ABD.
Partiendo de aquí halle el palo más largo que se pueda maniobrar por el recodo.



2 Derive la función $f(x) = \dfrac{\log_{10} x}{x}$. Sabiendo que el único punto singular de $f(x)$ es un máximo y sin calcular valores numéricos, deduzca que $e^{\pi} > \pi^{e}$

3 ABCD y DCEF son dos campos cuadrados con lados de 200 m situados uno al lado del otro como se ve en la figura. El campo ABCD está arado y el campo DCEF tiene hierba.
Un hombre puede correr a 8 Km/h por el campo arado y a 10 Km/h por la hierba. Este hombre quiere ir de F a B con la mayor rapidez posible.
a) Demuestre que este hombre deberá pasar de un campo a otro en un punto N, a una distancia de unos 0,1138 Km desde D a fin de ir de F a B lo más rápidamente posible.
b) ¿Cuánto tiempo tardará en hacer el recorrido siguiendo la ruta más rápida?



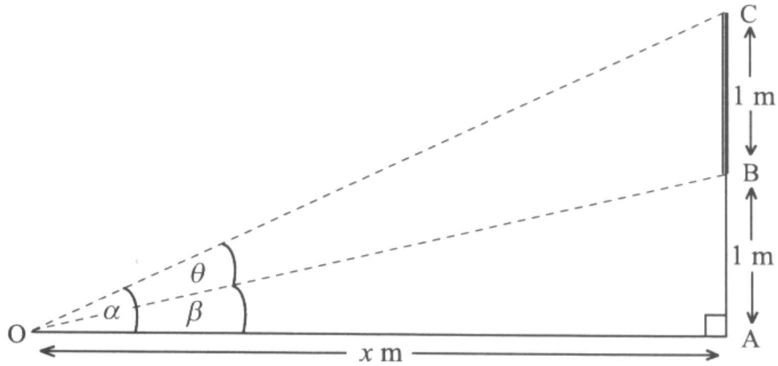
4 Se coloca en ana pared una pantalla de televisión BC de un metro de altura. La parte inferior de la pantalla de televisión, B, está situada a un metro por encima de la altura de los ojos de un observador. Los ángulos de elevación (AOC, AOB) desde la altura de los ojos del observador O, hasta la parte superior e inferior de la pantalla de televisión son α y β respectivamente. La distancia en horizontal desde el ojo del observador hasta la pared donde se ha colgado la pantalla de televisión es igual a x metros. El ángulo de visión del observador (BOC) es de θ radianes, tal como se muestra a continuación.

a) Compruebe que $\theta = arctg\dfrac{2}{x} - arctg\dfrac{1}{x}$

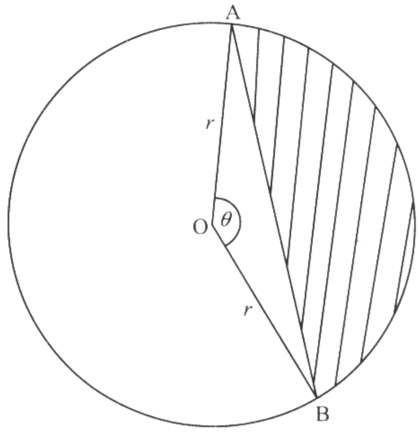
b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el valor **exacto** de x para el cual θ es máximo y justifique por qué esa x da un máximo de θ

c) Halle el valor máximo de θ

d) Halle dónde se debería situar el observador para que el ángulo de visión sea igual a 15º



5 La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio r. El ángulo central AOB es de θ radianes. La cuerda AB divide al círculo en dos segmentos, uno de menor tamaño (la región sombreada) y otro de mayor tamaño.



a) Compruebe que el área de menor tamaño es igual a $\frac{1}{2}r^2(\theta - sen\theta)$

b) Halle el área del segmento de mayor tamaño

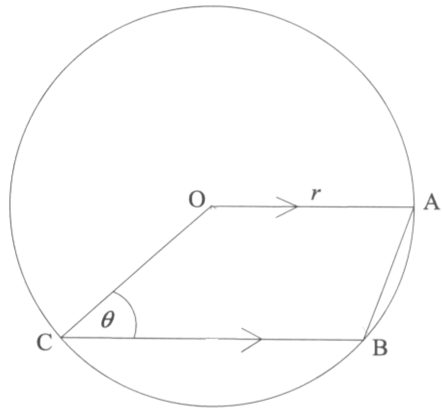
c) Sabiendo que la relación de áreas de los dos segmentos es 2/3, compruebe que $sen\theta = \theta - \frac{4\pi}{5}$

d) A partir de lo anterior, halle el valor de θ

6 La siguiente figura muestra un trapecio OABC donde OA es paralelo a CB. O es el centro de un círculo de radio r cm. A, B y C pertenecen a la circunferencia.

El ángulo OCB = θ

Sea T el área del trapecio OABC



a) Compruebe que $T = \frac{r^2}{2}(sen\theta + sen2\theta)$

Para un valor fijo de $\boldsymbol{r}$, el valor de T cambia según cambia el valor de θ

b) Compruebe que T toma su valor máximo cuando θ satisface la ecuación $4\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$ y verifique que ese valor de T es un máximo

c) Sabiendo que el perímetro del trapecio es 75 cm , halle el valor máximo de T