Examen PAU Junio 2014 Fase General – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Un bar recibe el pedido diario de refrescos y cervezas, por el que paga 6 euros, siendo el precio de cada refresco de 20 céntimos de euro y el de cada cerveza de m céntimos de euro. Si se intercambiasen los precios unitarios de los refrescos y las cervezas, habría pagado 6 euros y 50 céntimos.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de refrescos y el número de cervezas adquiridos ese día. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Cuántas cervezas habría comprado si cada cerveza costase a 30 céntimos de euro?

a)

x = nº de refrescos vendidos $\rightarrow$

y = " " cervezas vendidas $\rightarrow$

$0'20$ €/unidad	$\frac{m}{100}$ €/unidad
$\frac{m}{100}$ €/unidad	$0'20$ €/unidad
$0'20x+\frac{m}{100}y$	$\frac{m}{100}x+0'20y$

$$\left.\begin{array}{l} 0'2x+\frac{m}{100}y=6 \\ \frac{m}{100}x+0'2y=6'50 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x+my=600 \\ mx+20y=650 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 20 & m \\ m & 20 \end{pmatrix}$$

$$|A|=400-m^2 \longrightarrow m=\pm 20$$

- Si $m\neq\pm 20 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(A)=2 \\ r(A^*)=2 \\ n=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m=20 \rightarrow |20|=20\neq 0 \Rightarrow r(A)=1$
$A^*=\begin{pmatrix} \boxed{20} & 20 & 600 \\ 20 & 20 & 650 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 20 & 600 \\ 20 & 650 \end{vmatrix}=1000\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=2$ $\rightarrow$ Sistema Incompatible

- Si $m=-20 \rightarrow |20|=20\neq 0 \Rightarrow r(A)=1$
$A^*=\begin{pmatrix} \boxed{20} & -20 & 600 \\ -20 & 20 & 650 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 20 & 600 \\ -20 & 650 \end{vmatrix}=25000\neq 0 \Rightarrow r(A^*)=2$ $\rightarrow$ S. Incompatible

Por lo tanto, el sistema tiene solución para $m\neq\pm 20$ y es única. Para $m=20$ ó $m=-20$ no tendría solución.

b) $m=30$

$$\left.\begin{array}{l} 20x+30y=600 \\ 30x+20y=650 \end{array}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 30 \\ 650 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{-7500}{-500}=\boxed{15 \text{ refrescos}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 600 \\ 30 & 650 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 20 \end{vmatrix}}=\frac{-5000}{-500}=\boxed{10 \text{ cervezas}}$$

2. Una empresa fabrica y vende dos modelos de cámaras de fotos: SX230 y WX245. Para la fabricación de cada cámara del modelo SX230 se precisa de 30 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina, mientras que para la fabricación de cada cámara del modelo WX245 se precisa de 40 minutos de trabajo manual y 10 minutos de trabajo de máquina. Además se sabe que para la fabricación de estos dos modelos, la empresa dispone cada semana de 6000 minutos de trabajo manual y 3000 minutos de trabajo de máquina.

a) ¿Cuántas cámaras de cada modelo puede fabricar la empresa en una semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 100 cámaras de cada modelo en una semana?

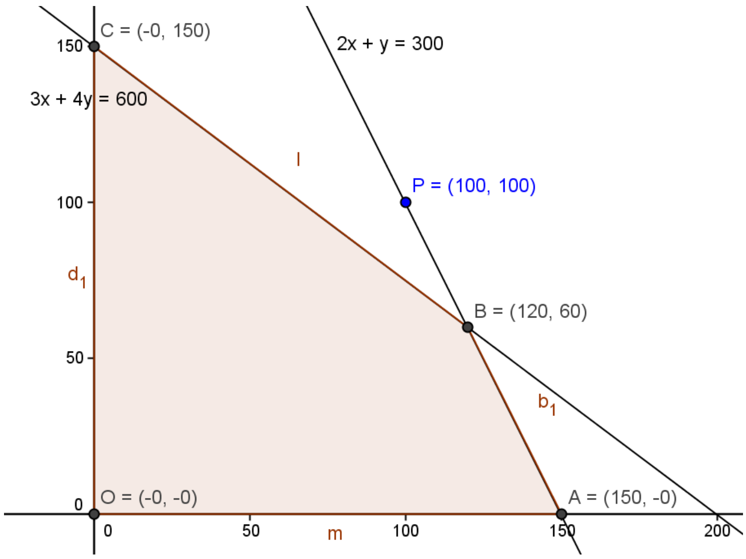
b) Si el beneficio por unidad vendida es de 50 euros para el modelo SX230 y de 60 euros para el modelo WX245 y la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántas cámaras de cada modelo debe fabricar en una semana para maximizar el beneficio?

x = nº de cámaras SX230 fabricadas
y = nº de cámaras WX245 fabricadas

$$\begin{cases} 30x + 40y \le 6000 \\ 20x + 10y \le 3000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

a) El número de cámaras que se pueden fabricar semanalmente son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

No se podrán fabricar 100 cámaras de cada tipo ya que el punto (100, 100) no pertenece a la zona factible. Es decir, que incumple alguna de las inecuaciones, concretamente la primera.



b) Función Objetivo: $Ben = 50x + 60y$

$A(0,0) \rightarrow Ben = 0€$

$B(150,0) \rightarrow Ben = 7.500€$

$B(120,60) \rightarrow Ben = 9.600€$

$D(0,150) \rightarrow Ben = 900€$

El beneficio máximo será de 9.600€ fabricando 120 cámaras SX230 y 60 del tipo WX245.

3. Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \frac{2}{a\cdot x+b} & \text{si } 0\le x<1\\ 1-\frac{x^2}{3} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

a) Determina los valores de a y b para que f sea una función continua en todo su dominio.

b) Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f y represéntala gráficamente.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \frac{2}{ax+b} & \text{si } 0\le x<1\\ 1-\frac{x^2}{3} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

a) • Para que f sea continua en $x=0$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}\\ f(0) &= \frac{2}{a\cdot 0+b}=\frac{2}{b}\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \frac{2}{a\cdot 0+b}=\frac{2}{b}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{b} \;;\; \boxed{b=4}$$

• Para que f sea continua en $x=1$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \frac{2}{a+b}\\ f(1) &= 1-\frac{1^2}{3}=\frac{2}{3}\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 1-\frac{1^2}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{a+b} \;;\; a+b=3 \;;\; a+4=3 \;;\; \boxed{a=-1}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \frac{2}{4-x} & \text{si } 0\le x<1\\ 1-\frac{x^2}{3} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

• Veamos los restantes valores de x:

$\frac{1+x}{2-x}$ es continua salvo en $x=2$, pero $2\not<0$.

$\frac{2}{4-x}$ es continua salvo en $x=4$, pero $4\notin[0,1)$

$1-\frac{x^2}{3}$ es continua en todo los reales por ser polinómica.

Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1\cdot(2-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{3}{(2-x)^2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{0-2\cdot(-1)}{(4-x)^2} = \dfrac{2}{(4-x)^2} & \text{si } 0<x<1 \\ -\dfrac{2x}{3} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$

- $\dfrac{3}{(2-x)^2}=0$; $3=0$ $\times$ no se anula en $(-\infty, 0)$
- $\dfrac{2}{(4-x)^2}=0$; $2=0$ $\times$ no se anula en $(0, 1)$
- $-\dfrac{2x}{3}=0$; $x=0$ $\times$ no es válido porque $0 \not> 1$, por lo tanto, no se anula en $(1, +\infty)$

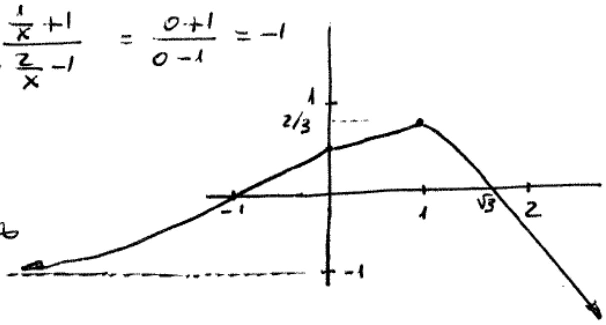
	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f'	+	+	−
f	↗	↗	↘

f es creciente en $(-\infty, 1)$
f es decreciente en $(1, +\infty)$

x	y
$-\infty$	-1
-1	0
0^-	$1/2$
0	$1/2$
1^-	$2/3$
1	$2/3$
$\sqrt{3}$	0
$+\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{2-x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{x^2}{3}\right) = 1-\infty = -\infty$$



4. Un gobierno ha dedicado una partida presupuestaria a intentar conseguir que más del 80 % de sus colegios públicos tengan al menos una sala de ordenadores. Para averiguar si los objetivos se han cumplido, se seleccionó una muestra aleatoria de 225 colegios, y se observó que 195 de ellos disponían de sala de ordenadores.

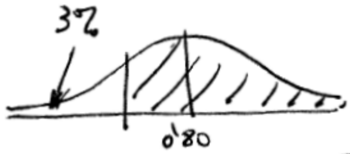
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la partida presupuestaria no ha conseguido el objetivo propuesto, frente a la alternativa de que sí lo ha hecho.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 3 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'03) = 0'512$, $F(0'97) = 0'834$, $F(1'88) = 0'97$, $F(2'17) = 0'985$, $F(2'5) = 0'994$.)

a) $H_0: p \le 0'80$
$H_a: p > 0'80$ | Siendo p la proporción de colegios públicos con sala de ordenadores.

b) $p_0 = 0'80$
$\hat{p} = \dfrac{195}{225} = 0'8\widehat{6}$
$n = 225$
$\alpha = 3\% \to z_\alpha = 1'88$



¿ $0'8\widehat{6} \in \left(0'80 - 1'88\sqrt{\dfrac{0'80\cdot 0'20}{225}}, +\infty\right)$?

$0'8\widehat{6} \in (0'7499, +\infty)$ ✓ Valor no significativo

Al 3% de significación aceptamos la hipótesis nula y deducimos que la proporción de colegios públicos con sala de ordenadores no ha subido del 80%

Opción B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Si $A \cdot B = C \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx + y \\ x + my \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \cdot D \Rightarrow \left.\begin{matrix} mx + y = -1 \\ x + my = 1 \end{matrix}\right\}$$

b) $M = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

$|M| = m^2 - 1 \longrightarrow m = \pm 1$

- Si $m \neq \pm 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} r(M) = 2 \\ r(M^*) = 2 \\ n = 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m = 1 \longrightarrow |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow r(M) = 1$

  $M^* = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(M^*) = 2$ $\Big| \Rightarrow$ S. Incompatible

- Si $m = -1 \longrightarrow |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow r(M) = 1$

  $M^* = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*) = 1$, $n = 2$ $\Big] \Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado

Por lo tanto, tiene solución única para cualquier $m \neq \pm 1$, para $m = -1$ tiene infinitas soluciones y para $m = 1$ carece de soluciones

$\underline{m = 2}$ $\quad \left.\begin{matrix} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3}{3} = -1$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{3} = 1$

$\boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}}$ es la solución

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{(2+x)^2} - 1$, se pide:

a) Encontrar una primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo $[-1, \infty)$ y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) $f(x) = \frac{9}{(2+x)^2} - 1$ dom f: $\mathbb{R} - \{-2\}$

$F(x) = \int \left(\frac{9}{(2+x)^2} - 1\right) dx = \int \left(9(2+x)^{-2} - 1\right) dx = 9\frac{(2+x)^{-1}}{-1} - x + C =$

$= -\frac{9}{2+x} - x + C$

$F(1) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{9}{3} - 1 + C \;;\; C = 5$

$\boxed{F(x) = -\frac{9}{2+x} - x + 5}$

b) $y = \frac{9}{(2+x)^2} - 1$ d

$x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{9}{(2+x)^2} - 1 \;;\; 1 = \frac{9}{(2+x)^2} \;;\; (2+x)^2 = 9 \;;\; 2+x = \pm 3 \;;\; x = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$

$y' = \frac{-9 \cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{-18}{(2+x)^3}$

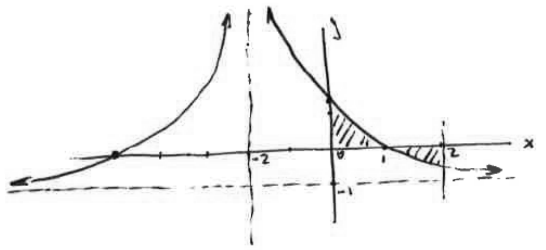
$y' = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-18}{(2+x)^3} \;;\; 0 = -18$ Absurdo

		-2	
y'	+		−
y	↗		↘

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{9}{+0} - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{9}{+0} - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{9}{+\infty} - 1 = -1 \;;\; \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{9}{+\infty} - 1 = -1$



x	y
$-\infty$	-1
-5	0
-2^-	$+\infty$
-2^+	$+\infty$
0	$5/4$
1	0
$+\infty$	-1
2	$-7/16$

$\text{Area} = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = \left[-\frac{9}{2+x} - x\right]_0^1 - \left[-\frac{9}{2+x} - x\right]_1^2 =$

$= \left(-\frac{9}{3} - 1\right) - \left(-\frac{9}{2} - 0\right) - \left(-\frac{9}{4} - 2\right) + \left(-\frac{9}{3} - 1\right) = \boxed{49/3 \text{ u.s.}}$

3. De los usuarios de móvil de un país, se sabe que un 30 % tiene un móvil marca Sanso con sistema operativo Andry. De los que tienen un móvil marca Sanso, el 40 % usa el sistema operativo Andry. Si se selecciona al azar una persona con móvil de ese país:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su móvil sea marca Sanso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su móvil sea marca Sanso, pero no use el sistema operativo Andry?

S = "móvil marca Sanso"
A = "móvil con sistema operativo Andry"

a) $P(S \cap A) = 0'30$
$P(A/S) = 0'40$ $\longrightarrow P(A/S) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(S)} \Rightarrow P(S) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(A/S)} = \dfrac{0'30}{0'40} = \boxed{0'75}$

b) $P(S \cap \overline{A}) = P(S) \cdot P(\overline{A}/S) = P(S) \cdot [1 - P(A/S)] = 0'75 \cdot [1 - 0'40] = \boxed{0'45}$

4. Según la normativa vigente, los equipos de aire acondicionado no deben emitir más de 1000 ppm (partes por millón) de CO_2. Un auditor realiza un estudio con 49 equipos fabricados por determinada empresa, para los que encuentra una emisión media de CO_2 de 1025 ppm. Se supone además que la emisión de CO_2 de estos equipos sigue una distribución normal con una desviación típica de 50 ppm.

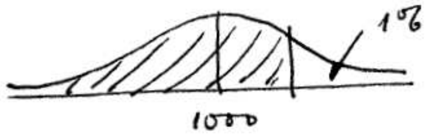
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que los equipos fabricados por esta empresa cumplen, en media, la normativa sobre contaminación por CO_2, frente a la alternativa de que la emisión media es mayor de lo permitido.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 1 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'01) = 0'504$, $F(0'99) = 0'839$, $F(2'33) = 0'99$, $F(2'58) = 0'995$, $F(3'5) = 1$.)

a) $H_0 : \mu \leq 1000$
$H_a : \mu > 1000$
Siendo μ la emisión (en ppm) de CO_2

b) $\mu_0 = 1000$ ppm
$\sigma = 50$ ppm
$\overline{X} = 1025$ ppm
$n = 49$
$\alpha = 1\% \longrightarrow z_\alpha = 2'33$



¿$1025 \in \left(-\infty, 1000 + 2'33 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{49}}\right)$?

$1025 \notin (-\infty; 1016'64)$ / Valor significativo

Debemos rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 1%. Por ello deduciremos que la emisión de CO_2 sí ha subido de 1000 ppm

Examen PAU Junio 2014 Fase Específica – Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción A

1. Una fábrica de tabletas de chocolate ha usado 200 kilogramos de chocolate y 100 litros de leche en la producción de dos tipos de tabletas A y B. Cada tableta de tipo A usa $0'2$ kilogramos de chocolate y $0'1$ litros de leche y cada tableta de tipo B usa m kilogramos de chocolate y $0'2$ litros de leche.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de tabletas producidas de tipo A y B, respectivamente. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si cada tableta de tipo B precisa de $0'4$ kg de chocolate y se produjeron 200 tabletas de tipo B, ¿cuántas se habrán producido de tipo A?

a)

x = nº tabletas tipo A producidas → $0'2x$ Kg chocolate, $0'1x$ Kg leche

y = " " " B " → my Kg chocolate, $0'2y$ Kg leche

$$\left.\begin{array}{l} 0'2x + my = 200 \\ 0'1x + 0'2y = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 10my = 2000 \\ x + 2y = 1000 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 10m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 4 - 10m \rightarrow m = 0'4$$

- Si $m \neq 0'4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

- Si $m = 0'4 \rightarrow |2| = 2 \neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

$$M^* = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 2000 \\ 1 & 2 & 1000 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2000 \\ 1 & 1000 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*)=1, \; n=2 \Rightarrow \text{S. Compatible Indeterminado}$$

Por lo tanto, el sistema siempre tiene solución. Si $m \neq 0'4$ la solución es única, si $m = 0'4$ tendría infinitas soluciones.

b)

$\underline{m = 0'4}$ $\quad$ $\underline{y = 200}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 10\cdot 0'4\cdot 200 = 2000 \\ x + 2\cdot 200 = 1000 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2000-800}{2} = 600, \quad x = 1000 - 400 = 600 \checkmark$$

Se produjeron 600 tabletas tipo B

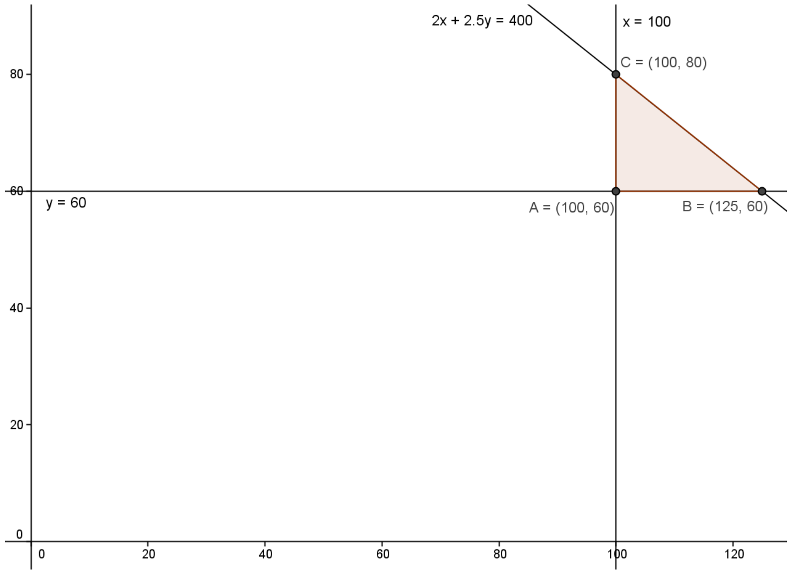
2. Una carpintería industrial fabrica tablas de madera de dos grosores: fino y grueso. Se tardan 2 minutos en fabricar un centímetro de tabla fina y 2'5 minutos en fabricar un centímetro de tabla gruesa. Además se sabe que cada día se dispone de 400 minutos para la fabricación de dichas tablas y que hay que fabricar al menos 100 cm de tabla fina y al menos 60 cm de tabla gruesa.

a) De acuerdo con las restricciones anteriores, ¿cuántos centímetros de cada tipo de tabla se pueden fabricar cada día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si los costes de fabricación por centímetro son de 4 € para la tabla fina y 6 € para la gruesa, ¿cuántos centímetros de cada tipo de tabla se deben fabricar en un día para que el coste de fabricación sea mínimo? ¿a cuánto asciende dicho coste?

x = cm. fabricados de tablas grosor fino
y = cm. fabricados de tablas grosor grueso

$$\begin{cases} 2x + 2{,}5y \leq 400 \\ x \geq 100 \\ y \geq 60 \end{cases}$$



a) El total de centímetros que se pueden fabricar diariamente de cada tipo de tabla son los puntos pertenecientes a la zona factible señalada en el gráfico.

b) Función Objetivo: $f(x,y) = 4x + 6y$

$$A(100, 60) \to f(x,y) = 760€$$
$$B(120, 60) \to f(x,y) = 840€$$
$$C(100, 80) \to f(x,y) = 880€$$

El mínimo de los costes de fabricación será de 760€ fabricando cada día 100 centímetros de tablas de grosor fino y 60 de centímetros de tablas de grosor grueso.

3. Dada la función $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x-1}}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(5) = 1$.

b) Representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 5$.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad$ $\text{dom} f = (1, +\infty)$

$$F(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int -(x-1)^{-1/2}\,dx = -\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2} + C = C - 2\sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$F(5) = 1 \Rightarrow 1 = C - 2\sqrt{4} \;;\; 1 = C - 4 \;;\; C = 5$$

$$\Rightarrow F(x) = \boxed{5 - 2\sqrt{x-1}}$$

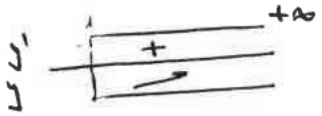
b) $y = \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

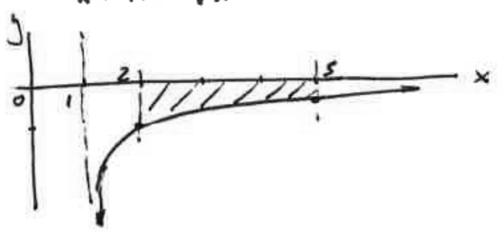
$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-1}{\sqrt{x-1}} \;;\; 0 = -1 \text{ Absurdo}$$

$$y' = \frac{+1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \;;\; 0 = 1 \text{ Absurdo}$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$



x	y
1^+	$-\infty$
2	-1
5	$-1/2$
$+\infty$	0

$$\text{Area} = -\int_2^5 \frac{-1}{\sqrt{x-1}}\,dx = -\left[-2\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = \boxed{4 \text{ u.s.}}$$

4. Un portal de ventas por Internet consideraba que como mucho el 40 % de sus visitantes compraban. Sin embargo, en la dirección del portal se piensa que en el último año, el porcentaje de visitantes que compra ha aumentado. Para contrastar este hecho se tomó una muestra aleatoria de 500 visitantes y se observó que 225 compraron.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el porcentaje de visitantes del portal que compran no ha aumentado, frente a la alternativa de que sí lo ha hecho, siendo dicho porcentaje mayor del 40 %.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 4 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(0'04) = 0'52$, $F(0'96) = 0'83$, $F(1'75) = 0'96$, $F(2'05) = 0'98$, $F(2'28) = 0'99$.)

a) $H_0 : p \leq 0'40$
$H_a : p > 0'40$
Siendo p la proporción de visitantes del portal que acaba comprando.

b) $p_0 = 0'40$

$\hat{p} = \frac{225}{500} = 0'45$

$n = 500$

$\alpha = 4\% \rightarrow z_\alpha = 1'75$

¿ $0'45 \in \left(-\infty, 0'40 + 1'75\sqrt{\frac{0'40 \cdot 0'60}{500}}\right)$?

$0'45 \notin (-\infty, 0'4383)$ Valor significativo.

El porcentaje de la muestra es significativamente (4%) alto. Debemos entonces rechazar la hipótesis nula y pensar que el porcentaje de visitantes que acaba comprando sí ha subido del 40%.

Opción B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} m-3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $A \cdot B = A \cdot C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+my \\ x+3y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cancel{m}+3+\cancel{m} \\ m-\cancel{3}+\cancel{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+my=3 \\ x+3y=m \end{array}\right\}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -3-m \rightarrow m=-3$$

• Si $m \neq -3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

• Si $m=-3 \rightarrow |-1| = -1 \neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

$M^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(M^*)=1$, $n=2$ $\Rightarrow$ S. Compatible Indeterminado

Por lo tanto, el sistema siempre tiene solución. Es única para $m \neq -3$ y tiene infinitas soluciones para $m=-3$

$m=2$

$$\begin{array}{l} -x+2y=3 \\ x+3y=2 \\ \hline 5y=5 \rightarrow y=1 \;;\; x=-1 \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \end{array}}$ es la solución

2. La función de costes de una factoría, se puede estimar mediante la expresión

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 12x + 100,$$

donde x representa la cantidad producida de determinado artículo, con lo que $x \geq 0$.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Representa gráficamente la función f.

b) Determina la cantidad de artículo producida cuando el coste es mínimo. ¿Cuánto vale dicho coste?

c) ¿Cuánto vale el coste si no se produce nada de ese artículo?

$f(x) = x^3 - 10x^2 + 12x + 100 \quad (x \geq 0)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 20x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0$

$x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{6} = \dfrac{20 \pm 16}{6} \begin{cases} 6 \\ 2/3 \end{cases}$

	0 — 2/3	2/3 — 6	6 — $+\infty$
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

El coste disminuye produciendo $\boxed{\text{entre } 2/3 \text{ y } 6 \text{ artículos}}$.

b) El coste mínimo, observando el diagrama anterior, puede ser en $x = 0$ ó en $x = 6$:

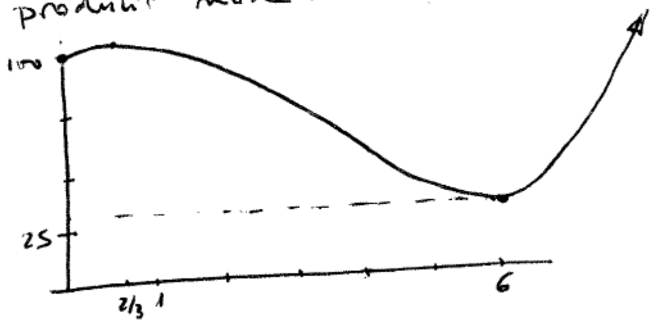
$f(0) = 100$

$f(6) = \boxed{28} \longleftarrow$ Mínimo coste $= 28$ para 6 artículos producidos.

c) $f(0) = \boxed{100}$ es el coste sin producir nada.

La gráfica sería:

x	y
0	100
2/3	101'63
6	28
$+\infty$	$+\infty$



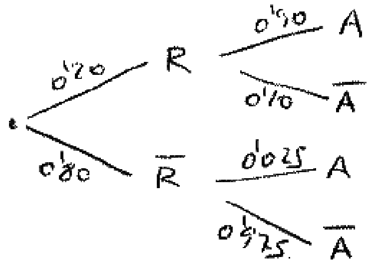
3. Se estima que el 20% de los clientes de una superficie comercial roban algún producto en su compra. La probabilidad de que suene la alarma si se ha producido un robo es de $0'9$ y la de que suene por error si no se ha producido es de $0'025$. Si se elige un cliente al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le suene la alarma?

b) Si le ha sonado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que realmente haya cometido un robo?

R = "cliente que roba"
A = "que suene la alarma"

$P(A/R) = 0'90$
$P(A/\overline{R}) = 0'025$
$P(R) = 0'20$



<u>a</u> $P(A) = P(R)\,P(A/R) + P(\overline{R})\cdot P(A/\overline{R}) = 0'20\cdot 0'90 + 0'80\cdot 0'025 = \boxed{0'2}$

<u>b</u> $P(R/A) = \dfrac{P(R\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(R)\cdot P(A/R)}{P(A)} = \dfrac{0'20\cdot 0'90}{0'2} = \boxed{0'90}$

4. Un banco quiere analizar si las comisiones que cobra a sus clientes por operaciones en el mercado bursátil son mayores que las que cobra la competencia, que están alrededor de los 12 € mensuales. Para ello toma una muestra aleatoria de 64 operaciones bursátiles realizadas por dicho banco y observa que la comisión promedio es de $13'6$ €. Se supone además que la comisión sigue una distribución normal con desviación típica $4'3$ €.

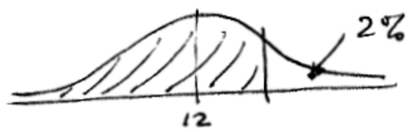
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la comisión media es menor o igual que la de la competencia, frente a la alternativa de que es mayor de los 12 € que cobra la competencia.

b) ¿A qué conclusión se llega en el contraste anterior para un nivel de significación del 2%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(0'02) = 0'51$, $F(0'98) = 0'84$, $F(2'05) = 0'98$, $F(2'33) = 0'99$, $F(2'98) = 0'999$.)

<u>a</u> $H_0: \mu \leq 12$ | Siendo μ la comisión que cobran a los clientes los
$H_a: \mu > 12$ | bancos de la competencia.

<u>b</u> $\mu_0 = 12$ €
$\sigma = 4'3$ €
$n = 64$
$\overline{x} = 13'6$ €
$\alpha = 2\% \rightarrow z_\alpha = 2'05$



¿ $13'6 \in \left(-\infty, 12 + 2'05\,\dfrac{4'3}{\sqrt{64}}\right)$?

$13'6 \in (-\infty, 13'10)$ ✓ Valor <u>no</u> significativo

<u>Aceptaremos</u> la hipótesis nula a un 2% de significación, pensando que las comisiones de la competencia <u>no</u> son mayores de 12€