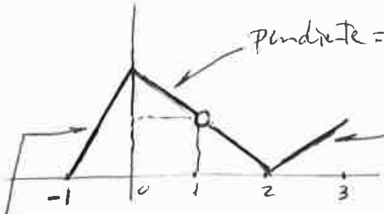
JUN'94

Derivada = Pendiente de la recta Tangente.



pendiente $= \frac{-2}{2} = -1$

pendiente $= \frac{1}{1} = 1$

Pendiente $= \frac{2}{1} = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -1<x<0 \\ -1 & \text{si } 0<x<1 \\ -1 & \text{si } 1<x<2 \\ 1 & \text{si } 2<x<3 \end{cases}$$

No está definida la derivada en los puntos siguientes:

En $x=0$ y en $x=2$ por ser puntos angulosos.
En $x=1$ por no ser continua la función
En $x=-1$ y en $x=3$ por estar definida la función solo por una parte (dcha e izq respect.)

SEPT 94

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x^3+2ax^2+bx+3}$$

Discont Evitable en $x=1 \Rightarrow$

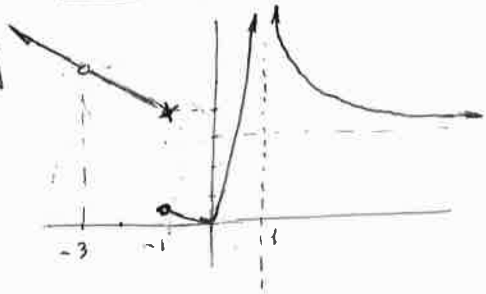
$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 1^2+b=0 \\ 1^3+2a\cdot 1^2+b\cdot 1+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=-4 \\ b=4 \end{array}}$$

$$f(x) = \frac{4-4x^2}{x^3-8x^2+4x+3} = \frac{4(1+x)(1-x)}{(x-1)(x^2-7x-3)} = \frac{-4(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2-7x-3)}$$

	1	-8	4	3
1		1	-7	-3
	1	-7	-3	0

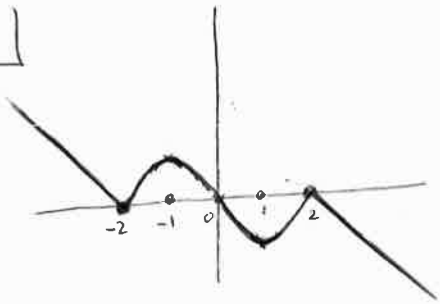
$$\boxed{g(x) = \frac{-4(x+1)}{x^2-7x-3}}$$

JUN 95



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{x+3} & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

SEPT 95



$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=0 \\ f'(-1^-)>0 \\ f'(-1^+)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Máximo Relativo en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)<0 \\ f'(1^+)>0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Mínimo Relativo en } x=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-)=-1 \\ f'(-2^+)>0 \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ \underline{no} es derivable en } x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^+)=-1 \\ f'(2^-)>0 \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=2$$

Al estar definida f' en $(-\infty,+\infty)$ salvo en $x=\pm 2$ (donde f sí está definida), la función debe ser continua en $(-\infty,+\infty)$, luego <u>no</u> tiene asíntotas verticales.

Las rectas $\begin{array}{l} y = 2-x \\ y=-2-x \end{array}$ serán asíntotas oblicuas en $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$ respectivamente.

JUN 96 $f(x) = \ln x$

Dominio $= (0,+\infty)$ $\boxed{\text{No corta al eje } Y}$

$y=0 \Rightarrow \ln x = 0$ $\boxed{x=1}$ $\boxed{(1,0)\text{ Punto corte eje } X}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota vertical } x=0}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

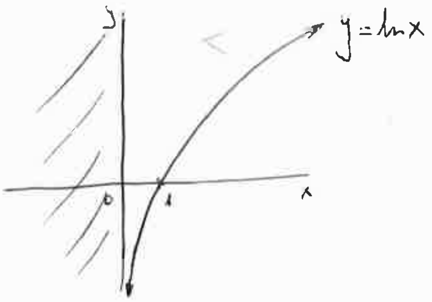
$f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{\text{No tiene puntos estacionarios}}$

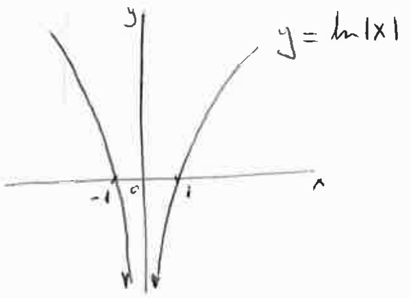
$f'(x)>0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{f(x)\text{ es monótona creciente en } (0,+\infty)}$

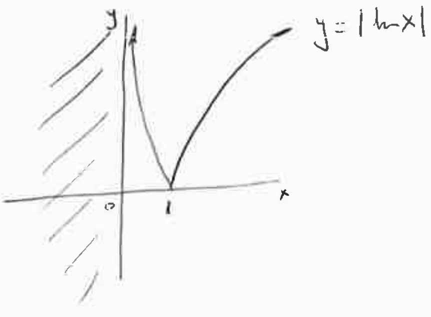
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

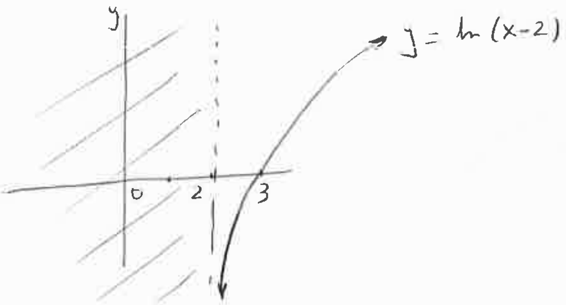
$f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{\text{No tiene puntos de inflexión}}$

$f''(x)<0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{f(x)\text{ es cóncava en } (0,+\infty)}$









SEPT 94 $y=ax^3+bx^2+cx+d$; $y'=3ax^2+2bx+c$; $y''=6ax+2b$

$P(2,1) \Rightarrow 1 = 8a+4b+2c+d$

Tangente paralela eje X en $P(2,1) \Rightarrow 0 = 12a+6b+c$

Inflexión en $P(2,1) \Rightarrow 0 = 12a+2b$

Origen $\Rightarrow \boxed{0=d}$

$$\left.\begin{array}{l} 8a+4b+2c=1 \\ 12a+6b+c=0 \\ 12a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=1/32 \\ b=-3/16 \\ c=3/4 \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y=\tfrac{1}{32}(x^3-6x^2+12x)}$$

SEPT 96

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|+1}$$

$|x|+1=0 \Rightarrow |x|=-1$ ✗ $\boxed{\text{Dominio} = (-\infty,+\infty)}$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 1 \quad \oplus$

Signo x^2-1

$\ominus \quad 0 \quad \oplus$

Signo x

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{-x+1} & \text{Si } x<-1 \\ 0 & \text{Si } x=-1 \\ \dfrac{1-x^2}{-x+1} & \text{Si } -1<x<0 \\ 1 & \text{Si } x=0 \\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{Si } 0<x<1 \\ 0 & \text{Si } x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{Si } x>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Simplificando}} f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{Si } x<-1 \\ 0 & \text{Si } x=-1 \\ 1+x & \text{Si } -1<x<0 \\ 1 & \text{Si } x=0 \\ 1-x & \text{Si } 0<x<1 \\ 0 & \text{Si } x=1 \\ x-1 & \text{Si } x>1 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x<-1 \\ 1 & \text{Si } -1<x<0 \\ -1 & \text{Si } 0<x<1 \\ 1 & \text{Si } x>1 \end{cases}}$$

No existe la derivada en $x=-1$, $x=0$, $x=1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-(-1+h)-1-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(-1) = \boxed{-1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1+(-1+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = \boxed{1} \end{cases}$$

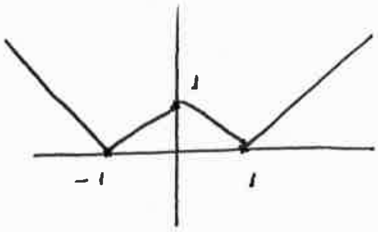
Luego $\nexists f'(-1)$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1+h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} 1 = \boxed{1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}(-1) = \boxed{-1} \end{cases}$$

Luego $\nexists f'(0)$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1-(1+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(-1) = \boxed{-1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1+h-1-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = \boxed{1} \end{cases}$$

Luego $\nexists f'(1)$



JUN 97

Precio Alquiler	Nº Apartamentos Alquilados	Ganancia
50.000	40	50.000 × 40 = 2.000.000
52.500	39	52.500 · 39 = 2.047.500
55.000	38	⋮
57.500	37	
⋮	⋮	

$$\text{Ganancia} = (50.000 + x \cdot 2500) \cdot (40 - x)$$

(x es el nº de apartamentos que quedan sin alquilar)

$$(x = 0, 1, 2, 3, \ldots 40)$$

$$G' = 2500(40-x) + (50000 + 2500x)\cdot(-1) = 100.000 - 2500x - 50000 - 2500x =$$

$$= 50000 - 5000x$$

$$G' = 0 \implies x = \frac{50000}{5000} = 10$$

0 (+) 10 (−) 40

Signo G'

Máxima ganancia para $x = 10$

Alquilará 30 apartamentos a 75.000 ptas $\implies$ Ganancia Máxima $= \boxed{2.250.000 \text{ ptas}}$

SEPT 97

$f(x)$ tiene un mínimo **absoluto** en $x_0 \iff f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \text{Dominio}$

$f(x)$ tiene un mínimo **relativo** en $x_0 \iff f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in$ Un entorno de x_0

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x = \pm 1$$ Puntos Estacionarios.

(+) −1 (−) 0 (−) 1 (+)

Signo $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Máximo relativo en $x = -1$

Mínimo relativo en $x = 1$

Para los valores de x positivos: 0 (−) 1 (+)

Signo $f'(x)$

El mínimo relativo de $x = 1$ será absoluto, por lo que:

$$f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in (0, +\infty) \implies x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2 \implies \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

JUN 98

$f(x) = (x-\alpha)^2 + \cos x$

$f'(x) = 2(x-\alpha) - \operatorname{sen} \alpha$

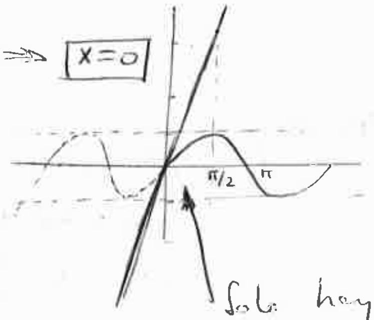
$f(x)$ tiene un extremo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow -2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$f(x) = x^2 + \cos x$

$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2x \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\ominus \quad 0 \quad \oplus$

Signo $f'(x)$



Sólo hay un punto de corte porque en $x=0$ la pendiente de $\operatorname{sen} x$ es 1 y la de $2x$ es 2

Mínimo relativo en $x=0$

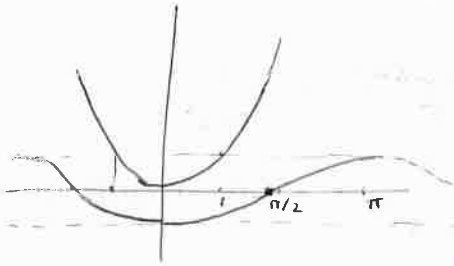
$f(x)$ decreciente en $(-\infty, 0)$
$f(x)$ creciente en $(0, +\infty)$

$x=0 \Rightarrow y=1$ $\quad$ $\boxed{(0,1) \text{ Punto corte con eje } Y}$

$y=0 \Rightarrow x^2 = -\cos x$

No tiene solución

$\boxed{\text{No corta al eje X}}$



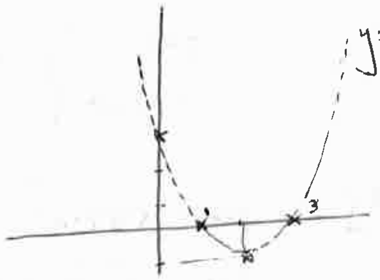
SEPT 98

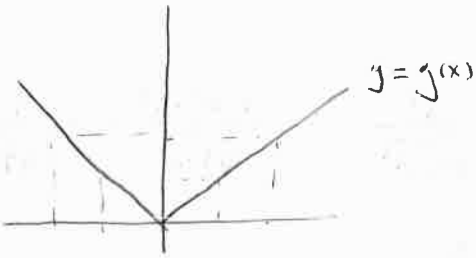
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0$ $\quad (x=2)$ Punto Estacionario. $\qquad$ Mínimo $(2,-1)$

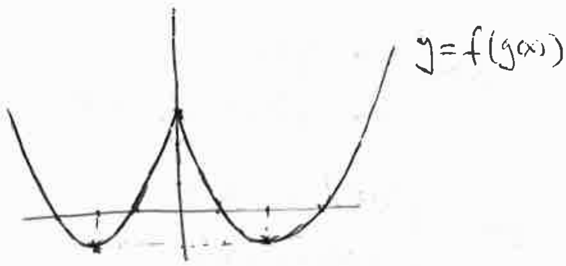
$f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \quad x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{matrix}(1,0)\\(3,0)\end{matrix}}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=3$ $\quad \boxed{(0,3)}$

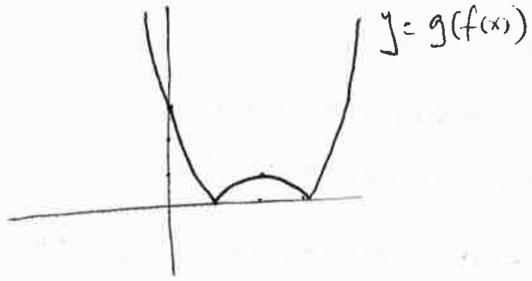




$f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$



$g(f(x)) = g(x^2-4x+3) = |x^2-4x+3|$



JUN 99

$$y = x^2 + \alpha \qquad \Big| \qquad x = \pm 1 \begin{cases} \to y = 1+\alpha \\ \to y' = \pm 2 \end{cases} \qquad \boxed{y = \pm 2(x \mp 1) + 1 + \alpha}$$
$$y' = 2x$$

Origen coordenadas: $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 0 = \pm 2 \cdot (\mp 1) + 1 + \alpha$

$0 = -2 + 1 + \alpha$

$\boxed{\alpha = 1}$

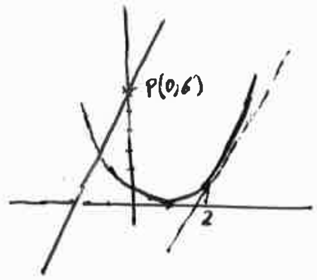
SEPT 00

$f(x) = (x-1)^2$

$f'(x) = 2(x-1)$

$x = 2 \Rightarrow f'(2) = 2\cdot(2-1) = 2 \qquad m = 2$

$\left.\begin{matrix} P(0,6) \\ m=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-6 = 2(x-0) \ ; \ \boxed{y = 2x+6}$



SEPT 04

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2} \qquad x > 2$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$

$x = 3 \begin{cases} \to f(3) = 7 \\ \to f'(3) = -5 \end{cases}$ Recta Tangente: $y-7 = -5(x-3)$

$\boxed{y = 22-5x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1} = 2 \to$ A. Horizontal $y = 2$

$\left.\begin{matrix} y=2 \\ y=22-5x \end{matrix}\right\} \quad 2 = 22-5x \ ; \ 5x = 20 \ ; \ x = 4 \to y = \dfrac{9}{2} \qquad \boxed{P(4, 9/2)}$

JUN 05

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 0 \begin{cases} \to y = 0 \\ \to f'(0) = \dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2 \end{cases} \qquad \boxed{y = 2x}$

SEPT 05

$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & x<0 \\ ¿? & x=0 \\ -2a(x-2) & x>0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (0+2)^2 - 4 = 0 \\ f(0) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a+4a = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a+4a = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0 \ \forall a \in \mathbb{R}$

b) $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2(0+2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2a(0-2) = 4a \end{matrix}\right| \Rightarrow$

- Si $a=1$, $f(x)$ es derivable en $x=0$, $f'(0) = 4$
- Si $a \neq 1$, $f(x)$ no es derivable en $x=0$. La función tiene un punto anguloso en $x=0$.

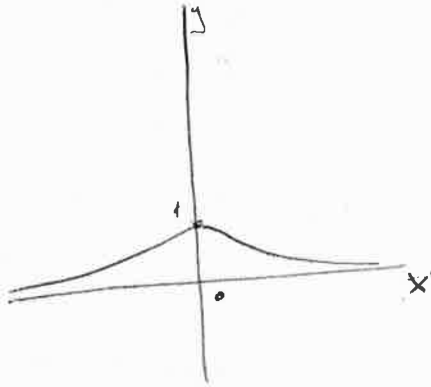
JUN99

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dominio $= \mathbb{R}$

$x=0 \Rightarrow y=1$ $\quad (0,1)$ Punto corte eje Y

$y=0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow 1=0$ $\quad$ No corta al eje X



$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ Punto Estacionario.

$\nearrow \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad \searrow$

signo $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

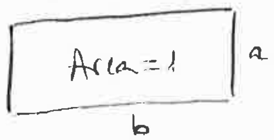
$f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=0$: $(0,1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad$ Asíntota Horizontal $y=0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

SEPT99



$a \cdot b = 1 \longrightarrow b = 1/a$

$S = 2a+b$ mínimo

$S = 2a + \frac{1}{a}$ $\quad$ Dominio $=$ $\cancel{(-\infty, 0)} \cup (0, +\infty)$

$S' = 2 - \frac{1}{a^2}$

$S'=0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a = \sqrt{1/2}$, $\cancel{-\sqrt{1/2}}$

$0 \quad \nearrow \oplus \quad \sqrt{1/2} \quad \ominus \searrow$

signo

Suma Máxima para $\boxed{a=\sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}}$ $\quad$ $\boxed{\text{Rectángulo } \sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \sqrt{2}}$

$$S_{MAX} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

JUN 00

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

i)

$g(x) = f(e^x)$

$g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x$

$\left.\begin{array}{l} f' > 0 \\ e^x > 0 \end{array}\right| \Rightarrow g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{g(x) \text{ es creciente } \forall x \in \mathbb{R}}$

ii)

$h(x) = e^{-f(x)}$

$h'(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x)$

$h'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 0$ → $e^{-f(x)} = 0$ sin solución
→ $f'(x) = 0$ sin solución

Luego $h(x)$ no tiene extremos relativos

SEPT 00

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Dominio $= [-1, 1]$

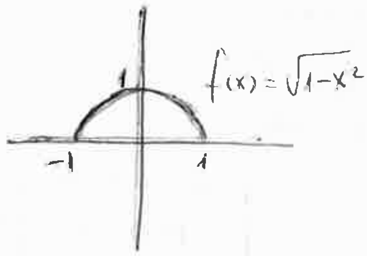
$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

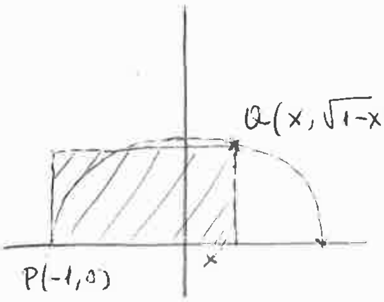
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$-1 \quad (+) \quad 0 \quad (-) \quad 1$

Signo $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow$





Area $= (x+1)\sqrt{1-x^2}$ Dominio $= [-1, 1]$

$A' = \sqrt{1-x^2} + (x+1)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2+x}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$A' = 0 \Rightarrow 1-x-x^2 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$ → $\cancel{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \notin [-1, 1]$
→ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$-1 \quad (+) \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (-) \quad 1$

$\boxed{\text{Area máxima para } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Signo $A' = \frac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$x+1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$1-x^2 = 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\text{Area}_{max} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}$

JUN01

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x+a & x<3 \end{cases}$$

a) f continua $\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 6+a = 9-6 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x-3 & x<3 \end{cases}$$

b) $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(3+h)^2-2(3+h)-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{6}-2h-\cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h+4) = \boxed{4}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{2(3+h)-3-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{6}+2h-\cancel{3}-\cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = \boxed{2}$$

Luego $f(x)$ no es derivable en $x=3$

SEPT01

$f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$ Dominio $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}} = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Luego: $\nexists\, f'(0)$

(Aplicando la definición sería:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$)

$f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=1$ $(0,1)$ Punto corte con eje Y

$y=0 \Rightarrow 0=1-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ $(1,0)$, $(-1,0)$ Puntos corte con eje X

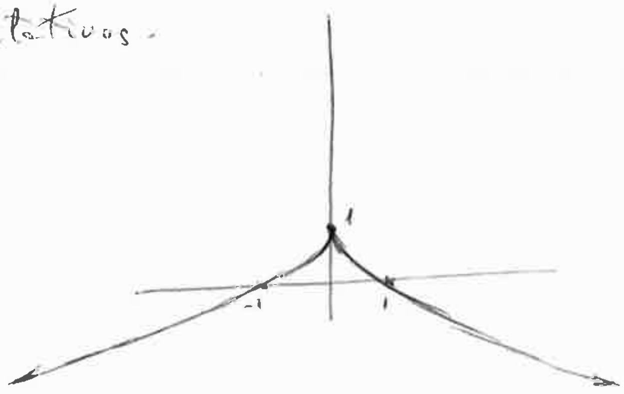
$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow -2=0$ $\boxed{\text{No hay extremos relativos}}$

$+$ 0 $-$

signo $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ creciente en } (-\infty,0) \\ f(x) \text{ decreciente en } (0,+\infty)\end{array}}$

En $x=0$ tendremos un máximo absoluto, pero al tratarse de un punto anguloso (no derivable), no apareció entre los extremos relativos.



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

JUN 02

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x+5 & x \geq 1 \\ 5x+b & x<1 \end{cases}$$

Dominio $= \mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ por tratarse de expresiones polinómicas. En $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5+b$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = a+3+5 = a+8$$

Si $5+b = a+8$ $f(x)$ sería continua en $x=1$

Si $5+b \neq a+8$ $f(x)$ no sería continua (ni derivable) en $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+3 & x>1 \\ 5 & x<1 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ por tratarse de expresiones polinómicas. En $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2a+3$$

Si $5 \neq 2a+3$ $f(x)$ no sería derivable.

$2a+3 \neq 5 \implies \boxed{a \neq 1}$

$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ 5+b=a+8 \end{array}\right\} \implies \boxed{b=4}$

Si $\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \end{array}\right\} \implies f(x)$ continua y derivable en $x=1$

Si $\left.\begin{array}{l} a \neq 1 \\ b=a+3 \end{array}\right\} \implies f(x)$ continua pero no derivable en $x=1$

Si $b \neq a+3 \Rightarrow f(x)$ no continua (por lo tanto no derivable) en $x=1$

SEPT 02 $\qquad f(x) = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{\pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2} + \frac{24x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2}{(x-3)^2} + \frac{24x}{(x+3)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{24x - 2(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{24x - 2x^2 - 12x - 18}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2x^2+12x-18}{(x+3)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-2(x^2-6x+9)}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2(x-3)^2}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2}{(x+3)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow -2 = 0$ $\boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$

$\ominus \quad -3 \quad \ominus \quad 3 \quad \ominus$

Signo $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^2}$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \left(\frac{2}{0^-} - \frac{12}{0^-} = -\infty + \infty\right) = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} =$$

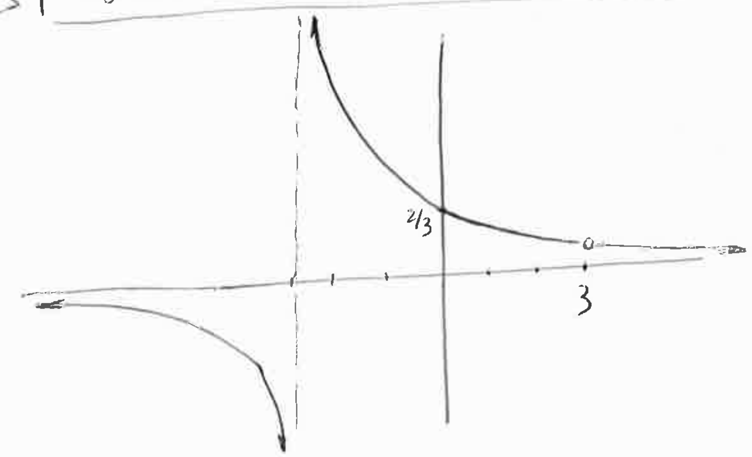
$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{2(x+3)-12}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-}\frac{2\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^+} - \frac{12}{0^+} = +\infty - \infty\right) = \dots = \lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$\nexists\ f(3)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=3}$



$x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$ $\quad (0, \frac{2}{3})$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x+3} = 0^+$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x+3} = 0^-$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}\dfrac{2}{x+3} = -\infty$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+}\dfrac{2}{x+3} = +\infty$

JUN 03

$$y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$$

$$\frac{2}{x}-1=0 \Rightarrow \frac{2}{x}=1 \Rightarrow x=2$$

$\ominus$ 0 $\oplus$ 2 $\ominus$

signo $\frac{2}{x}-1$

Dominio $= (0,2]$

$$y' = \cancel{2}\frac{-\frac{2}{x^2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$$y'=0 \Rightarrow -2=0 \quad \boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$$

0 $\ominus$ 2

signo $y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$

$\boxed{f(x) \text{ decreciente en } (0,2]}$

$$y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$$y'' = -2\frac{\left[2x\sqrt{\frac{2}{x}-1} + x^2\frac{-\cancel{\frac{2}{x^2}}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\right]}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -2\frac{-2x\sqrt{\frac{2}{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}}{2x^3-x^4} =$$

$$= -2\frac{-2x\left(\frac{2}{x}-1\right)+1}{(2x^3-x^4)\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = -2\frac{-4+2x+1}{(2x^3-x^4)\sqrt{\frac{2}{x}-1}} =$$

$$= \frac{-2(2x-3)}{x^3(2-x)\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

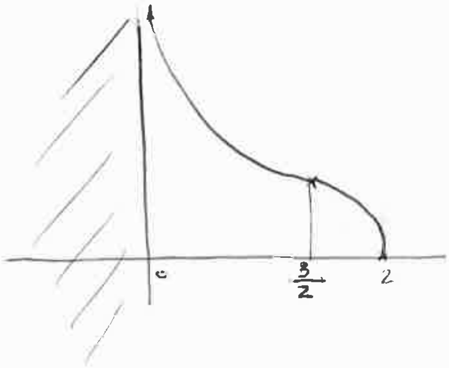
$$y''=0 \Rightarrow -2(2x-3)=0 \Rightarrow x=3/2$$

0 convexa $\oplus$ 3/2 cóncava $\ominus$ 2

signo $y'' = \frac{-2(2x-3)}{x^3(2-x)\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$

$f(x)$ tiene un $\boxed{\text{punto de inflexión en } x=\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 2\sqrt{+\infty-1} = +\infty$$



SEPT 03 | $y^2=4x \longrightarrow P(x,\pm\sqrt{4x})$, $Q(4,0)$ $\Big\}$ $\vec{PQ} = (4-x, \mp\sqrt{4x})$ $\quad (x\in[0,+\infty))$

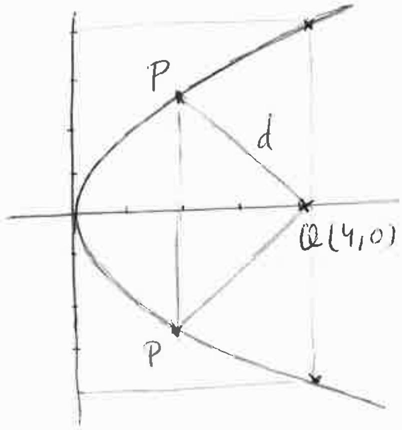
$$d=|\vec{PQ}| = \sqrt{(4-x)^2+(\mp\sqrt{4x})^2} = \sqrt{16-8x+x^2+4x} = \sqrt{16+x^2-4x} =$$
$$= \sqrt{x^2-4x+16}$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} \qquad d'=0 \Longrightarrow x=2$$

0 $\ominus$ 2 $\oplus$

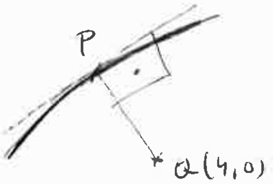
signo $d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}$

Mínima distancia para $x=2 \Longrightarrow P=(2,\pm\sqrt{8})$



otra forma:

$$y^2=4x \to 2yy'=4 \to y'=\frac{2}{y}$$



$P(x,\sqrt{4x})$

Pendiente Tangente $= \frac{2}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow$ Pendiente Normal $= -\sqrt{x}$ $\Longrightarrow$

$\vec{PQ} = (4-x, -\sqrt{4x}) \Longrightarrow$ pendiente $= \frac{-\sqrt{4x}}{4-x}$

$$\Longrightarrow -\sqrt{x} = \frac{-\sqrt{4x}}{4-x} \Longrightarrow \cancel{-\sqrt{x}} = \frac{-2\cancel{\sqrt{x}}}{4-x} \Longrightarrow 4-x=2 \Longrightarrow \boxed{x=2}$$

JUN 04

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{\sin x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(x+1)}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = \boxed{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{(x-1)^2-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{2}(x+1)}{2(x-1)} = \dfrac{1}{-1} = \boxed{-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-2}{\sin^2 x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(x+1)+2(x-1)}{2\sin x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin x \cos x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{2}{1-0} = \boxed{2}$

JUN 04

$f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1 - \dfrac{1}{-0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 - \dfrac{1}{+0} = -\infty$

Discontinuidad salto infinito en $x=-1$
Asíntota vertical $x=-1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1+0 = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1-0 = 1$

Asíntota Horizontal $y=1$

$x=0 \Rightarrow y = 1-1 = 0 \quad (0,0)$

$y=0 \Rightarrow 0 = 1 - \dfrac{1}{x+1} \; ; \; \dfrac{1}{x+1} = 1 \; , \; 1 = x+1 \; , \; x=0 \quad (0,0)$

$f'(x) = -\dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \; , \; 1=0$ No hay máximos / mínimos relativos.

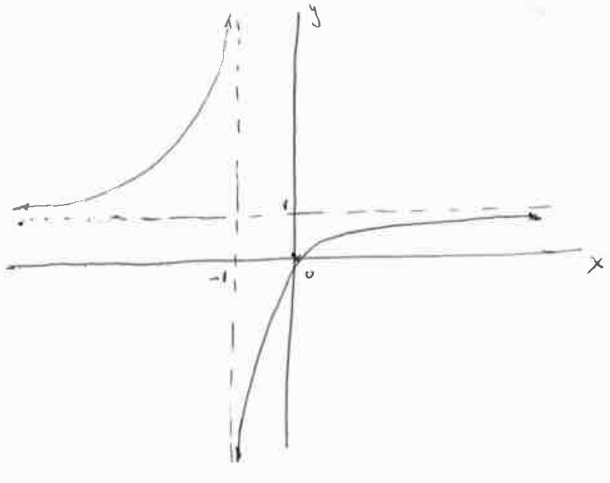
x	$-\infty$ ... -1	-1 ... $+\infty$
$f(x)$	↗	↗
$f'(x)$	+	+

$f(x)$ creciente en $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$

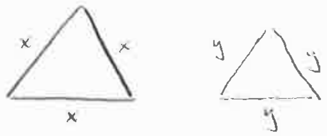
$f''(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$

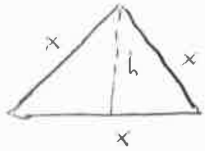
$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x+1)^3} = 0 \; , \; -2 = 0$ No hay punto de inflexión

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... $+\infty$
$f(x)$	Cóncava	Convexa
$f''(x)$	−	+



SEPT 04





$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$3x+3y=60 \longrightarrow y=20-x$$

$$\text{Suma Areas}=\frac{x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{y\cdot\frac{y\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+y^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+(20-x)^2\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+400-40x+x^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2-40x+400)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-20x+200)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-20x+200)$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-20)$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow x=10$$

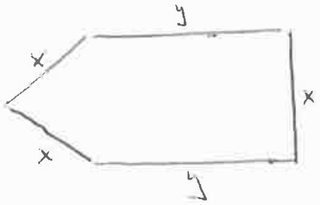
x	0		10		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

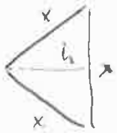
Mínimo para $x=10$

La suma de áreas será mínima para $\boxed{x=10\text{ m}}$, $\boxed{y=10\text{ cm}}$

El valor mínimo de la suma de áreas es: $\frac{\sqrt{3}}{2}(100-200+200)=\boxed{50\sqrt{3}\text{ cm}^2}$

SEPT 05





$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$3x+2y=60 \longrightarrow y=\frac{60-3x}{2}$$

$$\text{Area}=\frac{x\cdot x\sqrt{3}/2}{2}+xy=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+xy=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{x(60-3x)}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}+120x-6x^2}{4}=\frac{(\sqrt{3}-6)x^2+120x}{4}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{3}-6)x^2+120x}{4}$$

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{3}-6)\cdot 2x+120}{4}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow 2(\sqrt{3}-6)x+120=0,\quad x=\frac{-120}{2(\sqrt{3}-6)}=\frac{60}{6-\sqrt{3}} \longrightarrow y=\frac{60-3\cdot\frac{60}{6-\sqrt{3}}}{2}=$$

$$=\frac{360-60\sqrt{3}-180}{2(6-\sqrt{3})}=\frac{180-60\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})}=\frac{90-30\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$

x	0		$\frac{60}{6-\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

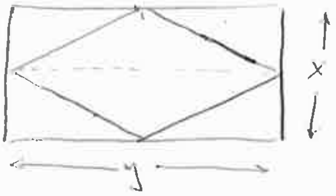
Area Máxima para $\boxed{x=\frac{60}{6-\sqrt{3}}\text{ m}}$ $\boxed{y=\frac{90-30\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}\text{ m}}$

El valor máximo del área es:

$$\frac{(\sqrt{3}-6)\cdot\frac{60^2}{(6-\sqrt{3})^2}+120\cdot\frac{60}{6-\sqrt{3}}}{4}=\frac{-\frac{3600}{6-\sqrt{3}}+\frac{7200}{6-\sqrt{3}}}{4}=$$

$$=\frac{3600}{4(6-\sqrt{3})}=\boxed{\frac{900}{6-\sqrt{3}}\text{ m}^2}$$

JUN 05



$2x + 2y = 100 \longrightarrow y = 50 - x$

$\text{Área} = 2 \cdot \dfrac{y \cdot x/2}{2} = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x(50-x)}{2} = \dfrac{50x - x^2}{2}$

$f(x) = \dfrac{50x - x^2}{2}$

$f'(x) = \dfrac{50 - 2x}{2}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow x = 25$

x	0	25	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Área máxima para $\boxed{x = 25\,m} \longrightarrow \boxed{y = 25\,m}$

El valor máximo del área es: $\dfrac{50 \cdot 25 - 25^2}{2} = \dfrac{1250 - 625}{2} = \boxed{\dfrac{625}{2}\,m^2}$

JUN 05 $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-2}{+0} = -\infty$ | Discontinuidad asintótica en $x = -2$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-2}{-0} = +\infty$ | Asíntota vertical $x = -2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{2}{-0} = -\infty$ | Discontinuidad asintótica en $x = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{2}{+0} = +\infty$ | Asíntota vertical $x = 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ | Asíntota Horizontal $y = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$x = 0 \longrightarrow y = 0 \quad (0,0)$

$y = 0 \longrightarrow 0 = \dfrac{x}{x^2-4}, \quad 0 = x. \quad (0,0)$

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2-4} = -f(x) \Longrightarrow$ Función simétrica respecto del origen (Impar)

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2 - 4}{(x^2-4)^2}$

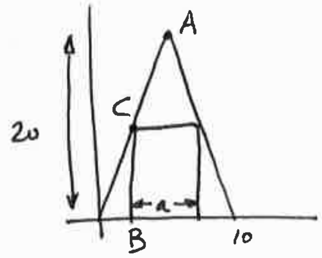
$f'(x) = 0 \longrightarrow \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0, \quad -x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = -4$ No tiene máximos/mínimos relativos.

JUN 06

a) $\left.\begin{array}{l} A(5,20) \\ O(0,0) \end{array}\right| \ \vec{OA} = (5,20) \rightarrow m = 4$

$y - 0 = 4(x-0)$

$\boxed{y = 4x}$



b)

$\boxed{B\left(\frac{10-a}{2}, 0\right)}$

$x = \frac{10-a}{2} \rightarrow y = 4\,\frac{10-a}{2} = 20-2a$ $\qquad \boxed{C\left(\frac{10-a}{2}, 20-2a\right)}$

c) Area Rectangulo $= a\cdot(20-2a) = 20a - 2a^2 \qquad a \in [0,10]$

$A' = 20 - 4a$

$A' = 0 \rightarrow a = 5$ cm

		5	
A	$\nearrow$		$\searrow$
A'	+		−

$\boxed{\text{Area Maxima para } a = 5 \text{ cm}}$

JUN 06

$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8 & x \leq -2 \\ 2x+4 & -2 < x \leq 0 \\ a\cos x & x > 0 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}$$

a) x^2+6x-8 es cont. y derivable en $(-\infty,-2)$
$2x+4$ " " " " " $(-2,0)$
$a\cos x$ " " " " " $(0,+\infty)$

• En $x=-2$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 4-12+8 = 0 \\ f(-2) = 4-12+8 = 0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -4+4 = 0 \end{array}\right| \rightarrow$ f(x) continua en $x=-2$

• En $x=0$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4 \\ f(0) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a \end{array}\right| \rightarrow$ Si $a=4$ f(x) seria continua en $x=0$
Si $a\neq 4$ f(x) tendria una discontinuidad de salto finito en $x=0$

$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \text{Si } a=4 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} \\ \bullet\ \text{Si } a\neq 4 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R}-\{0\}\text{, salto finito en } x=0 \end{array}}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & x < -2 \\ 2 & -2 < x < 0 \\ -a\sin x & x > 0 \end{cases}$$

• En $x=-2$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = -4+6 = 2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = 2 \end{array}\right| \rightarrow$ f(x) es derivable en $x=-2$

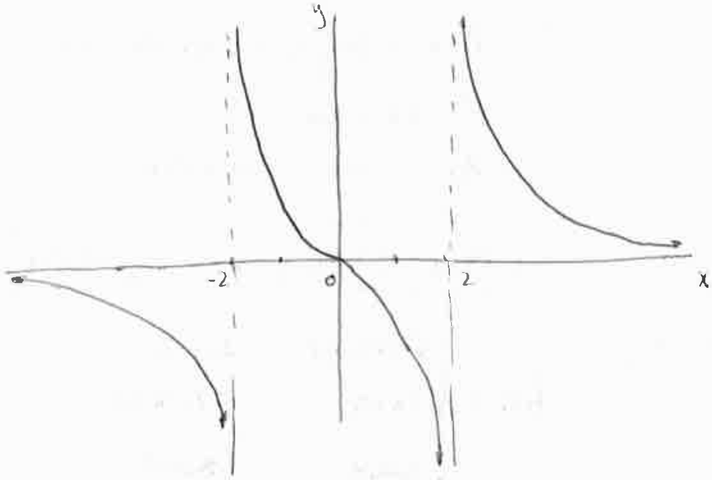
x	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	↘	↘	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	

$f(x)$ decreciente en todo su dominio

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^{\cancel{2}} - (-x^2-4)\cdot 2(\cancel{x^2-4})\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}=0, \quad 2x^3+24x=0, \quad 2x(x^2+12)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ \cancel{x^2=-12} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	$+2$	$+\infty$
$f(x)$	Cóncava	Conv.	PI	Cónc.	Convexa
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$



SEPT 06

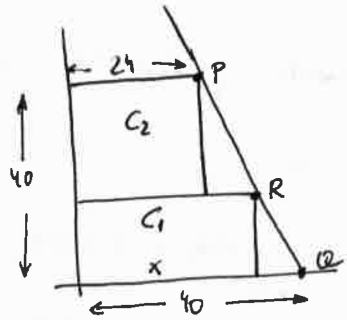
a) $P(24,40)$

$Q(40,0)$

$\vec{PQ} = (16,-40) \rightarrow m = -\frac{40}{16} = -\frac{5}{2}$

$y-0 = -\frac{5}{2}(x-40)$

$$\boxed{y = \frac{200-5x}{2}}$$



b) $R\left(x, \frac{200-5x}{2}\right)$

$$\text{Area } C_1 = x\cdot\frac{200-5x}{2} = \boxed{\frac{200x-5x^2}{2}} \quad x\in[24,40]$$

$$\text{Area } C_2 = 24\cdot\left(40-\frac{200-5x}{2}\right) = 24\,\frac{80-200+5x}{2} = 24\,\frac{5x-120}{2} = \boxed{60x-1440}$$

$x\in[24,40]$

c) $$B = 1'2\cdot\frac{200x-5x^2}{2} + 1\cdot(60x-1440) = 120x-3x^2+60x-1440 = -3x^2+180x-1440$$

$B' = -6x+180$

$B'=0 \rightarrow x=30\,m$

		30	
B	↗		↘
B'	$+$		$-$

$\boxed{\text{Máximo beneficio para } x=30\,m}$

• En $x=0$: Para que una función sea derivable en un punto, debe ser continua en dicho punto, por lo que si $a \neq 4$ sin ningún cálculo $f(x)$ no es derivable. Si $a=4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \end{array}\right| \rightarrow f(x) \text{ no derivable en } x=0.$$

• Si $a=4 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, en $x=0$ tiene un punto anguloso

• Si $a\neq 4 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, en $x=0$ no es continua

SEPT 06

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{2\sin x \cos x} = \frac{1-1+0}{2\cdot 0\cdot 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{1-1}{2-0} = \boxed{0}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+0)}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{x^2+2x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x+2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \boxed{e^2}$$

JUN 07

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cancel{2x}}{2\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}}\right) = \frac{2^{+\infty}-8}{2^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\cdot \cancel{\ln 2}}{2^{n+1}\cdot\cancel{\ln 2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

También: $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{2^n} - \frac{8}{2^n}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{8}{2^n}}{2} = \frac{1-\frac{8}{\infty}}{2} = \frac{1}{2}$$

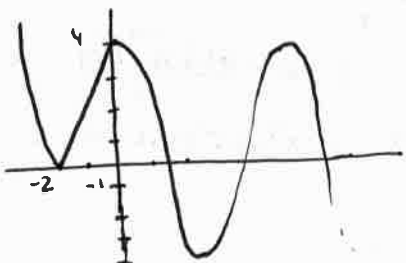
JUN 06 (continuación)

$y = x^2+6x+8$

$x_v = \frac{-6}{+2} = -3 \rightarrow y=-1$

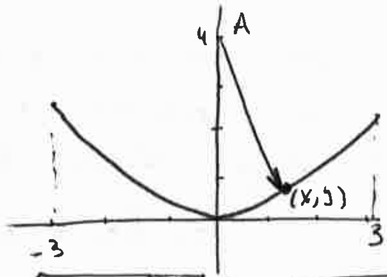
$x=0 \rightarrow y=8$

$y=0 \rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$



JUN 07

$y = \frac{x^2}{4} \qquad x \in [-3,3]$



a) $A(0,4)$, $P(x,y)$ | $\vec{AP} = (x, y-4)$

$d = |\vec{AP}| = \boxed{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{(x^2-16)^2}{16}} = \sqrt{\frac{16x^2 + x^4 - 32x^2 + 256}{16}} =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4}}$

b) $d' = \frac{1}{4} \frac{4x^3 - 32x}{2\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = \frac{x^3 - 8x}{2\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}$

$d' = 0 \Rightarrow x^3 - 8x = 0 \; ; \quad x(x^2-8) = 0 \to x = 0, \; x = \pm\sqrt{8}$

	-3	$-\sqrt{8}$	0	$\sqrt{8}$	3
d	↘		↗	↘	↗
d'	$-$		$+$	$-$	$+$

Máximo Relativo en $x = 0$
Mínimo " " $x = -\sqrt{8}$
" " " $x = \sqrt{8}$

Para obtener los máximos y mínimos absolutos en $x \in [-3,3]$ tenemos que comparar el valor de la distancia en los extremos relativos con los de los puntos inicial y final del intervalo:

$d(0) = \frac{\sqrt{256}}{4} = 4 \longrightarrow$ Máxima Distancia en $x = 0 \longrightarrow$ Punto $(0,0)$

$d(\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{192}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} = 3'464$

$d(-\sqrt{8}) = 2\sqrt{3} = 3'464 \longrightarrow$ Mínimas distancias en $x = \pm\sqrt{8} \longrightarrow$ Puntos $(\pm\sqrt{8}, 2)$

$d(3) = \frac{\sqrt{193}}{4} = 3'473$

$d(-3) = \frac{\sqrt{193}}{4} = 3'473$

c) Tal y como hemos calculado los mínimos, la distancia más corta es $3'464$, por lo que no puede ser menor que 2.

Si intentamos resolver la ecuación:

$\frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4} < 2 \; ; \quad \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} < 8 \; ; \quad 0 < x^4 - 16x^2 + 256 < 64$

$x^4 - 16x^2 + 256 > 0 \; ; \quad x^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 1024}}{2} \; \nexists \quad$ Solución $\mathbb{R}$

$x^4 - 16x^2 + 256 < 64 \; ; \quad x^4 - 16x^2 + 192 < 0 \; ; \quad x^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 768}}{2} \; \nexists \quad \boxed{\text{Ninguna solución}}$

SEPT 07 | $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

$P(0,0) \longrightarrow \boxed{0 = d}$

$Q(2,2) \longrightarrow 2 = 8a + 4b + c$

Inflexión en $x = 0 \longrightarrow 0 = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$

Mínimo en $x = 1 \longrightarrow 0 = 3a + 2b + c$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + c = 2 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 2/5 \\ c = -6/5 \end{array}}$$

SEPT 07 |

$y = x^4 e^{-x}$, $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 e^{-x} + x^4 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^3 (4 - x) e^{-x}$

$y' = 0 \Rightarrow x^3 (4-x) e^{-x} = 0 \longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}}$

$y'' = (12x^2 - 4x^3) e^{-x} + (4x^3 - x^4) e^{-x} \cdot (-1) =$

$= x^2 (12 - 4x - 4x + x^2) e^{-x} =$

$= x^2 (12 - 8x + x^2) e^{-x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x^2 (12 - 8x + x^2) e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 6 \end{cases}}$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \dfrac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

		0		4	
$y = x^4 e^{-x}$	↘		↗		↘
$y' = x^3(4-x)e^{-x}$	$-$		$+$		$-$

Mínimo Relativo en $x = 0$
Máximo Relativo en $x = 4$

$f(x)$ creciente en $(0,4)$
$f(x)$ decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

		0		2		6	
$y = x^4 e^{-x}$	◡		◡		◠		◡
$y'' = x^2(12-8x+x^2)e^{-x}$	$+$		$+$		$-$		$+$

Inflexión en $x = 2$
Inflexión en $x = 6$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 e^{-x} = (-\infty)^4 e^{+\infty} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

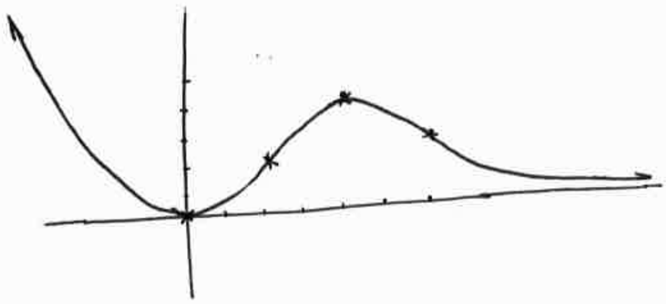
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} = (+\infty)^4 \cdot e^{-\infty} = +\infty \cdot 0 =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{24x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{24}{e^x} = \frac{24}{+\infty} = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Asíntota Horizontal $y = 0$ cuando $x \to +\infty$

	X	y
MIN	0	0
MAX	4	4'7
INF	2	2'2
INF	6	3'2
	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	0



SEPT 05 | $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$ dom $f = \mathbb{R}$ (ya que $\cos x \neq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$y' = \frac{\cos x (2 - \cos x) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$$

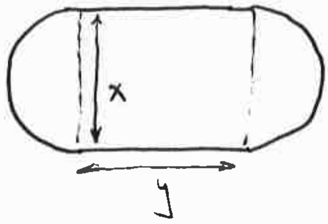
$y' = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \begin{cases} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$ (en el intervalo $[0, 2\pi]$)

	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		2π
y'		$+$		$-$		$+$	
y		↗		↘		↗	

Máximo $\left(\pi/6, \frac{1}{4-\sqrt{3}}\right)$
Mínimo $\left(5\pi/6, \frac{-1}{4-\sqrt{3}}\right)$

JUN 08

$$\text{Area} = x\cdot y + \pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{4}$$



$$200 = \text{perímetro} = 2\pi\frac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y \rightarrow y = \frac{200-\pi x}{2}$$

$$\text{Area} = x\,\frac{200-\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{4} = \frac{400x - 2\pi x^2 + \pi x^2}{4} = \frac{400x - \pi x^2}{4}$$

$$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = \frac{400 - 2\pi x}{4}$$

$$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 0 \Rightarrow 400 = 2\pi x \ ; \ x = \frac{200}{\pi}$$

		$200/\pi$	
$\frac{d\,\text{Area}}{dx}$	$+$		$-$
Area	$\nearrow$		$\searrow$

Máxima área para $\boxed{x = \frac{200}{\pi}\ m \Rightarrow y = 0\ m}$

JUN 08

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x<2 \\ x^2-3 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

a) $\text{dom} f = \left((-\infty,2) - \{1\}\right) \cup [2,+\infty) = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x)$ continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ al tratarse de funciones polinómicas y racionales.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota Horizontal } y=0 \text{ cuando } x\to-\infty$$

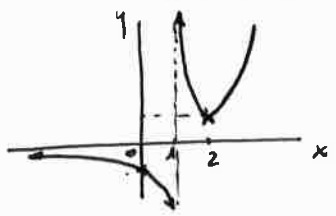
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota vertical } x=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2-3) = +\infty \rightarrow \text{No hay asíntota cuando } x\to+\infty$$

b) $x=0 \rightarrow y=-1$

$y=0 \rightarrow \frac{1}{x-1}=0$ ✗

$\quad\rightarrow x^2-3=0\ ;\ x^2=3\ ;\ x = \cancel{\pm\sqrt{3}}$ no pertenecen a $[2,+\infty)$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{1}{2-1} = 1 \\ f(2) = 2^2-3 = 1 \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = 2^2-3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ continua en } x=2$$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$

$x+4y=0 \rightarrow y = -\frac{x}{4}$ $\quad m = -1/4$

$f'(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{4} \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \; ; \; x-1 = \pm 2 \rightarrow \cancel{x=3}$ no pertenece a $(-\infty, 2)$; $\boxed{x=-1}$

$2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \cancel{-\frac{1}{8}}$ no pertenece a $[2, +\infty)$

Punto: $x=-1 \rightarrow y = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{P(-1, -\frac{1}{2})}$

JUN 08

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ Asíntota Horizontal $y=0$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \; ; \; x = \pm 1$

		-1		1	
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

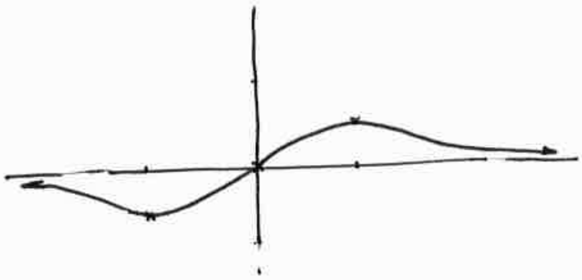
Mínimo Relativo en $x=-1$

Máximo Relativo en $x=1$

$x=0 \rightarrow y = \frac{0}{0^2+1} = 0$ $\quad (0,0)$

$y=0 \rightarrow 0 = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow x=0$ $\quad (0,0)$

x	y
0	0
1	1/2
-1	-1/2



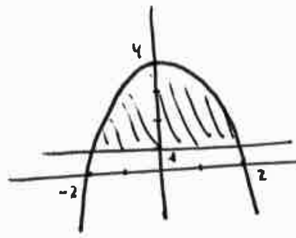
SEPT 08

a) $y=-x^2+4$

$X_v = -\frac{0}{-2}=0 \longrightarrow$ vértice $(0,4)$

$x=0 \longrightarrow y=4$

$y=0 \longrightarrow x=\pm 2$



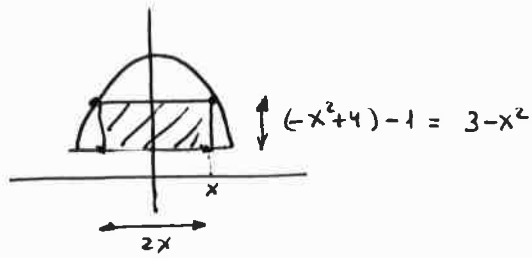
$y=1 \longrightarrow 1=-x^2+4 \;;\; x^2=3 \;;\; x=\pm\sqrt{3}$

$$\text{Area} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2+4)-1 \, dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} (-x^2+3)dx = 2\left(\frac{-x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3}\right) = 2(-\sqrt{3}+3\sqrt{3}) = \boxed{4\sqrt{3}}$$

b)

$\text{Area} = 2x\cdot(3-x^2) = 6x-2x^3$



$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 6-6x^2$

$\frac{d\,\text{Area}}{dx}=0 \Rightarrow 6x^2=6 \;;\; x^2=1 \;;\; x = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \end{cases}$

		1	
$\frac{d\,\text{Area}}{dx}=6-6x^2$	$+$		$-$
Area	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Máximo Area para $x=1$; dimensiones: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Base}=2\cdot 1=2\\ \text{Altura}=3-1^2=2\end{array}}$

SEPT 08

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \frac{1-1}{0^4} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot \cancel{4x^3}}{\cancel{4x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0^+}-\frac{1}{e^{+0}-1} = \frac{1}{0^+}-\frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+} =$$

$$= +\infty - \infty =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{e^0-1-0}{0(e^0-1)} = \frac{1-1}{0\cdot(1-1)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{1(e^x-1)+x\cdot e^x} = \frac{e^0-1}{e^0-1+0\cdot e^0} = \frac{1-1}{1-1+0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+x\,e^x} = \frac{1}{1+1+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{e^{0^-}-1} = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{1^- -1} = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^-} =$$

$$= -\infty - (-\infty) = -\infty+\infty = - - - - - = \boxed{\frac{1}{2}}$$

El restante cálculo es idéntico

SEPT 08

$f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad$ $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)+x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

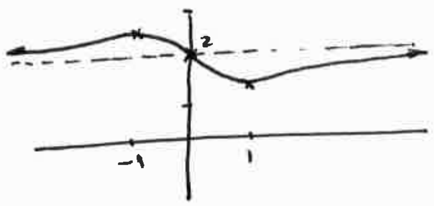
$f'(x)=0 \implies x = \pm 1$

		-1		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Máximo Relativo en $x=-1$ $\quad P(-1, 5/2)$
Mínimo Relativo en $x=1$ $\quad P(1, 3/2)$

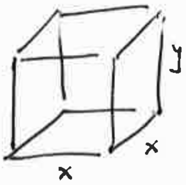
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{x}{x^2+1}\right) = 2-\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2x}\right) = 2-0 = 2$$

$\Downarrow$
Asíntota Horizontal $y=2$



JUN 09

$96 = \text{Área Total} = 2\cdot x^2+4\cdot x\cdot y$
$\text{Volumen} = x^2\cdot y$



$$y = \frac{96-2x^2}{4x} = \frac{48-x^2}{2x}$$

$$\text{Volumen} = x^2\cdot\frac{48-x^2}{2x} = \frac{48x-x^3}{2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{48-3x^2}{2} \; ; \; \frac{dV}{dx}=0 \implies 3x^2=48 \; ; \; x^2=16 \; ; \; x = \begin{cases} +4 \\ \cancel{-4} \end{cases}$$

		4	
$\frac{dV}{dx}$	$+$		$-$
V	$\nearrow$		$\searrow$

Volumen Máximo para $x=4 \to y = \frac{48-16}{8} = 4$

Dimensiones: $\boxed{\text{Base de 4m de lado, Altura de 4m}}$

Es un cubo.

JUN 09 $\quad f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-3} \qquad \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{3\}}$

b) $$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-3) - (x^2-5x+7)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-6x+8=0 \; ; \; x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ Posibles MAX/MIN

		2		3		4	
$f'(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,2) \cup (4,+\infty)$
" " decreciente en $(2,3) \cup (3,4)$
" tiene un máximo relativo en $x=2$
" " " mínimo relativo en $x=4$

c) $$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}} - (x^2-6x+8)\cdot 2\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x-16}{(x-3)^3} = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2=0$ ∄ $\boxed{\text{No hay puntos de inflexión}}$

		3	
$f''(x)$	−		+
$f(x)$	convexa		cóncava

$f(x)$ es convexa en $(-\infty,3)$
" " cóncava en $(3,+\infty)$

a) $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{9-15+7}{-0} = \frac{1}{-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$$
$\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=3}$

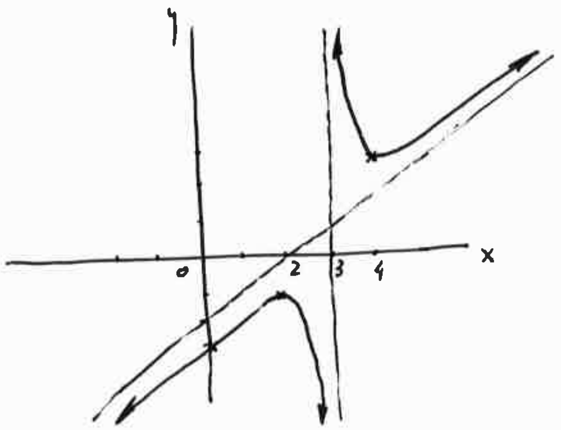
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$
$\boxed{\text{No tiene asíntotas Horizontales}}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+7}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-5x+7}{x-3} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+7-x^2+3x}{x-3} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7-2x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Oblicua } y = x-2}$

También: $x^2-5x+7 \;\big|\; x-3$
$-x^2+3x \qquad \boxed{x-2}$
$-2x+7$
$2x-6$
1



x	y
2	−1
4	3
0	−7/3

SEPT 09

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

$\dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3}$ es continua en todos los reales salvo en $x=3$, pero este valor de x no pertenece al intervalo del primer trozo

x^2-1 es continua en todos los reales.

En resumen, la única posible discontinuidad estaría en $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \frac{18-9a-6}{3-3} = \frac{12-9a}{0}$$

Si fuese ∞, no podría ser continua en $x=3$, salvo que sea $\frac{0}{0} \Rightarrow 12-9a=0$; $a=\frac{4}{3}$

- Si $a\neq \frac{4}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ discontinua en $x=3$

- Si $a=\frac{4}{3}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2-4x-6}{x-3} = \dfrac{18-12-6}{3-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{4x-4}{1} = 8 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x^2-1) = 8 \\ f(3) = 3^2-1 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua en } x=3}$ siendo $\boxed{a=\frac{4}{3}}$

SEPT 09 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}-\{0\}}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-1}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-1}{+0} = -\infty \end{array}\right\} \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \end{array}\right\} \boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=0}$$

b) $$f'(x) = \frac{1\cdot x^2-(x-1)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{x-2x+2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2-x=0$; $x=2$ Posible MAX/MIN

		0		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

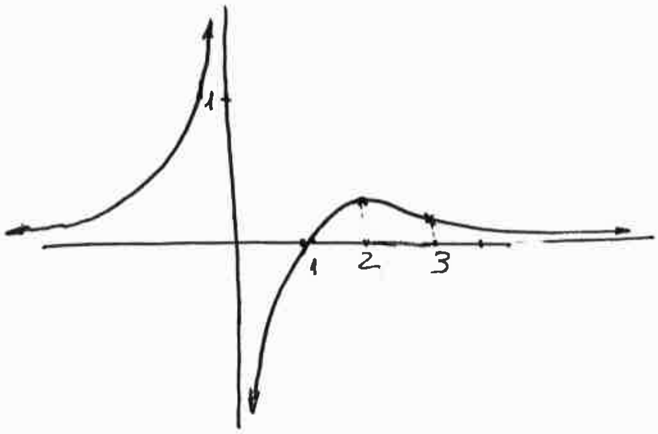
$f(x)$ creciente en $(0,2)$
" decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
" tiene un máximo relativo en $x=2$

c) $f''(x) = \dfrac{-1\cdot x^{\cancel{3}} - (2-x)\cdot 3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}\,4}} = \dfrac{-x-6+3x}{x^4} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0$; $x=3$ Posible punto Inflexión

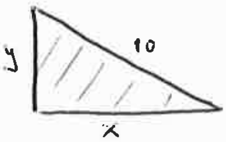
	0		3	
$f''(x)$	$-$		$-$	$+$
$f(x)$	convexa		convexa	cóncava

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
" " cóncava en $(3, +\infty)$
" Tiene un punto de inflexión en $x=3$



x	y
2	1/4
3	2/9
1	0

JUNIO 10 fase E



$x^2+y^2=10^2 \longrightarrow y=\sqrt{100-x^2}$

$\text{Area} = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$ $\quad x\in[0,10]$

$\text{Area}' = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{100-x^2} + x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{100-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$\text{Area}'=0 \Rightarrow x^2=50 \longrightarrow x=\cancel{\pm}\sqrt{50}$

	0		$\sqrt{50}$		10
Area'		$+$		$-$	
Area		↗	MAX	↘	

Area Máxima para $x=\sqrt{50} \Rightarrow y=\sqrt{100-(\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$

Junio 10 fase E

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \end{cases}$$

- $x\ln x$ está definida y es continua en $(0,+\infty)$
- ax^2+bx+c " " " " en $(-\infty, 0)$
- Veamos la continuidad en $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a\cdot 0^2+b\cdot 0+c = c$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot\ln 0 = 0\cdot(-\infty) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{1/0^+} = \dfrac{-\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

$f(0) = a\cdot 0^2+b\cdot 0+c = c$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + x\cdot\frac{1}{\cancel{x}} & \text{Si } x>0 \\ 2ax+b & \text{Si } x<0 \end{cases}$$

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \rightarrow 2a(-1)+b=0$; $\boxed{b=2a}$

$f(x)$ tiene en $x=-2$ una tangente paralela a $y=2x \Rightarrow f'(-2)=2 \rightarrow \boxed{-4a+b=2}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a+2a=2$; $\boxed{a=-1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$

Jun 10
fase G

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ 5\,\text{sen}\,x-2\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a]

- $ax+b$ está definida y es continua en $(-\infty,0)$
- $5\,\text{sen}\,x-2\cos x$ " " " " " $(0,+\infty)$
- Veamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a\cdot 0+b=b \\ f(0)= 5\cdot\text{sen}\,0-2\cdot\cos 0 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5\cdot\text{sen}\,0 - 2\cos 0 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=-2} \text{ para que } f(x) \text{ sea continua}$$

b]

$$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0 \\ 5\cos x+2\,\text{sen}\,x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)= 5\cdot\cos 0+2\cdot\text{sen}\,0 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=5}$$ para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$, y como es indispensable que sea continua en ese valor de x, tendré que ser $\boxed{b=-2}$

Jun 10
fase G

$$y=\frac{x^2}{1+x}$$

$1+x=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow \boxed{\text{dom}\, f = \mathbb{R}-\{-1\}}$

a] $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{(-1)^2}{1+(-1)} = \dfrac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=-1}$

Signos del límite infinito :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1)^2}{1+(-1)^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1)^2}{1+(-1)^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b] $$y'=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

$y'=0 \rightarrow \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}=0$; $x\cdot(2+x)=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	+	−	−	+	
y	↗	↘	↘	↗	
		MAX		MIN	

Máximo Relativo en $x=-2$
Mínimo Relativo en $x=0$

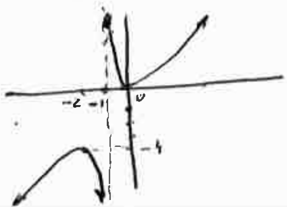
$$y''=\frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^{4\,3}} = \frac{(2+2x)(1+x)-(2x+x^2)\cdot 2}{(1+x)^3} =$$

$$= \frac{2+2x+2x+\cancel{2x^2}-4x-\cancel{2x^2}}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$y''=0 \rightarrow \dfrac{2}{(1+x)^3}=0$; $2=0$ ✗ No tiene inflexiones

c]

x	y
$-\infty$	$+\infty$
-2	-4
-1^-	$-\infty$
-1^+	$+\infty$
0	0
$+\infty$	$+\infty$



NOTA: $x^2 \;\big|\; x+1$; $-x^2-x$; $-x$; $x+1$; 1 ; cociente $x-1$

Tiene la asíntota Oblicua : $\boxed{y=x-1}$

Sept 10
fase E

$y = 5xe^{x-1}$ $\boxed{\text{dom} = \mathbb{R}}$

a) $y' = 5e^{x-1} + 5xe^{x-1} \cdot 1 = 5\cdot(1+x)e^{x-1}$

$y' = 0 \rightarrow 5(1+x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow$ $1+x=0$; $x=-1$
$e^{x-1} = 0$ ✗

	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y	↘	MIN	↗

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Es decreciente en } (-\infty,-1) \\ \text{Es creciente en } (-1,+\infty) \\ \text{Tiene un Mínimo Relativo en } x=-1\end{array}}$

b) $y'' = 5\cdot 1\cdot e^{x-1} + 5(1+x)e^{x-1}\cdot 1 = 5(2+x)e^{x-1}$

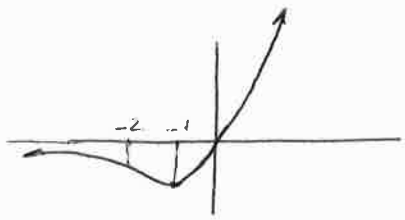
$y'' = 0 \rightarrow 5(2+x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow$ $2+x=0$; $x=-2$
$e^{x-1}=0$ ✗

	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''	$-$		$+$
y	Convexa	P.I.	Cóncava

$\boxed{\text{Tiene una inflexión en } x=-2}$

c)

x	y
$-\infty$	0
-2	$-10e^{-3}$
-1	$-5e^{-2}$
0	0
$+\infty$	$+\infty$



$\lim_{x\to+\infty} 5xe^{x-1} = 5\cdot(+\infty)\,e^{+\infty} = 5\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5xe^{x-1} = 5\cdot(-\infty)\,e^{-\infty} = -\infty\cdot 0 = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{e^{1-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty} =$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{e^{1-x}\cdot(-1)} = \frac{5}{e^{+\infty}\cdot(-1)} = \frac{5}{-\infty} = 0$

Sept 10
fase E

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = \left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty} = 1^{+\infty}$

$m = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x \Rightarrow \ln m = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) =$

$= +\infty\cdot\ln 1 = +\infty\cdot 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)}{1/x} = \frac{\ln 1}{1/+\infty} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+3)-\ln(2x-1)}{1/x} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x+3}\cdot 2 - \frac{1}{2x-1}\cdot 2}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2(2x-1)-2(2x+3)}{(2x+3)(2x-1)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{4x}-4-\cancel{4x}-6}{(2x+3)(2x-1)}}{\frac{-1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-10x^2}{-(2x+3)(2x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2}{4x^2-4x-3} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\ln m = 5/2 \Rightarrow m = e^{5/2} = \boxed{\sqrt{e^5}}$

Sept 10
fase General

$$f(x)=\begin{cases} 4 & si\ x\le 0 \\ 4-x^2 & si\ x>0 \end{cases}$$

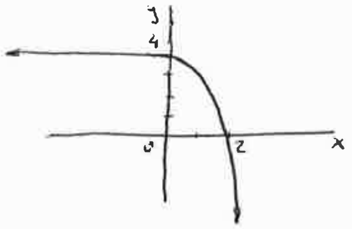
a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4 \\ f(0)=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4-0^2=4\end{array}\right| \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$

b) $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0^-}0=0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(4-h^2)-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}(-h)=-0=0$$

En consecuencia, existe $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, por lo que $f(x)$ es derivable en $x=0$ $\longrightarrow$ $\boxed{f'(0)=0}$

c)



Sep 10
fase G

$$\lim_{x\to \pi/2}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=(1+2\cdot 0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

$$m=\lim_{x\to\pi/2}(1+2\cos x)^{1/\cos x}$$

$$\ln m=\lim_{x\to\pi/2}\ln(1+2\cos x)^{1/\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos x}\ln(1+2\cos x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}=$$

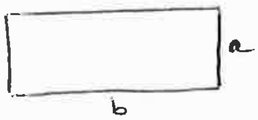
$$=\frac{\ln(1+2\cdot 0)}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{1+2\cos x}\cdot 2(-\cancel{\operatorname{sen} x})}{-\cancel{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{1+2\cos x}=$$

$$=\frac{2}{1+2\cdot 0}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

Jun 11
fase E

$P=2a+2b=12$

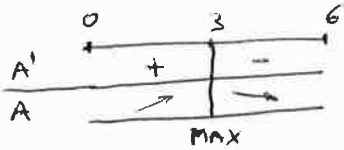
$a+b=6 \to b=6-a$



Maximizar: $A=ab=a\cdot(6-a)=6a-a^2 \qquad a\in[0,6]$

$$\frac{dA}{da}=6-2a$$

$$\frac{dA}{da}=0 \Rightarrow 6-2a=0 \ ; \ a=3$$



Máxima Área para $a=3$ m $\Rightarrow$ $b=3$ m

Área máxima $=3\cdot 3=\boxed{9\,m^2}$. En realidad se trata de un cuadrado de 3m de lado.

Jun 11 fase E

$$f(x)=\begin{cases} 7+ax & \text{si } x<1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

- $7+ax$ es continua y derivable en $(-\infty,1)$ por ser una expresión lineal.
- $a\sqrt{x}+\frac{b}{x}$ " " " " en $(1,+\infty)$ por estar definida la raíz cuadrada en $(1,+\infty)$ [no lo estaría en $(-\infty,0)$] y $\frac{b}{x}$ [no lo estaría en $x=0$].
- Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, primero debe ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 7+a \\ f(1) = a\sqrt{1}+\frac{b}{1} = a+b \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sqrt{1}+\frac{b}{1} = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 7+\cancel{a}+b=\cancel{a} \Rightarrow \boxed{b=7}$$

- Para que sea derivable, deben coincidir a izquierda y derecha de $x=1$

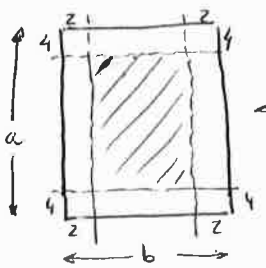
$$f(x)=\begin{cases} 7+ax & \text{si } x<1 \\ a\sqrt{x}+\frac{7}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<1 \\ ¿? & \text{si } x=1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}}-\frac{7}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=a \\ f'(1^+)=\frac{a}{2\sqrt{1}}-\frac{7}{1^2}=\frac{a}{2}-7 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{a}{2}-7 \Rightarrow \boxed{a=-14}$$

Jun 11 fase G

Area $=600 \Rightarrow a\cdot b=600 \rightarrow b=\frac{600}{a}$

Maximizar: Area Impresa $=(a-8)(b-4)=(a-8)\cdot\left(\frac{600}{a}-4\right)$



Casos extremos

$\boxed{a=8,\ b=75}$

$\boxed{b=4,\ a=150}$

$$\frac{dA_I}{da}=1\cdot\left(\frac{600}{a}-4\right)+(a-8)\cdot\frac{-600}{a^2}=$$

$$=\cancel{\frac{600}{a}}-4-\cancel{\frac{600}{a}}+\frac{4800}{a^2}=\frac{4800-4a^2}{a^2} \qquad a\in[8,150]$$

$$\frac{dA_I}{da}=0 \Rightarrow \frac{4800-4a^2}{a^2}=0 \Rightarrow a=\cancel{\pm}\sqrt{1200}=20\sqrt{3}$$

	8	$20\sqrt{3}$	150
A_I'	+	−	
A_I	↗	↘	
		MAX	

El Area Impresa es máxima para $\boxed{a=20\sqrt{3}\text{ cm}} \Rightarrow b=\frac{600}{20\sqrt{3}}=\frac{30}{\sqrt{3}}=\frac{30\sqrt{3}}{3}=\boxed{10\sqrt{3}\text{ cm}}$

Area Impresa máxima $=(20\sqrt{3}-8)(10\sqrt{3}-4)=600-80\sqrt{3}-80\sqrt{3}+32=\boxed{632-160\sqrt{3}\text{ cm}^2}$

Jun 11
fase G

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{9} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{18\sqrt{9+x}} + \frac{1}{18\sqrt{9-x}}\right) = \frac{1}{54}+\frac{1}{54} = \boxed{\frac{1}{27}}$$

b) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg x} = \left(\frac{1}{0^+}\right)^{tg\, 0^+} = (0^+)^{+\infty}$$

$$m = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg x} \longrightarrow \ln m = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg x} = \lim_{x\to 0^+} tg x\cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1/x^2)}{1/tg x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{0}{\ln 1} - \ln x^2}{1/tg x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2\ln x}{1/tg x} = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{L'hôpital}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-2/x}{-\sec^2 x/tg^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\, tg^2 x}{x \sec^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\,\frac{sen^2 x}{cos^2 x}}{\frac{x}{cos^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\, sen^2 x}{x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{4\, sen x \cos x}{1} = \frac{4\cdot 0\cdot 1}{1} = 0$$

$$\ln m = 0 \Rightarrow m = e^0 = 1 \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg x} = 1}$$

Jul 11
fase E

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \quad ; \quad dom f = \mathbb{R}$$

a) b) $$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad ; \quad x = 1,\ 2$$

	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		MAX		MIN	

$\boxed{\text{Máximo Relativo en } x=1} \rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$ $\quad \boxed{(1, 5/6)}$

$\boxed{\text{Mínimo Relativo en } x=2} \rightarrow y = \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{2}{3}$ $\quad \boxed{(2, 2/3)}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
" " decreciente en $(1, 2)$

$$f''(x) = 2x - 3$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 3/2$$

	$-\infty$	3/2	$+\infty$
$f''(x)$	−		+
$f(x)$	Convexa	Inf.	Cóncava

$\boxed{\text{Punto de Inflexión en } x = \frac{3}{2}} \rightarrow y = \frac{27}{24} - \frac{27}{8} + \frac{6}{2} = \frac{3}{4}$ $\quad \boxed{(3/2, 3/4)}$

Jul 11 fase E

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x} = \dfrac{1-\cos 0}{\ln^2 1} = \dfrac{1-1}{0^2} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{+\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{2/x} = \dfrac{\operatorname{sen} 0 + 1\cdot\cos 0}{2/1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = (0+e^0)^{1/0} = 1^\infty$

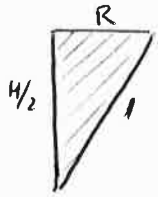
$m = \lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} \longrightarrow$

$\longrightarrow \ln m = \lim\limits_{x\to 0} \ln (x^4+e^x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln(x^4+e^x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^4+e^x)}{x} =$

$= \dfrac{\ln(0+1)}{0} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^4+e^x}\cdot(4x^3+e^x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3+e^x}{x^4+e^x} =$

$= \dfrac{0+e^0}{0+e^0} = 1 \Rightarrow m = e^1 = e \; ; \; \boxed{\lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = e}$

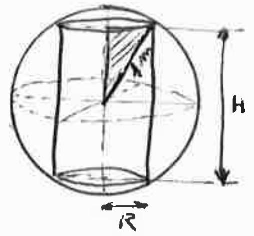
Jul 11 fase E



$\longrightarrow 1 = R^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2$

$4 = 4R^2 + H^2$

$R^2 = \dfrac{4-H^2}{4}$



Maximizar:

$V = \pi R^2 H = \pi \cdot \dfrac{4-H^2}{4}\cdot H = \dfrac{4\pi H - \pi H^3}{4} \; ; \; H \in \,]0,2]$

$\dfrac{dV}{dH} = \dfrac{4\pi - 3\pi H^2}{4}$

$\dfrac{dV}{dH} = 0 \Rightarrow \dfrac{4\pi - 3\pi H^2}{4} = 0 \; ; \; H^2 = \dfrac{4\pi}{3\pi} \; ; \; H = \pm\sqrt{4/3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

	0 — $2\sqrt{3}/3$	$2\sqrt{3}/3$ — 2
V'	+	−
V	↗	↘

MAX

Volumen Máximo para $\boxed{H = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\, m} \longrightarrow R = \dfrac{1}{4}\sqrt{4-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{6}\, m}$

Volumen Máximo $= \dfrac{1}{4}\left(4\pi\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \boxed{\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}\, m^3}$

Jul 11 fase G

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - m\operatorname{sen} x}{x^2} = \dfrac{0-m\cdot 0}{0} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 - m\cos x}{2x} = \dfrac{3-m\cdot 1}{0} = \dfrac{3-m}{0} =$

(Si $m \neq 3$ el límite sería ∞, por lo que $\boxed{m=3}$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-3\cos x}{2x} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0} =$ L'hôpital

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+3\operatorname{sen} x}{2} = \boxed{0}$

Jul 11
fase G

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) • $x^3 - x$ es continua y derivable en $(-\infty, 1)$ por ser polinómica.
• $ax+b$ " " " " " $(1, +\infty)$ " " "

Veamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^3 - 1 = 0 \\ f(1) = 1^3 - 1 = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = a\cdot 1 + b = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=0\ ;\ b=-a \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 1 \\ ax-a & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x<1 \\ ¿? & \text{si } x=1 \\ a & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=1$ deben de coincidir los valores de $f'(x)$ a izquierda y derecha:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=-2} \quad \text{y} \quad f'(1)=2$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 1 \\ 2x-2 & \text{si } x>1 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x=1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

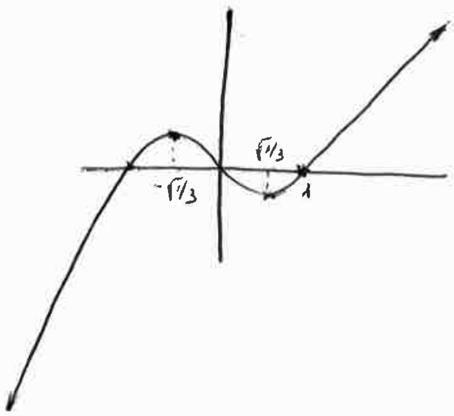
$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-1=0 \ (\text{para } x<1) \rightarrow x = \pm\sqrt{1/3} \\ 2=0 \ \times \\ 2=0 \ \times \end{cases}$$

$x = \sqrt{1/3}$, $-\sqrt{1/3}$ Ambos son menores que 1

	$-\infty$	$-\sqrt{1/3}$	$\sqrt{1/3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	↗	
		MAX	MIN		

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \longrightarrow y = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(x)$ " " mínimo " " $x = +\sqrt{\frac{1}{3}} \longrightarrow y = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$



x	y
$-\infty$	$-\infty$
-1	0
$-\sqrt{1/3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$
0	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$
1	0
$+\infty$	$+\infty$

JUN 12 fase E

$$y=\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

En x, la pendiente de la recta tangente es $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\text{Pendiente}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$P'=\frac{d\,\text{Pendiente}}{dx}=\frac{-2(1+x^2)^{\cancel{2}}+2x\cdot 2\cdot\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$P'=0 \Rightarrow \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}=0 \;;\; 6x^2-2=0 \;;\; x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

	$-\infty$ … $-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$ … $\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$ … $+\infty$
P'	+	−	+
P	↗	↘	↗
	MAX	MIN	

$\boxed{\text{Pendiente máxima en } x=-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}$ $\longrightarrow$ $P.MAX=\frac{-2\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left[1+\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right]^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}}=\boxed{\frac{9}{8\sqrt{3}}}$

NOTA: En realidad, P' es y'', el punto encontrado es uno de los dos puntos de inflexión de la función.

JUN 12 fase E

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 3 & \text{si } x=1\end{cases}$$

a)

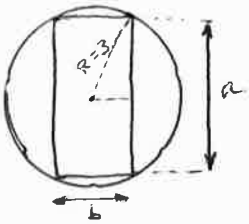
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=\boxed{2}$$

b) Como $f(1)=3\neq\lim_{x\to 1} f(x)$, la función no es continua en $x=1$.

Tiene una discontinuidad evitable.

Al no ser continua en $x=1$, $\boxed{\text{no será derivable en } x=1}$

JUN 12 fase G



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=3^2$$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=9$$

$$a^2+b^2=36$$

$$b=\sqrt{36-a^2}$$

Maximizar $\text{Area}=a\cdot b=a\cdot\sqrt{36-a^2}$; $a\in[0,6]$

$$A'=\frac{dA}{da}=\sqrt{36-a^2}+a\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{36-a^2}}\cdot(-\cancel{2}a)=\sqrt{36-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{36-a^2}}=\frac{\left(\sqrt{36-a^2}\right)^2-a^2}{\sqrt{36-a^2}}=\frac{36-2a^2}{\sqrt{36-a^2}}$$

$$A'=0 \Rightarrow \frac{36-2a^2}{\sqrt{36-a^2}}=0 \;;\; 36-2a^2=0 \;;\; a^2=18 \;;\; a=\cancel{\pm}\sqrt{18}$$

	0 … $\sqrt{18}$	$\sqrt{18}$ … 6
A'	+	−
A	↗	→
	MAX	

$\boxed{\text{Area máxima para } a=\sqrt{18} \longrightarrow b=\sqrt{36-(\sqrt{18})^2}=\sqrt{18}}$

Area Máxima $=\sqrt{18}\sqrt{18}=\boxed{18\ u^2}$

JUN 12 fase G

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'' = 6ax + 2b$

MIN. en $(1,1) \Rightarrow$
- $1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$
- $0 = 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c$

INF. en $(0,3) \Rightarrow$
- $3 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$
- $0 = 6a\cdot 0 + 2b$

$\rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=0 \\ \boxed{d=3} \\ 2b=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{b=0} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} a+0+c+3=1 \\ 3a+2\cdot 0+c=0 \end{cases} ; \begin{cases} a+c=-2 \\ 3a+c=0 \end{cases}$

$2a = 2$

$\boxed{a=1} \rightarrow \boxed{c=-3}$

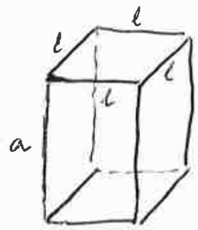
$$\boxed{y = x^3 - 3x + 3}$$

JUN 12 fase E

$2a + 2l = 60$

$a + l = 30$

$a = 30 - l$



Maximizar: $V = l^2 \cdot a = l^2\cdot(30-l) = 30l^2 - l^3$; $l \in [0, 30]$

$V' = \frac{dV}{dl} = 60l - 3l^2$

$V' = 0 \Rightarrow 60l - 3l^2 = 0$; $3l(20-l) = 0 \rightarrow l = 0$, $l = 20$

	0 – 20	20 – 30
V'	+	−
V	↗	↘

MAX en 20

Volumen máximo para $\boxed{l = 20 \text{ cm} \rightarrow a = 10 \text{ cm}}$ $\quad$ Vol Máx $= 20^2\cdot 10 = 4000 \text{ cm}^3$

JUL 12 fase E

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot\cos ax}{1} = a\cdot 1 = a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x \cos x}{x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{1} = \lim_{x\to 0}(-\cos^2 x + \sin^2 x) = -1 + 0 = -1$

Por lo tanto: $\boxed{a = -1}$

JUL 12 fase G

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1\cdot\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \frac{1-1}{1\cdot 0 + 1 - 1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = \frac{-1}{0+2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

JUL 12 fase G

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{m(e^x-1)}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{m(e^x-1)}{x} = \dfrac{m(1-1)}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{me^x}{1} = m\cdot e^0 = m$

$f(0)=4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{m(e^x-1)}{x} = \dfrac{m(1-1)}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{m\cdot e^x}{1} = m\cdot e^0 = m$

Si $f(x)$ es continua en $x=0 \Rightarrow \boxed{m=4}$

b) $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = N^o$ Real | Para que sea derivable en $x=0$

Por otro lado, como la derivabilidad necesita de la previa continuidad, 'm' debe ser 4.

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{4(e^h-1)}{h}-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4(e^h-1)-4h}{h^2} = \dfrac{4(1-1)-0}{0} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4\cdot e^h-4}{2h} = \dfrac{4\cdot 1-4}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4e^h}{2} = \dfrac{4\cdot 1}{2} = 2$

El límite del cociente incremental cuando $h\to 0^+$ daría el mismo resultado, que al tratarse de un nº real, asegura la derivabilidad en $x=0$: $\boxed{f(x) \text{ sí es derivable en } x=0}$

JUN 13 fase E

$f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota vertical } x=-1}$

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{1} = \infty \to$ No tiene asíntota horizontal.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{Asíntota oblicua } y=x-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \to x^2+2x=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\-2\end{cases}$

		-2		-1		0	
f'	+		−		−		+
f	↗		↘		↘		↗
		MAX				MIN	

f tiene un máximo relativo en $x=-2$
f " " mínimo " " $x=0$

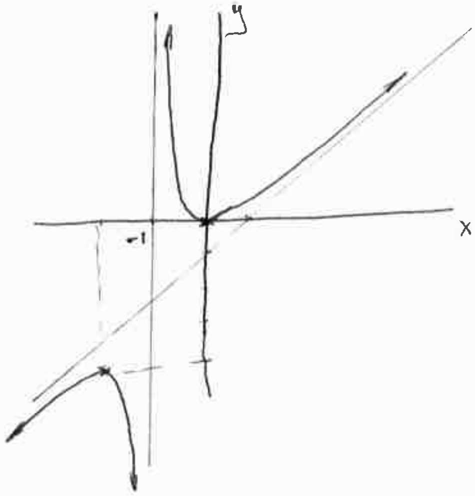
c)

$y=\dfrac{x^2}{x+1}$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
-2	-4
-1^-	$-\infty$
-1^+	$+\infty$
0	0
$+\infty$	$+\infty$

$y=x-1$

x	y
1	0
0	-1



JUN13 fase E

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{tg(3x)}=\frac{\ln 1}{tg 0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2(3x)}\cdot 3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2(3x)}{3(1+2x)}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$=$

JUN13 fase G

a) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-\frac{2}{3}x-4 \longrightarrow y'=\frac{1}{3}3x^2-8x-\frac{2}{3}=x^2-8x-\frac{2}{3}$

$0=2x+3y-4 \longrightarrow y=\frac{4-2x}{3} \Rightarrow$ pendiente $=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x^2-8x-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$; $x^2-8x=0$; $\boxed{\begin{matrix}x=0\\x=8\end{matrix}}$

Será paralela en los puntos $(0,-4)$ $\left(8,-\frac{284}{3}\right)$

b) $x=1 \to y=\frac{1}{3}-4-\frac{2}{3}-4=-\frac{25}{3}$

$\quad\;\; \to y'=1-8-\frac{2}{3}=-\frac{23}{3}$

$y+\frac{25}{3}=-\frac{23}{3}(x-1)$; $3y+25=-23x+23$; $\boxed{23x+3y+2=0}$

JUN13 fase G

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=1^{1/0}=1^{\infty}$$

$$A=\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}} \longrightarrow \ln A=\lim_{x\to 1}\ln(2-x)^{1/1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln(2-x)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{1-x}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-1}=1$$

$\ln A=1 \Rightarrow A=e^1=e$; $\boxed{\lim_{x\to 1}(2-x)^{1/1-x}=e}$

JUL 13 fase E

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$

Recta Tangente horizontal en $x=2 \Rightarrow 3\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b = 0$

" " " " $x=4 \Rightarrow 3\cdot 4^2 + 2a\cdot 4 + b = 0$

Punto de inflexión pertenece al eje X $\Rightarrow 0 = 6x + 2a$; $x = \frac{-2a}{6} = -\frac{a}{3}$;

$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-a}{3}\right) + c = 0$

$12 + 4a + b = 0$
$48 + 8a + b = 0$
$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0$

$4a + b = -12$
$8a + b = -48$
$4a = -36$; $\boxed{a=-9} \longrightarrow b = -12 + 36 = \boxed{24}$

$c = \frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} = \frac{(-9)^3}{27} - \frac{(-9)^3}{9} + \frac{(-9)\cdot 24}{3} = \boxed{-18}$

JUL 13 fase E

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{1+0} = \boxed{0}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{0}\operatorname{sen} 0 = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x/2)\cdot 1/2}{1} = \frac{1\cdot 1/2}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

JUL 13 fase E

$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

$\Rightarrow$ Asíntota Vertical $x=-1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ Asíntota Vertical $x=1$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} 3x = \infty \longrightarrow$ No tiene asíntota Horizontal

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & x^2-1 \\ \hline -2x^3+2x & 2x \\ 2x & \end{array}$$

$\longrightarrow$ Asíntota oblicua $y=2x$

b) $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2(x^2-4)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2(x^2-4) = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$; $\rightarrow x^2 - 4 = 0$; $\boxed{x = \pm 2}$

		-2		-1		0		1		2	
f'	+		−		−		−		−		+
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗
		MAX								MIN	

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
f es decreciente en $(-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2)$
f tiene un máximo relativo en $x=-2$
" " " mínimo " " $x=2$

JUL 13 fase G

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x \sqrt{1+x^2} + \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x} = \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)\, \text{ctg}\, x = (1-1) \cdot \text{ctg}\, 0 = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{Tg}\, x} =$

$= \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\sin x}{1/\cos^2 x} = \dfrac{0}{1} = \boxed{0}$

JUL 13 fase G

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + 93$ $\quad$ dom $f = [0, +\infty)$ ya que x son Toneladas.

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 15$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 15 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{6} = \dfrac{-4 \pm 14}{6} \begin{cases} 10/6 = 5/3 \\ \cancel{-18/6 = -3} \end{cases}$

	0		5/3	
f'		−		+
f		↘		↗
			MIN	

Mínimo coste para $\boxed{x = 5/3 \text{ ton}}$.

$x = 5/3 \longrightarrow f(5/3) = \dfrac{2111}{27} = \boxed{78'19}$

JUN 14 fase General

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \rightarrow 2x = 0$; $x = 0$
$\rightarrow 1 - x^2 = 0$; $x = \pm 1$
$\rightarrow e^{-x^2} = 0$ Absurdo

		-1		0		1	
f'	+		−		+		−
f	↗		↘		↗		↘
		MAX				MIN	

f es creciente en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

f es decreciente en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

f tiene un máximo local en $x=-1$

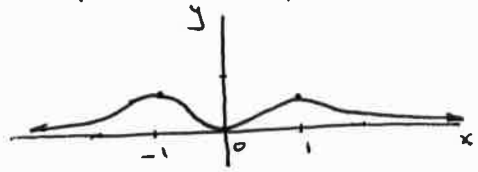
f " " mínimo " " $x=0$

f " " máximo " " $x=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}}{e^{x^2}\cdot 2\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ (ya que, al estar x elevado al cuadrado, es simétrica respecto del eje Y)

x	y
-1	e^{-1}
0	0
1	e^{-1}



JUN 14
fase General

Nº árboles	Nº frutos por árbol	Total Producción (frutos)
24	600	$24\cdot 600 = 14\,400$
25	$600-15 = 585$	$25\cdot 585 = 14\,625$
26	$600-2\cdot 15 = 570$	$26\cdot 570 = 14\,820$
⋮	⋮	⋮
$x+24$	$600-15x$	$(x+24)(600-15x)$

$P = (x+24)(600-15x)$ $\quad x =$ nº de árboles por encima de 24.

$P' = 1\cdot(600-15x) + (x+24)\cdot(-15) = 600-15x-15x-360 = 240-30x$

$P'=0 \Rightarrow 240-30x=0$; $x=8$

	0	8	$+\infty$
P	$+$	$-$	
P'	↗	↘	
		MAX	

Máxima producción plantando $24+8 = \boxed{32 \text{ árboles}}$, consiguiendo una producción de: $(8+24)\cdot(600-15\cdot 8) = \boxed{15\,360 \text{ frutos}}$

JUN 14
fase Específica

$A(4,0)$, $P(x,\sqrt{x})$ | $\vec{AP} = (x-4,\sqrt{x})$

$d = \sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x})^2} =$

$= \sqrt{x^2-8x+16+x} = \sqrt{x^2-7x+16}$

$$d' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-7x+16}}\cdot(2x-7) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$

$d'=0 \Rightarrow 2x-7=0$; $x=3'5$

	0	3'5	$+\infty$
d'	$-$	$+$	
d	↘	↗	
		MIN	

Mínima distancia para $x=3'5$.

$\boxed{P(3'5, \sqrt{3'5})}$

JUN 14 fase específica

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{1\cdot 0+0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+\cancel{(1+x)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{0+2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

JUL 14 fase General

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ K & \text{si } x=0\end{cases}$$

$\frac{e^x-1}{x}$ está definida y es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser resta y cociente de funciones continuas sin anularse el denominador.

Veamos en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1\\ f(0)=K\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{K=1}$$ para que f sea continua en $x=0$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{0-1+1}{0^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^x}+xe^x-\cancel{e^x}}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$ $\boxed{f \text{ es derivable en } x=0 \text{ siendo } f'(0)=\frac{1}{2}}$

JUL 14 fase General

$$f(x)=ax+3+\frac{b}{x^2}\longrightarrow f'(x)=a+\frac{-b\cdot 2x}{x^4}=a-\frac{2b}{x^3}$$

a)

$x=1$: $y=a+3+b$; $y'=a-2b$

$y=3x \longrightarrow y'=3$

$x=1$: $y=3$; $y'=3$

$$\left.\begin{array}{l}a+\cancel{3}+b=\cancel{3}\\ a-2b=3\end{array}\right\}$$

$$3b=-3\Rightarrow \boxed{b=-1}\ \boxed{a=1}$$

b)

$$f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}\qquad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0+3-\infty=-\infty\Rightarrow$$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+3-\frac{1}{x^2}\right)=\infty\longrightarrow$$ No tiene Asíntota Horizontal.

$$f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3+3x^2-1}{x^2}$$

$$\begin{array}{l|l}x^3+3x^2-1 & x^2\\ -x^3 & \hline x+3\\ \quad 3x^2-1 & \\ \quad -3x^2 & \\ \qquad -1 & \end{array}\longrightarrow$$ $\boxed{\text{Asíntota Oblicua } y=x+3}$

JUL 14
fase Específica

$y = x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \;;\; 3x(x-2) = 0 \;;\; x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

		0		2	
y'	+		−		+
y	↗	MAX	↘	MIN	↗

$x = 0 \rightarrow y = 1$, $y' = 0$ $\quad \boxed{y = 1}$

JUL 14
fase Específica

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)^{1/x-2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x/2)}{x-2}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x/2}\cdot 1/2}{1}} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}} = \boxed{e^{1/2}} = \boxed{\sqrt{e}}$$

JUL 14
fase Específica

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

a) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+6x)\cdot x^{\cancel{2}} - (x^3+3x^2-4)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{3x^3 + \cancel{6x^2} - 2x^3 - \cancel{6x^2} + 8}{x^3} = \dfrac{x^3+8}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \;;\; x^3 = -8 \;;\; x = -2$

		−2		0	
f'	+		−		+
f	↗	MAX	↘		↗

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
f es decreciente en $(-2, 0)$
f tiene un máximo local en $x = -2$ $\boxed{(-2,0)}$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$ $\rightarrow$ Asíntota vertical $x = 0$

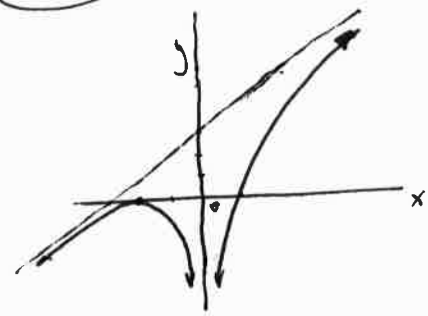
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+6x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x+6}{2} = \infty$ — No tiene Asíntota Horiz.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 4 & x^2 \\ \hline -x^3 & x + 3 \\ \quad 3x^2 - 4 & \\ \quad -3x^2 & \\ \qquad -4 & \end{array}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua $y = x + 3$

$y = x + 3$

x	y
0	3
−3	0



$y = \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

x	y
−2	0
1	0

JUN 15
fase General

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{ctg}\,x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{tg}\,x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \text{tg}\,x}{x\,\text{tg}\,x} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1+\text{tg}^2 x)}{\text{tg}\,x + x(1+\text{tg}^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{tg}^2 x}{\text{tg}\,x + x + x\,\text{tg}^2 x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{tg}\,x\,(1+\text{tg}^2 x)}{1+\text{tg}^2 x + 1 + \text{tg}^2 x + x(1+\text{tg}^2 x)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

JUN 15
fase General

$x =$ nº máquinas
$y =$ nº empleados

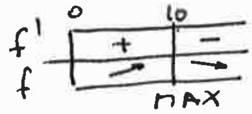
Maximizar $f(x,y) = 9xy^2$

Siendo $22500 = 1500y + 2500x \longrightarrow x = 9 - \frac{3y}{5}$

$f(y) = 9\left(9 - \frac{3y}{5}\right)\cdot y^2 = 81y^2 - \frac{27}{5}y^3$

$f'(y) = 162y - \frac{81}{5}y^2 = \frac{81}{5}y(10-y)$

$f'(y) = 0 \Rightarrow \frac{81}{5}y(10-y) = 0 \; ; \quad y = \begin{cases} 0 \\ 10 \end{cases}$



Se maximizaría la producción contratando $\boxed{\text{10 empleados}}$ y comprando $x = 9 - \frac{3\cdot 10}{5} = \boxed{\text{3 máquinas}}$

JUN 15
fase Específica

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$P(-1,6) \longrightarrow 6 = -1 + a - b + 2$

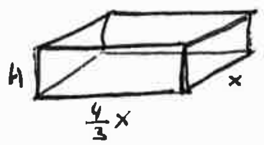
$x = 1 \longrightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \longrightarrow 1 = 3 + 2a + b$

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

$3a = 3$

$\boxed{a = 1} \quad \boxed{b = -4}$

JUN 15
fase Específica



$\text{Coste} = 225\cdot x\cdot\frac{4}{3}x + 300\cdot x\cdot\frac{4}{3}x + 256\cdot H\cdot\frac{4}{3}x\cdot 2 + 256\cdot H\cdot x\cdot 2 =$

$= 700x^2 + \frac{3584}{3}Hx$

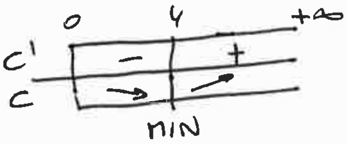
Minimizar $C = 700x^2 + \frac{3584}{3}Hx$

Siendo $V = x\cdot\frac{4}{3}x\cdot H = 100 \longrightarrow H = \frac{75}{x^2}$

$C = 700x^2 + \frac{89600}{x}$

$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$

$C' = 0 \Rightarrow 1400x = \frac{89600}{x^2} \; ; \quad x^3 = 64 \; ; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$



a) Minimizaríamos costes con $\boxed{4\,m}$ de ancho de base

b) El coste mínimo sería: $C_{MIN} = 700\cdot 4^2 + \frac{8960}{4} = \boxed{13440\ €}$

JUN 15
fase Específica

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+mx}\cdot m}{\cos(2x)\cdot 2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{2(1+mx)\cos(2x)} =$$

$$= \frac{m}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{m}{2}$$

$\frac{m}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{m = 6}$

JUL 15
fase Específica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + b\sin x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x + b\cos x}{3x^2} = \frac{1-0+b}{0} = \frac{b+1}{0}$$

Para que el límite no sea infinito, $\boxed{b=-1}$

Empezando de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} =$$

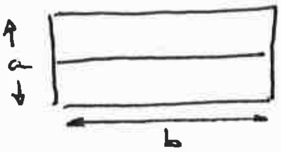
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

JUL 15
fase Específica

Maximizar $A = b\cdot a$

Siendo $480 = 3b + 2a$

$$b = \frac{480-2a}{3}$$



$$A = \frac{480-2a}{3}\cdot a = 160a - \frac{2a^2}{3}$$

$$A' = 160 - \frac{4a}{3}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 160 = \frac{4a}{3} \ ; \ a = 120$$

	0 – 120	120 – 240
A'	+	−
A	↗	↘

MAX (en 120)

Área máxima para $a = 120\,m \longrightarrow A_{MAX} = 160\cdot 120 - \frac{2\cdot 120^2}{3} = \boxed{9600\ m^2}$

JUL 15
fase Específica

$$f(x) = x + xe^{-x} \longrightarrow f'(x) = 1 + e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = (1-x)e^{-x} + 1$$

$$x - y + 3 = 0 \ ; \ y = x+3 \ ; \ m = 1$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow (1-x)e^{-x} + \cancel{1} = \cancel{1} \ ; \ (1-x)e^{-x} = 0 \to x = 1$$

$$\to e^{-x} = 0 \text{ Absurdo.}$$

$$x = 1 \to y = 1 + 1e^{-1} = 1 + e^{-1}$$

$$\to y' = 1$$

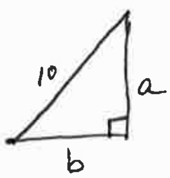
Recta Tangente: $y - (1+e^{-1}) = 1\cdot x \ ; \ \boxed{y = x + 1 + e^{-1}}$

JUL 15
fase General

Maximizar $P = a + b + 10$

Siendo $a^2 + b^2 = 100$

$$b = \sqrt{100 - a^2}$$



$$P = a + \sqrt{100-a^2} + 10 \qquad a \in [0,10]$$

$$P' = 1 + \frac{-2a}{2\sqrt{100-a^2}} = 1 - \frac{a}{\sqrt{100-a^2}}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 1 = \frac{a}{\sqrt{100-a^2}} \ ; \ \sqrt{100-a^2} = a \ ; \ 100 - a^2 = a^2 \ ;$$

$100 = 2a^2 \;;\quad a^2 = 50 \;;\quad a = \begin{cases} \sqrt{50} \\ \cancel{-\sqrt{50}} \end{cases}$

	0		$\sqrt{50}$		10
P'		+		−	
P		↗		↘	
			MAX		

Máximo perímetro para $\boxed{a=\sqrt{50}} \longrightarrow b = \sqrt{100-(\sqrt{50})^2} = \boxed{\sqrt{50}}$

Será un Triángulo Isósceles y Rectángulo.

JUL 15
fase General

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-1+0}{1+1-0} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

JUN 16
fase General

a) $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$

Asíntota vertical $x=2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \dfrac{2b}{2-a} = \infty \Rightarrow \boxed{a=2}$

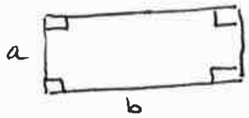
Asíntota horizontal $y=3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{bx}{x-a} = 3 \Rightarrow \dfrac{b}{1} = 3 \;;\; \boxed{b=3}$

b) $f'(x) = \dfrac{b(x-a) - bx}{(x-a)^2} = \dfrac{-ab}{(x-a)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-ab}{(x-a)^2} = 0 \;;\; -ab = 0$ Absurdo porque $\begin{matrix} a\neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}$.

Por lo tanto $f(x)$ no tiene extremos relativos para ningún $\begin{matrix} a \in \mathbb{R}-\{0\} \\ b \in \mathbb{R}-\{0\} \end{matrix}$

JUN 16
fase General



$2a + 2b = 2 \longrightarrow b = 1-a$

Área $= ab$

$A = a(1-a) = a - a^2 \quad , (a \geq 0)$

$A' = 1 - 2a$

$A' = 0 \longrightarrow a = 1/2$

	0		1/2	
A'		+		−
A		↗		↘
			MAX	

Área máxima para $a = \frac{1}{2} \longrightarrow b = \frac{1}{2}$. [Se trata en realidad de un cuadrado]

Área máxima $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} m^2 = \frac{100}{4} dm^2 = \boxed{25 \; dm^2} \longrightarrow \boxed{\text{Premio} = 25 €}$

JUN 16
fase Específica

$y = x - x\ln x \longrightarrow y' = 1 - 1\cdot\ln x - x\cdot\frac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x \Big\} \to -\ln x = -1 \;;\; x = e$

$x + y + 2 = 0 \longrightarrow y = -x - 2 \longrightarrow$ pendiente $= -1$

$x = e \longrightarrow y = e - e\ln e = e - e = 0$

$\quad \longrightarrow y' = -\ln e = -1$

$y - 0 = -1(x - e) \;;\; \boxed{y = e - x}$ Recta Tangente

JUN 16
fase General

$P(1,0) \longrightarrow (1-a)^2 + (-b)^2 = R^2$

$Q(0,1) \longrightarrow (-a)^2 + (1-b)^2 = R^2$

$;\quad - \begin{cases} 1 - 2a + a^2 + b^2 = R^2 \\ a^2 + 1 - 2b + b^2 = R^2 \end{cases}$

$\quad -2a + 2b = 0 \Rightarrow b = a$

$R^2 = 1 - 2a + a^2 + a^2 \;;\quad R = \sqrt{2a^2 - 2a + 1}$

$R' = \dfrac{4a-2}{2\sqrt{2a^2-2a+1}} = \dfrac{2a-1}{\sqrt{2a^2-2a+1}}$

$R' = 0 \longrightarrow \dfrac{2a-1}{\sqrt{2a^2-2a+1}} = 0 \;;\; 2a - 1 = 0 \;;\; a = 1/2 \longrightarrow b = 1/2$

	0		1/2	
R'		−		+
R		↘		↗
			MIN	

$\boxed{C(1/2, 1/2)}$

JUL16
fase General

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{m}{0}=\frac{1}{0}-\frac{m}{0}=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-m(e^x-1)}{2x(e^x-1)}=\frac{0-m(1-1)}{0(1-1)}=\frac{0}{0}=$$

L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2x\cdot e^x}=\frac{2-m\cdot 1}{2(1-1)+0\cdot 1}=\frac{2-m}{0}=(*)$$

Para que no resulte ∞, debe ser $\boxed{m=2}$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{2(e^x-1)+2xe^x}=\frac{0}{0}=$$

L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-2\cdot 1}{2\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1}=\frac{-2}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

JUL16
fase General

b $\boxed{A=b^2}$ b $\qquad$ $\boxed{A=2a^2}$ a, $2a$

$$4b+6a=340\longrightarrow b=\frac{340-6a}{4}=\frac{170-3a}{2}$$

Suma de Areas $=b^2+2a^2=$

$$=\frac{(170-3a)^2}{4}+2a^2=\frac{28900-1020a+9a^2}{4}+2a^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(17a^2-1020a+28900\right)$$

$$S'=\frac{1}{4}(34a-1020)$$

$$S'=0\Rightarrow a=\frac{1020}{34}=30$$

	0	30	
S'	$-$		$+$
S	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Suma mínima de Areas para $a=30$ cm $\longrightarrow b=\frac{170-3\cdot 30}{2}=40$ cm

Será un cuadrado de 40 cm de lado y un rectángulo 30 cm x 60 cm

JUL16
fase Específica

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}=\frac{\frac{1}{1}-1}{3\cdot 0}=\frac{0}{0}=$$

L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x}{6x}=\frac{\frac{0}{1}+0}{0}=\frac{0}{0}=$$

L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}+\cos x}{6}=$$

$$=\frac{\frac{1+0}{1}+1}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

También:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

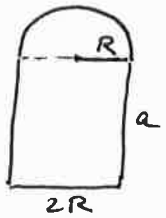
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{6x\cos x+3x^2(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{6x\cos x-3x^2\sin x}=\frac{0}{0}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x \cos x + 2\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{6\cos x + 6x\cdot(-\operatorname{sen} x) - 6x\operatorname{sen} x - 3x^2\cos x} = \frac{2+0}{6+0-0-0} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$ ✓

JUL 16
fase Específica

$$18 = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + 2a + 2R$$

$$a = \frac{18 - \pi R - 2R}{2}$$



$$\text{Area} = \frac{\pi R^2}{2} + 2aR =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} + \cancel{2}\,\frac{18-\pi R-2R}{\cancel{2}}\cdot R = \frac{\pi R^2}{2} + 18R - \pi R^2 - 2R^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi R^2 + 36R - 2\pi R^2 - 4R^2\right) = \frac{1}{2}\left(36R - \pi R^2 - 4R^2\right)$$

$$A' = \frac{1}{2}\left(36 - 2\pi R - 8R\right)$$

$$A' = 0 \Rightarrow 36 - 2\pi R - 8R = 0$$

$$18 = \pi R + 4R \; ; \quad R = \frac{18}{\pi+4}$$

	0		$18/\pi+4$	
A'		+		−
A		↗	MAX	↘

$$\boxed{\text{Radio} = \frac{18}{\pi+4}}$$

Modelo 17 (Ver el de Julio 2012 fase Específica)