

## EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO EN LA PAU

- Junio 94** Dados los puntos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$  Y  $C(1, 6, a)$ , se pide:
- hallar para qué valores del parámetro  $a$  están alineados
  - hallar si existen valores de  $a$  para los cuales  $A$ ,  $B$  Y  $C$  son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos
  - hallar la ecuación de la recta que pasando por el origen corte perpendicularmente a la recta  $AB$ .
- Sept. 94** Dado el plano de ecuación  $\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$  y los puntos  $A(1, 0, 2)$  Y  $B(2, 1, a)$  sea  $C$  el pie de la perpendicular desde el punto  $A$  al plano  $\pi$ . Se pide determinar el valor de  $a$  para que el triángulo  $ABC$  sea rectángulo (ángulo recto en  $C$ ) y calcular su área. Hallar los dos ángulos restantes de dicho triángulo.
- Junio 95** Dada la recta  $r : x - 1 = 2y = 2z + 2$  y los puntos  $P(-1, 2, 0)$  y  $Q(5, b, c)$ , se pide:
- Hallar  $b$  y  $c$  sabiendo que la recta  $PQ$  es paralela a  $r$ .
  - Hallar la distancia entre los puntos  $P$  y  $Q$ .
  - Hallar el volumen del cilindro obtenido al girar el segmento  $PQ$  en torno a  $r$
- Sept. 95** El vector  $a = 3i + j - k$  es perpendicular al plano  $\pi_1$  y el vector  $b = 2i - j + k$  es perpendicular a un segundo plano  $\pi_2$
- Hallar el ángulo determinado por los dos vectores.
  - ¿Se intersecan los planos? Justifíquese la respuesta.
  - Si los dos planos se intersecan, hallar, de forma razonada, un vector paralelo a la recta de intersección.
- Junio 96** Dadas las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones  $r : x = y = z$        $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$
- Estudiar su posición.
  - Hallar la recta que corta a  $r$  y  $s$  y es paralela a la recta  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -1)$
- Sept. 96**
  - Comprobar que los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -1, 0)$  y  $C(2, 3, 0)$  forman un triángulo y hallar su área.
  - Calcular el pie de la perpendicular trazada desde el origen al plano determinado por  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- Junio 97** Hallar todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que  $(1, 0, 0)$   $(0, 2, 0)$   $(0, 0, 3)$  son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es mayor o igual que uno.
- Junio 97** Dado el tetraedro con un vértice  $O$  sobre el origen de coordenadas y los otros tres  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre los semiejes positivos  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$  respectivamente, se pide:
- Hallar las coordenadas de  $A$ ,  $B$  y  $C$  sabiendo que el volumen del tetraedro es  $4/3$  y las aristas  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$  tienen igual longitud.
  - La ecuación de la altura del tetraedro correspondiente a la cara  $ABC$
  - Calcular Distancia entre las rectas  $AB$  y  $OC$ .
  - Angulo que forman las aristas  $BC$  y  $AB$ .
- Sept. 97** Dado el plano  $\pi \equiv 2x + 5y + 7z + 3 = 0$ , la recta  $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda + 1 \\ z = 2\lambda \end{cases}$  y el punto  $A(0, 7, 5)$
- Determinar la ecuación de la recta  $r$  paralela al plano  $\pi$  que pase por el punto  $A$  y sea perpendicular a la dirección de la recta  $s$ .
  - Determinar la posición del plano  $\pi$  y la recta  $r$
  - Calcular la ecuación de la recta  $t$  que pase por  $A$  y corte perpendicularmente a  $s$ .
- Junio 98** Los puntos  $P = (1, 1, 0)$  y  $Q = (0, 2, 1)$  son dos vértices contiguos de un rectángulo, un tercer vértice pertenece a la recta  $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$
- Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.
  - ¿Qué posición relativa debería tener la recta  $r$  y la que contiene al segmento  $PQ$ , para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

**Sept. 98** Los puntos  $P = (2, 0, 0)$  y  $Q = (0, 4, 2)$  son dos vértices de un triángulo isósceles.

- a) Obtener las coordenadas del tercer vértice sabiendo que pertenece a la recta  $r \equiv \begin{cases} z = 20 \\ y = 0 \end{cases}$
- b) ¿Es única la solución? Razona la respuesta.

**Junio 99** Los puntos  $P = (1, -1, 1)$  y  $Q = (3, -3, 3)$  son dos vértices opuestos de un cuadrado contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación:  $x + y = 0$

- a) Determina las coordenadas de los otros dos vértices.
- b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices calculados.
- c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

**Sept. 99** Los puntos  $P = (0, 1, 0)$  y  $Q = (-1, 1, 1)$  son dos vértices de un triángulo y el tercero  $S$  pertenece a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases} \text{ y la recta que contiene a } P \text{ y a } S \text{ es perpendicular a la recta } r$$

- a) Determina las coordenadas de  $S$
- b) Calcula el área del triángulo  $PQS$

**Sept. 99** Dado el sistema  $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina para qué valores de  $a$  el conjunto solución son los puntos de una recta.
- b) Halla un valor de  $a$  para el que se pueda construir un cuadrado de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

**Junio 00** Los puntos  $P = (2, 1, 2)$  y  $Q = (0, 5, 4)$  son dos vértices opuestos de un cuadrado contenido en el plano de ecuación:  $x + y - z = 1$

- a) Determina las coordenadas de los otros dos vértices.
- b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al origen de coordenadas y es paralela a la que contiene a los puntos  $P$  y  $Q$ .

**Sept. 00** Dado el sistema:  $S \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

- a) Añade una tercera ecuación al sistema  $S$  de modo que la verifique el punto  $P = (-4, 1, 0)$  y el sistema formado por las tres ecuaciones tenga la misma solución que  $S$ .
- b) ¿Pertencen al mismo haz de planos los definidos por cada una de las tres ecuaciones? Justifica las respuestas.

**Sept. 00** Sea la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 6x - 3y + 10z = 6 \end{cases}$

- a) Calcula las coordenadas de los puntos  $P$  y  $Q$  que pertenecen a la recta y distan 5 unidades del origen de coordenadas.
- b) Sea  $M$  el punto medio del segmento de extremos  $P$  y  $Q$ . Calcula sus coordenadas.
- c) Justifica porqué, de todos los puntos de la recta  $r$ ,  $M$  es el más próximo al origen de coordenadas.

**Junio 01** Dada la recta  $r$  de ecuación:  $x + 1 = y - 2 = \frac{z - 3}{4}$  y el punto  $P(1, 2, 1)$ , calcula:

- a) la ecuación de la recta que pasa por  $P$ , es perpendicular a  $r$  y se apoya en  $r$ .
- b) las coordenadas del punto  $Q$  simétrico de  $P$  respecto de  $r$ .

**Sept. 01** Dada la familia de planos  $2mx + (m + 1)y - 3(m - 1)z + m + 4 = 0$

- a) calcula la ecuación del plano de esta familia que pasa por el punto  $(1, -1, 2)$
- b) calcula, si existe, la ecuación del plano de esta familia que es perpendicular a la recta  $\begin{cases} x + 3z - 1 = 0 \\ y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$

- Junio 02** a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$  y al punto  $(2, -1, 2)$
- b) Calcula la distancia del plano al punto  $(0, 1, 0)$

**Sept. 02** Sea el plano  $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = s \\ z = 1 - 2s + 2t \end{cases}$  y la recta  $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z$

- a) Encuentra la posición relativa de los mismos
- b) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(-1, 0, 2)$  es paralela al plano  $\pi$  y es perpendicular a la recta  $r$

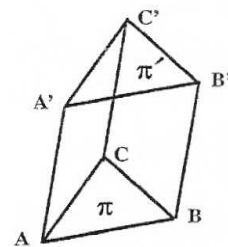
- Junio 03** Sean los planos  $\pi_1 : 2x + 3y + z = 2$  y  $\pi_2 : x + y - z = 1$
- a) Determinar la posición relativa de los mismos
- b) Calcular una recta que esté contenida en el plano  $\pi_2 : x + y - z = 1$ , sea paralela a la intersección de esos dos planos y que pase por el punto  $(5, -3, 1)$

**Sept. 03** Dadas las rectas  $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z}{-2}$  y  $s : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

- a) Calcular  $\lambda$  para que se corten en un punto
- b) Hallar el punto de corte para ese valor de  $\lambda$

- Junio 04** Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura con  $A(1, -1, 0)$ ,  $B(1, 0, -1)$ ,  $C(0, 1, -1)$  y  $A'(1, -1, a)$ . Calcula:

- a) La ecuación del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$
- c) El valor de  $a$  para que el plano  $\pi'$  que contiene a los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  diste una unidad del plano  $\pi$ .
- d) Para  $a = 1$ , el plano  $\pi'$  y el volumen del prisma



**Sept. 04** Sean el plano  $\pi : ax + 2y - 4z = b$  y la recta  $r : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

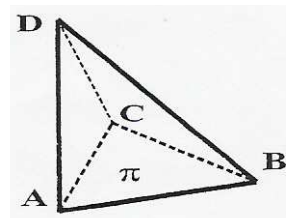
- a) Con  $a = 1$ , estudia la posición relativa de la recta y el plano
- b) Siguiendo con  $a = 1$ , calcula  $b$  para que el punto  $(3, 1, -3)$  pertenezca a la recta y al plano
- c) Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$

- Junio 05** Sea el punto  $A(1, 0, 0)$  y el plano  $\pi : 2x + y - z = 1$ . Halla:

- a) La ecuación de la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $\pi$
- b) La ecuación del plano  $\pi'$  que pasa por  $A$  y no corta a  $\pi$
- c) La distancia entre los dos planos

- Sept. 05** Sea el tetraedro de la figura formado por  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 6)$  y  $D(a, 3, 1)$ . Calcula:

- a) El área del triángulo limitado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- b) La ecuación del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$
- c) El valor de  $a$  para que el vector  $AD$  sea perpendicular al plano  $\pi$  anterior.
- d) Para  $a = 5$ , el punto  $D'$  simétrico de  $D$  respecto al plano  $\pi$



- Junio 06** Sean los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(a, 2, b)$  y  $C(1, 0, 0)$

- a) Con  $a = 2$ , calcula  $b$  para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto  $P(2, 0, 1)$ .  
¿Cuál es la ecuación de dicho plano?
- b) Calcula los valores de  $a$  y de  $b$  para que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  estén alineados.

**Sept. 06** Dados los puntos  $A(1, 1, 0)$  y  $B(0, 0, 2)$  y la recta  $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$  Halla:

- a) Un punto  $C \in r$  de forma que el triángulo  $ABC$  sea rectángulo con el ángulo recto en  $C$ .
- c) El plano  $\pi$  que pasa por  $A$  y  $B$  y es paralelo a  $r$

**Jun. 07** Dados el punto  $(1, 1, 1)$  y la recta  $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$  Calcula:

- Un vector  $\mathbf{u}$  director de la recta  $r$
- El plano  $\pi$  que contiene a la recta  $r$  y al punto  $A$
- La recta  $s$  que pasa por el punto  $A$ , está contenida el plano  $\pi$  anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta  $r$

**Sept. 07** Dados los puntos  $A(2, 2, 0)$ ,  $B(0, 0, 2)$  y  $C(0, 1, 2)$

- Halla el plano  $\pi$  que contiene a los tres puntos
- Calcula un punto  $P$  que esté a distancia  $2\sqrt{2}$  del plano  $\pi$  y del punto medio del segmento  $AB$
- Considerando  $D(2, 1, 1)$  calcula el volumen del tetraedro limitado por los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .