Examen PAU Junio 2013 Fase General – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2x \\ mx \end{pmatrix}$.

a) Si $(A \cdot B - B \cdot A) \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 3y \\ 2x-1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -x+3x & -y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 3-y \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2x-y-2x & 3y-2y \\ 2x-1-2x & 3-(3-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & y \\ -1 & y \end{pmatrix}$$

$$(AB-BA) \cdot C = \begin{pmatrix} -y & y \\ -1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -my+y \\ -m+y \end{pmatrix}$$

$$(AB-BA)C = D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -my+y = -2x \\ -m+y = mx \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + (1-m)y = 0 \\ -mx + y = m \end{array}\right\}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1-m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 2 + m - m^2 = -m^2 + m + 2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \ ; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

- Si $\left.\begin{array}{l} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M) = 2 \\ r(M^*) = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m = -1 \rightarrow |2| \neq 0 \Rightarrow r(M) = 1$
  $M^* = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(M^*) = 2$ $\Rightarrow$ S. Incomp.

- Si $m = 2 \rightarrow |2| \neq 0 \Rightarrow r(M) = 1$
  $M^* = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(M^*) = 2$ $\Rightarrow$ S. Incomp.

Por lo tanto, el sistema no tiene solución ni para $m=-1$ ni para $m=2$, para cualquier otro valor de m, la solución es única.

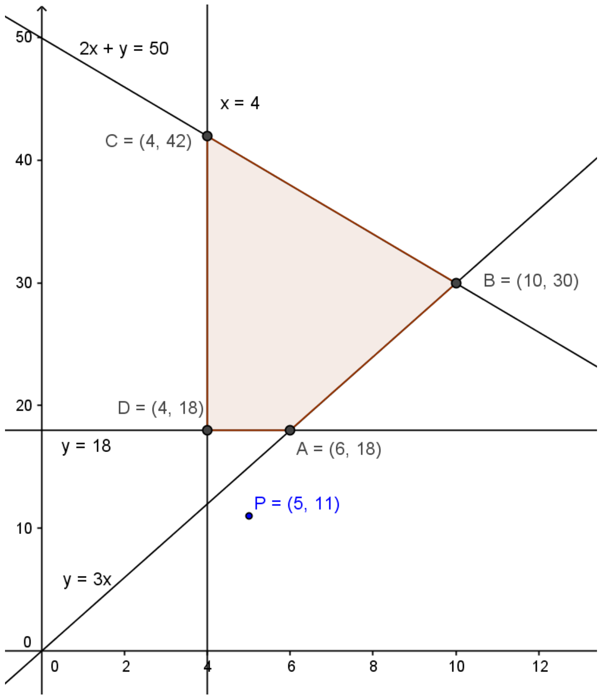
$\underline{m=1}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ -x+y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}}$$ es la solución.

2. Una empresa constructora dispone de un terreno de 100 dam^2 para construir dos tipos de casas. Las casas de tipo A ocuparán una superficie de 4 dam^2 y las de tipo B de 2 dam^2. Sobre plano ya se han vendido 4 casas de tipo A y 18 de tipo B, por tanto deben construir al menos esas unidades. Además, por estudios de mercado han decidido construir al menos el triple de casas de tipo B que de tipo A.

a) ¿Cuántas casas pueden construir de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si se construyesen 5 casas de tipo A y 11 de tipo B?

b) Si por cada casa de tipo A vendida obtendrán un beneficio de 100 000 euros, por cada casa de tipo B un beneficio de 60 000 euros y venden todo lo que construyen, ¿cuántas casas deben construir de cada tipo para maximizar beneficios?



x = nº casas tipo A construídas
y = nº casas tipo B construídas

$$\begin{cases} 4x+2y\le 100 \\ x\ge 4 \\ y\ge 18 \\ y\ge 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y\le 50 \\ x\ge 4 \\ y\ge 18 \\ y\ge 3x \end{cases}$$

El número de casas que se pueden construir de cada tipo son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

No podrá construir 5 casas tipo A y 11 tipo B porque, como se ve en el gráfico, ese punto no pertenece a la región factible. Es decir, que incumple alguna inecuación, concretamente únicamente cumple la segunda de ellas.

Objetivo: Maximizar los Beneficios
Función Objetivo: $B = 100\,000x + 60\,000y$

$$A(6,18) \rightarrow B = 1\,680\,000€$$
$$B(10,30) \rightarrow B = 2\,800\,000€$$
$$C(4,42) \rightarrow B = 2\,920\,000€$$
$$D(4,18) \rightarrow B = 1\,480\,000€$$

Obtendrá un máximo beneficio de 2 920 000€ construyendo 4 casas del tipo A y 42 casas del tipo B

3. La temperatura de un horno viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo que lleva encendido ($f(x)$ representa la temperatura en °C a los x minutos):

$$f(x) = \frac{900x + 200}{x + 10}, \quad x > 0.$$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Disminuye la temperatura del horno en algún instante?

b) Sabiendo que los materiales del horno se deterioran si éste alcanza los 1000°C, ¿habría que apagar el horno en algún momento para que no sufra daños?

$$f(x) = \frac{900X+200}{X+10}, \quad X>0$$

$f(x)$ no está definida en $x=-10$, pero no cumple que $X>0$.

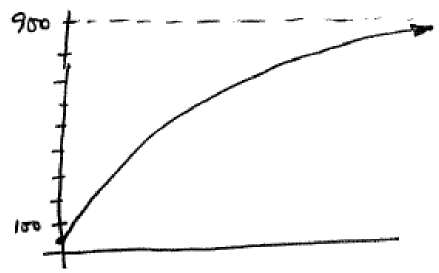
$$f'(x) = \frac{900(X+10) - (900X+200)}{(X+10)^2} = \frac{\cancel{900X}+9000-\cancel{900X}-200}{(X+10)^2} = \frac{8800}{(X+10)^2}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{8800}{(X+10)^2} = 0 \ ; \ 8800 = 0 \ \nexists \ f' \text{ no se anula.}$$

	0		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

$$\lim_{X\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{900X+200}{X+10} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{X\to\infty} \frac{900+\frac{200}{X}}{1+\frac{10}{X}} = \frac{900+0}{1+0} = 900$$

X	y
0^+	20
$+\infty$	900



a) La temperatura siempre está aumentando

b) La temperatura tiende a 900°C, pero sin alcanzarla nunca. Por lo tanto no llegará a 1000°C y no habrá que apagar el horno.

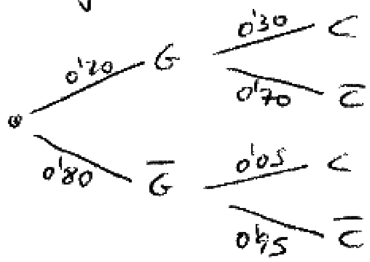
4. En un día determinado, el 20 % de los clientes de una estación de servicio repostó gasolina y el resto gasoil. Entre los que repostaron gasolina el 30 % compró algo en la tienda de la estación. Entre los que repostaron gasoil, sólo el 5 % compró algo en la tienda.

a) De entre los clientes que repostaron ese día, ¿qué porcentaje compró algo en la tienda?

b) De entre los clientes que repostaron ese día y compraron en la tienda, ¿qué porcentaje repostó gasolina?

G = "cliente que repostó gasolina"
C = " " " compró algo en la estación de servicio"

$P(G) = 0'20$
$P(C/G) = 0'30$
$P(C/\overline{G}) = 0'05$



a) $P(C) = P(G)\cdot P(C/G) + P(\overline{G})\cdot P(C/\overline{G}) = 0'20 \cdot 0'30 + 0'80 \cdot 0'05 = 0'1 = \boxed{10\%}$

b) $P(G/C) = \dfrac{P(G \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(G)\cdot P(C/G)}{P(C)} = \dfrac{0'20 \cdot 0'30}{0'1} = 0'6 = \boxed{60\%}$

Opción B

1. Una gran superficie vende dos productos estrella: reproductores de DVD y televisores, con cada reproductor pierde 200 euros y con cada televisor gana 400 euros, obteniendo un día determinado unos beneficios de 10 000 euros por la venta de ambos tipos de productos. Se sabe además que el número de reproductores de DVD que se han vendido ese día es m veces el número de televisores.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de televisores y de reproductores de DVD vendidos. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de reproductores de DVD que de televisores?

b) Suponiendo que se ha vendido el mismo número de televisores que de reproductores de DVD, ¿cuántos televisores se han vendido?

a) x = nº de TV vendidos → Gana $400x$ €
y = nº de DVD vendidos → Pierde $200y$ €

$$\left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ y=mx \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ -mx+y=0 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 400-200m \rightarrow m=2$$

- Si $m\neq 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ m=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m=2 \rightarrow |400|=400\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

$$M^*=\begin{pmatrix} \boxed{400} & -200 & 10000 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 400 & 10000 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 20000 \Rightarrow r(M^*)=2 \rightarrow$$

→ S. Incompatible.

Por lo tanto, para cualquier valor de m, salvo $m=2$, el sistema tendrá solución única. Para $m=2$, el sistema no se puede resolver. No es posible que $m=2$.

b)
$$\left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ -mx+y=0 \\ x=y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ -mx+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -m & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 400 & -200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -200\neq 0 \Rightarrow r(M)=2$$

$$M^*=\begin{pmatrix} 400 & -200 & 10000 \\ -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 400 & -200 & 10000 \\ -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10000m-10000$$

$$|M^*|=0 \Rightarrow m=1$$

- Si $m\neq 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M^*)=3 \\ r(M)=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Incompatible

- Si $m=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M^*)=2 \\ r(M)=2 \\ m=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

Como se trata de una situación real, el sistema debe tener solución, m debe ser entonces 1.

$$\left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ -x+y=0 \\ \cancel{x-y=0} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=25 \\ -x+y=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x=25 \\ y=25 \end{array}} \text{ es la solución.}$$

2. Dada la función $f(x) = 4x - 2x^2$, se pide:

a) Encontrar una primitiva F de f verificando que $F(6) = 0$.

b) Dibujar la gráfica de la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

a) $f(x) = 4x - 2x^2$

$F(x) = \int (4x - 2x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + C$

$F(6) = 0 \Rightarrow \quad 0 = 2\cdot 36 - \frac{2\cdot 216}{3} + C \;;\; C = 72$

$F(x) = \boxed{2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 72}$

b) $y = 4x - 2x^2$

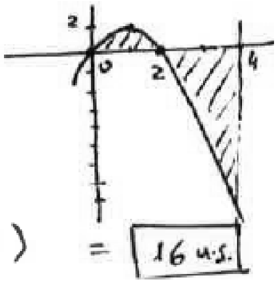
$x = 0 \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow 4x - 2x^2 = 0 \;;\; 2x(2 - x) = 0 \;;\; x = 0,\ 2$

$y' = 4 - 4x$

$y' = 0 \Rightarrow 4 - 4x = 0 \;;\; x = 1$

		1	
y'	+		−
y	↗		↘



	x	y
	0	0
	2	0
MAX	1	2
	4	-16

$\text{Área} = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx =$

$= \left(2\cdot 4 - \frac{2\cdot 8}{3}\right) - (0 - 0) =$

$- \left(2\cdot 16 - \frac{2\cdot 64}{3}\right) - \left(2\cdot 4 - \frac{2\cdot 8}{3}\right) = \boxed{16 \text{ u.s.}}$

3. De los empleados de una empresa se sabe que el 40 % acude al trabajo en transporte público, que el 75 % come en la empresa y que el 30 % acude al trabajo en transporte público y come en la empresa.

a) ¿Qué porcentaje acude al trabajo en transporte público y no come en la empresa?

b) Dentro de los que comen en la empresa, ¿qué porcentaje usa el transporte público?

T = "empleado que acude al Trabajo en Transporte público"

C = " " " come en la empresa"

$P(T) = 0'40$

$P(C) = 0'75$

$P(T \cap C) = 0'30$

	C	$\overline{C}$	
T	30%	10%	40%
$\overline{T}$	45%	15%	60%
	75%	25%	100%

a) $P(T \cap \overline{C}) = P(T) - P(T \cap C) = 0'40 - 0'30 = 0'10 = \boxed{10\%}$

b) $P(T / C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0'30}{0'75} = 0'4 = \boxed{40\%}$

4. Inicialmente el porcentaje de usuarios no satisfechos con un software en pruebas era del 30 %. Tras unas medidas de mejora, se tomó una muestra aleatoria de 800 usuarios y se observó que 208 manifestaron no estar satisfechos con el software.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las medidas de mejora no han surtido efecto, frente a la alternativa de que sí se ha reducido el porcentaje de usuarios no satisfechos.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 4 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'04) = 0'516$, $F(0'96) = 0'831$, $F(1'75) = 0'96$, $F(2'05) = 0'98$, $F(2'47) = 0'993$.)

a)

$H_0: p \geq 0'30$ | Siendo p la proporción de usuarios no satisfechos

$H_a: p < 0'30$ | con un software en pruebas.

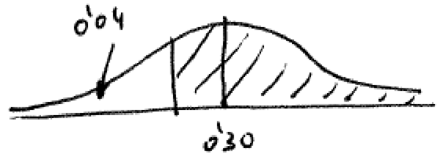
b)

$p_0 = 0'30$

$\hat{p} = \frac{208}{800} = 0'26$

$n = 800$

$\alpha = 0'04 \rightarrow z_\alpha = 1'75$



¿ $0'26 \in \left(0'30 - 1'75\sqrt{\frac{0'30 \cdot 0'70}{800}}, +\infty\right)$?

$0'26 \notin (0'2716, +\infty)$ Valor <u>significativo</u>

La proporción muestral ha resultado significativamente (4%) baja. Por ello, <u>rechazamos</u> la hipótesis nula y pensamos que la proporción de usuarios no satisfechos <u>SÍ</u> es inferior de 30%.

Examen PAU Junio 2013 Fase Específica – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} m \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 \\ 9-x \end{pmatrix}$.

a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

a) $A\cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+y \\ my \end{pmatrix}$

$A\cdot B = C \Rightarrow \left.\begin{matrix} mx+y=9 \\ my=9-x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} mx+y=9 \\ x+my=9 \end{matrix}\right\}$

b) $M = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

$|M| = m^2-1 \rightarrow m = \pm 1$

- Si $\left.\begin{matrix} m\neq 1 \\ m\neq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ n=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m=1 \rightarrow |1|=1\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$
  $M^* = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*)=1$, $n=2$ $\Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado

- Si $m=-1 \rightarrow |1|=1\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$
  $M^* = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} & 9 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2$ $\Rightarrow$ S. Incompatible

Por lo tanto, carece de soluciones para $m=-1$, tendrá solución única para $m\neq\pm 1$, y tendrá infinitas soluciones para $m=1$

$m=2$ $\quad \left.\begin{matrix} 2x+y=9 \\ x+2y=9 \end{matrix}\right\}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{9}{3} = 3$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{9}{3} = 3$

$\boxed{\begin{matrix} x=3 \\ y=3 \end{matrix}}$ es la solución

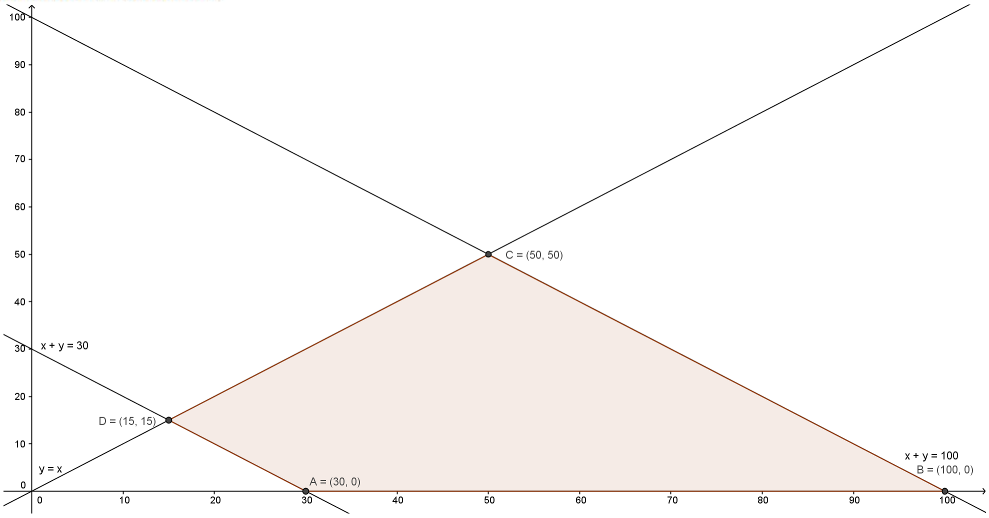
2. Una empresa familiar dispone de dos máquinas, A y B, para confeccionar la pieza que fabrica. Entre las dos deben hacer al menos 30 piezas semanales, que es un pedido fijo, y nunca más de 100 piezas, puesto que no tienen suficiente materia prima para ello. Además, el contrato de mantenimiento les obliga a fabricar con A al menos tantas piezas como con B.

a) De acuerdo con las restricciones anteriores, ¿cuántas piezas pueden ser confeccionadas semanalmente por cada máquina? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si por cada pieza que confecciona la máquina A consume 9 kWh y por cada una que confecciona la máquina B consume 4 kWh, ¿cuántas piezas debe confeccionar con cada máquina para que el consumo energético sea mínimo?, ¿a cuánto asciende dicho consumo?

x = nº piezas fabricadas por la máquina A
y = nº piezas fabricadas por la máquina B

$$\begin{cases} x+y \geq 30 \\ x+y \leq 100 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



El número de piezas que pueden confeccionar semanalmente con cada máquina son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

Objetivo: Minimizar el Consumo de Energía.

Función Objetivo: $C = 9x + 4y$

$A(30, 0) \rightarrow Consumo = 270\ kWh$

$B(100, 0) \rightarrow Consumo = 900\ kWh$

$B(50, 50) \rightarrow Consumo = 650\ kWh$

$D(15, 15) \rightarrow Consumo = 195\ kWh$

El Consumo de Energía mínimo semanal será de 195 kWh fabricando 15 piezas con la máquina A y 15 piezas con la máquina B

3. Dada la función $f(x) = e^{x/3}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 4$.

b) Representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

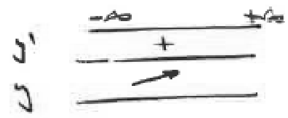
a) $f(x) = e^{x/3}$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \int e^{x/3}dx = 3e^{x/3} + C \\ F(0) = 4 \Rightarrow 4 = 3e^0 + C \; ; \; C = 1 \end{array}\right\} F(x) = \boxed{3e^{x/3} + 1}$$

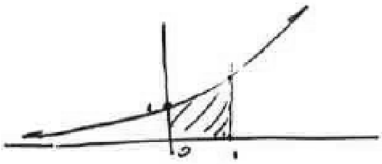
b) $y = e^{x/3}$

$x = 0 \to y = 1$

$y = 0 \to e^{x/3} = 0$ Absurdo.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$



x	y
$-\infty$	0
0	1
1	$e^{1/3}$
$+\infty$	$+\infty$

$$\text{Area} = \int_0^1 e^{x/3}dx = \left[3e^{x/3}+1\right]_0^1 = (3e^{1/3}+1) - (3e^0+1) = \boxed{3e^{1/3} - 3}$$

4. Ciertas ayudas gubernamentales fueron destinadas a intentar que más del 30 % de las casas de determinado país tengan ordenador. Para ver si dichas ayudas han sido efectivas, se toma una muestra de 400 casas, de las cuales resultan tener ordenador 142 de ellas.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las ayudas no han sido efectivas, frente a la alternativa de que sí lo han sido, habiendo conseguido que el porcentaje de casas con ordenador sea mayor del 30 %.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 5 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'05) = 0'52$, $F(0'95) = 0'829$, $F(1'64) = 0'95$, $F(1'96) = 0'975$, $F(2'4) = 0'992$.)

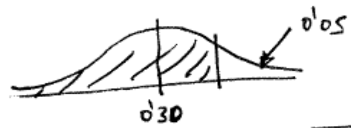
a) $H_0: p \leq 0'30$; $H_a: p > 0'30$ | Siendo p la proporción de casas con ordenador.

b) $p_0 = 0'30$

$\hat{p} = \frac{142}{400} = 0'355$

$n = 400$

$\alpha = 0'05 \to z_\alpha = 1'64$



$0'355 \in \left(-\infty, 0'30 + 1'64 \cdot \sqrt{\frac{0'30 \cdot 0'70}{400}}\right)$?

$0'355 \notin (-\infty, 0'3376)$ Valor significativo.

La proporción muestral es significativamente alta. Por ello, al 5% de significación, rechazamos la hipótesis nula y pensamos que la proporción de casas con ordenador sí ha aumentado.

Opción B

1. En un teatro hay localidades de dos clases: butacas de patio y butacas de segundo piso, cuyos precios son 20 y 10 euros, respectivamente. Determinado día, la recaudación total fue de 4000 euros. Además se sabe que el número de localidades de butacas de segundo piso que se vendieron fue m veces el número de localidades vendidas de butacas de patio.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de localidades vendidas de cada tipo. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el triple de localidades de butacas de segundo piso que de butacas de patio?

b) Suponiendo que se vendieron el doble de localidades de butacas de segundo piso que de localidades de butacas de patio, ¿cuántas localidades de butacas de patio se vendieron?

a) x = nº butacas de patio vendidas $\longrightarrow$ $20x$ € de recaudación.
y = " " " 2º piso " $\longrightarrow$ $10y$ € " " .

$$\left.\begin{array}{l} 20x+10y=4000 \\ y=mx \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=400 \\ -mx+y=0 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 2+m \longrightarrow m=-2$$

- Si $m \neq -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m=-2 \longrightarrow |2|=2\neq 0 \Rightarrow r(M)=1$
$$M^*=\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 400 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 400 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -800 \neq 0 \Rightarrow r(M^*)=2$$
$\Rightarrow$ Sistema Incompat.

Por lo tanto **sí** es posible que $m=3$, ya que el sistema tendría solución para cualquier $m\neq -2$

b) $m=2$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=400 \\ -2x+y=0 \end{array}\right\}$$
$$2y=200 \Rightarrow y=100 \ ; \ \boxed{x=50 \text{ butacas de patio vendidas}}$$

2. La temperatura (en ^oC) de una pieza viene dada por la función

$$f(x) = 10\frac{3x+4}{2x+5} \qquad \text{con } x \geq 0,$$

donde x representa el tiempo en horas desde su fabricación.

a) Representa gráficamente la función f. ¿Disminuye la temperatura de la pieza en algún instante?

b) ¿Cuál es la temperatura inicial a la que se fabrica la pieza? Sabiendo que la pieza se deteriora si alcanza los 20^oC, ¿hay riesgo de que la pieza se deteriore?

$f(x) = 10\,\frac{3x+4}{2x+5}$, $x \geq 0$

$f(x)$ no está definida en $x = -5/2$ que no es $x \geq 0$.

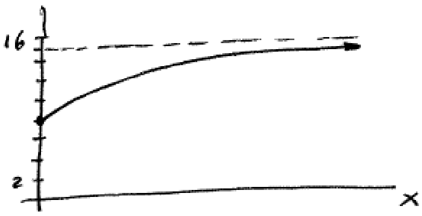
$f'(x) = 10\,\frac{3(2x+5)-(3x+4)\cdot 2}{(2x+5)^2} = 10\,\frac{\cancel{6x}+15-\cancel{6x}-8}{(2x+5)^2} = \frac{70}{(2x+5)^2}$

$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{70}{(2x+5)^2}=0$; $70=0$ ✗ f' no se anula.

	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$\nearrow$	

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 10\,\frac{3x+4}{2x+5} = 10\cdot\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} 10\,\frac{3+4/x}{2+5/x} = 10\cdot\frac{3+0}{2+0} = 15$

x	y
0	8
$+\infty$	15



a) La temperatura no disminuye en ningún momento

b) La temperatura inicial $(x=0)$ es de 8^oC.
Como la máxima temperatura que puede alcanzar es de 16^o, no llegará a 20^oC. No hay riesgo de que se deteriore la pieza.

3. En un congreso el 30 % de los asistentes habla francés, el 60 % habla inglés y el 80 % habla al menos uno de los dos idiomas. Elegido un asistente al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable tanto inglés como francés?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés, si se sabe que habla al menos uno de los dos idiomas?

F = "Asistente al congreso que hable francés"
I = " " " " " " inglés"

$P(F) = 0'30$
$P(I) = 0'60$
$P(F \cup I) = 0'80$

a) $P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) \Rightarrow P(F \cap I) = P(F) + P(I) - P(F \cup I) = \boxed{0'10}$

b) $P(I / F \cup I) = \dfrac{P(I \cap (F \cup I))}{P(F \cup I)} = \dfrac{P(I)}{P(F \cup I)} = \dfrac{0'60}{0'80} = \boxed{0'75}$

4. Un fabricante asegura que sus botellas de agua tienen un volumen medio de llenado de al menos 250 cl. Para comprobar si dicha afirmación es cierta, una oficina de consumidores selecciona al azar 200 botellas de dicho fabricante, para las que obtiene un volumen medio de llenado de 248 cl. Suponiendo que el volumen de llenado sigue una distribución normal con desviación típica 10 cl,

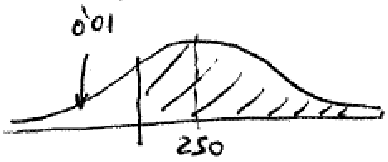
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el volumen medio de llenado coincide con el especificado por el fabricante, frente a la alternativa de que es menor.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 1 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'01) = 0'504$, $F(0'99) = 0'839$, $F(2'33) = 0'99$, $F(2'58) = 0'995$, $F(2'83) = 0'998$.)

a) $H_0 : \mu \geq 250$
$H_a : \mu < 250$
Siendo μ el volumen medio de llenado de las botellas de agua

b) $\mu_0 = 250$ cl
$\sigma = 10$ cl
$\overline{x} = 248$ cl
$n = 200$
$\alpha = 0'01 \rightarrow z_\alpha = 2'33$



¿$248 \in \left(250 - 2'33 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{200}}, +\infty\right)$?

$248 \notin (248'35, +\infty)$ Valor significativo (por muy poco)

Con un nivel de significación del 1%, rechazamos la hipótesis nula, más bien pensamos que el volumen medio de las botellas es menor que 250 cl