Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II:

2º Bachillerato

Capítulo 8: Probabilidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda

Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El curso pasado ya estudiamos probabilidad. En este curso vamos a profundizar en la Teoría de la Probabilidad. El motivo es el de sus muchas aplicaciones en las Ciencias Sociales, en todas las ciencias, pero, como comprobarás en los enunciado de los problemas, en Medicina, Psicología, Sociología…

Los medios de comunicación, televisión, periódicos, utilizan todos los días la Estadística y la Probabilidad: "el 40 % de los incendios son por negligencia", "el 30 % de los muertos en accidente de carretera no llevaban el cinturón de seguridad puesto", "hoy lloverá" … e incluso nosotros la usamos aunque sea de forma intuitiva, para tomar decisiones (como llevar el paraguas).

Como ya has estudiado Estadística y Probabilidad en ESO y el curso pasado, vamos a revisar los conceptos más importantes y terminaremos aprendiendo cosas nuevas, como el Teorema de *Bayes* en probabilidad.

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

> *"Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, ¿calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis".*

La Probabilidad y la Estadística es unirán en el próximo capítulo, en el que estudiaremos la inferencia estadística. Los intervalos de confianza y contraste de hipótesis se utilizan, como su nombre indica para *inferir* de los datos que nos suministra una muestra, conclusiones sobre la población. Por ejemplo:

> *Preguntamos a una muestra a qué partido político tiene intención de voto, e inducimos, con una cierta probabilidad, el partido que ganará las elecciones.*

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. PROBABILIDAD

1.1. Álgebra de sucesos

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- *Son experimentos aleatorios:*

a) Lanzar un dado y anotar el número de la cara superior.

b) Lanzar tres dados y anotar los números de las caras superiores.

c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.

d) Tirar una moneda tres veces y anotar el número de caras obtenido

e) Sacar, sin reemplazamiento, cinco cartas de la baraja.

f) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, soltar un objeto y comprobar que cae, calcular el coste de la fruta que hemos comprado sabiendo el peso y el precio por kg, calcular el coste del recibo de la compañía telefónica sabiendo el gasto… no son experimentos aleatorios.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) El número de habitantes de las provincias españolas.

b) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.

c) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.

d) Saber si el próximo año es bisiesto.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso S** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral:

$$S \subset E.$$

Ejemplos:

- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga* cara *o salga* cruz. *El conjunto de sucesos elementales es* {*cara, cruz*}.
- *El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes:*

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.

b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso A obtener par es A = {2, 4, 6}, el suceso B obtener impar es B = {1, 3, 5}, el suceso C obtener múltiplo de 3 es C = {3, 6}, el suceso D sacar un número menor que 3 es D = {1, 2}.
- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es A = {(+, +)}, *el suceso sacar una cara* es B = {(C, +), (+, C)} *y el suceso sacar dos caras* C = {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados*.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si bien se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

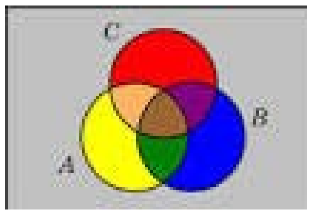
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios, pues son subconjuntos del espacio muestral.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup C) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de *Venn*.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, hemos llamado A al suceso obtener par*: $A = \{2, 4, 6\}$, y B al suceso obtener múltiplo de 3: $B = \{3, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A - B = \{2, 4\}$.

Actividades propuestas

5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos. ***Por ejemplo:*** Vamos a comprobar la Ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$:

$A \cap B = \{6\} \rightarrow (A \cap B)^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow A^C = \{1, 3, 5\}$; $B = \{3, 6\} \rightarrow B^C = \{1, 2, 4, 5\}$; $A^C \cup B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C, $(A \cup B)^C$, $A^C \cup B^C$.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera un suceso al espacio muestral, E, y se le denomina **suceso seguro**.

Observa que al realizar el experimento aleatorio es seguro que sale uno de los posibles resultados, luego es seguro que se verifica E.

El conjunto vacío es un subconjunto de E luego es un suceso aleatorio. Como suceso al conjunto vacío, $\varnothing$, se le llama **suceso imposible**. Observa que como no tiene elementos es imposible que se verifique.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **suceso complementario**) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o *noA*), al suceso $E - A$, es decir, está formado por los elementos del espacio muestral que **no** están en el suceso A.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

- *Al sacar una carta de una baraja, si* A = "Sacar un *as*" y B = "Sacar *bastos*" y C = "Sacar un *rey*". Entonces los sucesos A y B son compatibles pues podemos sacar el *as de bastos*, pero los sucesos A y C son incompatibles pues $A \cap C = \varnothing$, ninguna carta es a la vez *as* y *rey*.

Actividades propuestas

7. Utiliza un diagrama de *Venn* para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

8. Considera ahora un diagrama de *Venn* con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas A que toman té, 27 que toman café B y 2 personas que no toman ninguna bebida: $(A \cup B)^C$ A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Escríbelo en función de A y B, y represéntalo en el diagrama de *Venn*. B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café. D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B. E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras e indícalo en el diagrama. F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Asignación de probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya se había sido usado este concepto por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Si los sucesos elementales son equiprobables, es decir, a todos ellos les podemos asignar la misma probabilidad, (si la moneda no está trucada, si el dado no está trucado…) se puede usar la Relgla de *Laplace*: Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una experimental, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles.**

Esto último, cuando se puede usar, simplifica la forma de asignar probabilidades y se conoce como **Regla de *Laplace*** que dice que:

Regla de *Laplace*

“Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles”:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los Grandes Números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la *Ley de los Grandes Números*, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga un 3 al tirar un dado es 1/6, pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 3, y suponemos que el dado no está trucado. Si sospecháramos que el dado estuviera trucado, para asignar esa probabilidad habría que tirar el dado un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener un 3.

- La probabilidad de sacar un número par al tirar un dado es 3/6 = 1/2 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y los caso favorables son 3, {2, 4, 6} y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables, por lo que aplicamos la Regla de Laplace.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar una copa*", o "*sacar un caballo*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad, de por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar una copa* es 10/40, y la de un *caballo* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey o bien una copa? ¿Y de sacar un rey y además una copa? Debemos calcular P(rey $\cup$ copa), hay 40 cartas (caso posibles), 4 reyes y 10 copas, pero está el el rey de copas (que lo estaríamos contando dos veces), luego los caso favorables son 13, y P(rey $\cup$ copa). Debemos calcular P(rey $\cap$ copa), como hay un único rey de copas, es 1/40.
- *En una clase hay* 15 *chicos y* 14 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado y subdelegado se hace un sorteo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase tanto la delegada como la subdelegada sean chicas?* Los casos posibles son 29·28, ¿por qué? y los casos favorables son 14·13, ¿por qué?, *de acuerdo con la Ley de* Laplace*, la probabilidad pedida es*

$$P(A) = \frac{número de casos\ favorables al\ suceso A}{número de casos\ posibles} = \frac{14 \cdot 13}{29 \cdot 28} = 0'22$$

Actividades propuestas

9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

11. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.

12. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.

13. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.

14. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.

15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.

16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.

17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Axiomática de *Kolmogorov*

El matemático ruso *Andrey Kolmogorov* (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de suceso y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de *Kolmogorov* es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

Definición

La probabilidad es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$E \to R$$

$$A \to P(A)$$

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E) = 1.$$

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A.$$

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

Consecuencias de los axiomas

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

a) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n).$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un 6 al tirar dos dados?*

El suceso *sacar al menos un 6* es el suceso **contrario** al de no sacar ningún 6. La probabilidad de no sacar un 6 en el primer dado es 5/6, luego la probabilidad de no sacar ningún 6 es (5/6)·(5/6). La probabilidad de sacar al menos un 6, al ser el suceso contrario es:

$$P(\textit{Sacar al menos un } 6) = 1 - P(\textit{No sacar ningún } 6) = 1 - (5/6)\cdot(5/6) = 11/36.$$

Actividades propuestas

18. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?

19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número menor que 2 o bien un número mayor que 5?

$A = \{1\}$, $B = \{6\}$. Debemos calcular $P(A \cup B) = P(1, 6\}$ = 2/6. Los sucesos A y B son incompatibles, no se verifican a la vez, luego $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ = 1/6 + 1/6…,Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- Al tirar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3?

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$. Debemos calcular $P(A \cup B) = \{2, 3, 4, 6\}$ = 4/6. Los sucesos A y B son compatibles, pues el número 6 es a la vez múltiplo de 2 y de 3. Ahora no se verifica que la probabilidad de la unión sea igual a la suma de probabilidades, pues: $P(A) + P(B)$ = 3/6 + 2/6 = 5/6.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que no pueden realizarse a la vez, por lo que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso *"se verifica A o bien se verifica B"*. Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de *Kolmogorov*.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos,

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar una sota o una figura; b) No sale una sota o sale un sota; c) Sacar un oro o una figura.*

a) Hay 4 sotas y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero las cuatro sotas son figuras, por tanto P(Sota $\cup$ Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0'4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son sotas, y hay 4 sotas, luego P(no sota $\cup$ sota) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión es más general. Siempre:

$P(\overline{A} \cup A) = 1$,

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 oros y hay 16 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez oros (as, sota, caballo y rey), luego P(Oro $\cup$ Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

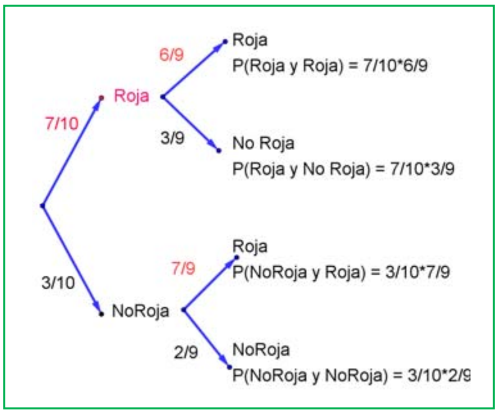
La probabilidad de sacar una bola roja es 7/10. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 7/10, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 7/10 · 7/10 = 0'49. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.



Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 9 bolas y de ellas sólo quedan 6 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 6/9, y está **condicionada** por lo que antes hayamos sacado.

Se escribe: P(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de Roja condicionada a haber sacado Roja"*.

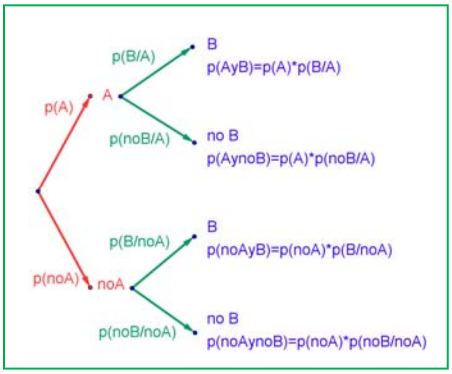
La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 7/10 · 6/9 = 42/90 = 0'46.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 7/10 · 3/9 = 21/90 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 9 bolas y de ellas 3 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 3/10 · 7/9 = 21/90, y la de sacar dos bolas negras es: 3/10 · 2/9 = 6/90.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.



Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Pero observa más cosas.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$: 7/10 + 3/10 = 1; 6/9 + 3/9 = 1; 7/9 + 2/9 = 1.

$P(E) = P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n) = 1$: 42/90 + 21/90 + 21/90 + 6/90 = 1

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de* 40 *cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos oros?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 10/40 · 10/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *oro* viene *condicionada* por que hayamos sacado un *oro* previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 10 oros sino sólo 9, luego la probabilidad es:

10/40 · 9/39 = 3/52.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $P(B/A) \neq P(B)$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$.

Por tanto la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **es general, ya que si los sucesos son independientes entonces** $P(B/A) = P(B)$ **y por tanto** $P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$.

Resumen:

Suceso contrario:	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$	
Intersección:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	**Si** A **y** B **son independientes** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Unión:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Si** A **y** B **son incompatibles** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Actividades propuestas

20. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un oro* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar oro*, y B = *sacar un oro* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar oro en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar oro* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar oro* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos oros*? ¿Y la de sacar un solo *oro*? ¿Y la de sacar al menos un oro?

21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *oros*" y la de "*no sale ningún oro*".

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A\cap B)$; $P(A\cup B)$; $P(A\cap \overline{B})$; $P(\overline{A}\cap B)$; $P(\overline{A}\cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.

(b) La probabilidad de que no ocurra B.

(c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

(d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 96

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

(a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

(b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B? Selectividad. Curso 96/97

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 1/3$, $P(B) =1/5$ y $P(AUB) = 7/15$, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 97

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$

Calcular: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$. Selectividad. Septiembre 07

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Calcula razonadamente: (a) $P(A\cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$

Nota. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T. Selectividad. Septiembre 2012

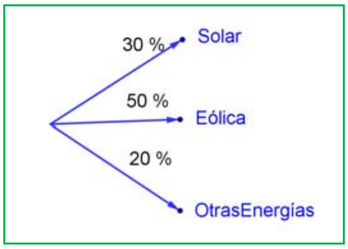
Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Tablas de contingencia y diagramas de árbol

Diagramas de árbol

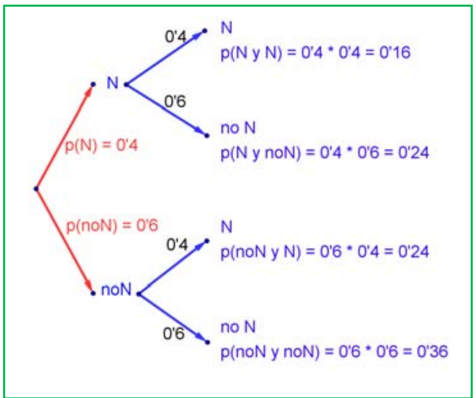
Ejemplo:

- *Se hace un estudio sobre energías alternativas y en un país el 30 % de la energía alternativa es energía solar, el 50 % eólica y el resto a otros tipos de energías. Representa esta situación con un diagrama de árbol.*



Actividades resueltas

- *Se considera que el 40 % de los incendios forestales se deben a negligencias, tomando este dato como una probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno se deba a negligencias?*



Llamamos N al suceso "incendio debido a negligencia" con $P(N)$ = 0'4, y $\overline{N}$ = *noN* al suceso "incendio debido a una causa distinta a una negligencia" con $P(\overline{N})$ = 0'6. Representamos la situación en un diagrama de árbol. La causa de un incendio se considera independiente de la causa del segundo incendio, por lo que tenemos que:

$$P(N, N) = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$$

que es la probabilidad de que tanto en el primer incendio como en el segundo la causa sea una negligencia

$$P(N, \overline{N}) = 0'4 \cdot 0'6 = 0'24$$

que es la probabilidad de que el primer incendio se deba a una negligencia y el segundo no.

$$P(\overline{N}, N) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$$

$$P(\overline{N}, \overline{N}) = 0'6 \cdot 0'6 = 0'36$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia la podemos calcular sumando las probabilidades de (N, N), $(N, \overline{N})$ y $(\overline{N}, N)$ que es 0'16 + 0'24 + 0'24 = 0'64. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario P(no N, no N) = $P(\overline{N}, \overline{N})$ = 0'36 y restarla de 1:

$$P(\text{al menos uno por negligencia}) = 1 - P(\text{ninguno por negligencia}) = 1 - 0'36 = 0'64.$$

Actividades propuestas

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N)$ = 0'4.

30. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0,02 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

31. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0'99; $P(B)$ = 0'96 y $P(C)$ = 0'97. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado mil enfermos del hepatitis C analizando por un procedimiento más barato si las lesiones son graves o leves. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	Diagnóstico incorrecto	Totales
Lesión maligna	412	24	436
Lesión benigna	536	28	564
Totales	948	52	1000

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	Diagnóstico incorrecto (I)	Totales
Lesión maligna (M)	0'412	0'024	0'436
Lesión benigna (B)	0'536	0'028	0'564
Totales	0'948	0'052	1

Actividad resuelta

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0'412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0'024 = $P(M \cap I)$; 0'536 = $P(B \cap C)$; 0'028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0'436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0'436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0'564 = $P(B)$; 0'948 = $P(C)$; 0'052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\bar{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También: $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Actividad resuelta

- *Dada la tabla de contingencia determina si los sucesos A y B son, o no, dependientes*

	A	**No A = $\bar{A}$**	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\bar{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, por tanto: $2/9 = 1/3 \cdot P(B/A)$, lo que nos permite obtener:

$$P(B/A) = (2/9)/(1/3) = 2/3 \approx 0'6667$$

que es distinto de $7/9 \approx 0'7778$ que es la probabilidad de B.

Se puede afirmar que A y B son dependientes ya que $P(B/A) \neq P(B)$.

Actividades propuestas

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0'3		0'4
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0'7		1

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividad resuelta

- *Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.*

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0’4	0’3	0’7
No B = $\overline{B}$	0’2	0’1	0’3
	0’6	0’4	1

Conocemos la $P(A)$ = 0’6, $P(\overline{A})$ = 0’4, $P(B)$ = 0’7 y $P(\overline{B})$ = 0’3.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 0’4; $P(A \cap \overline{B})$ = 0’2; $P(\overline{A} \cap B)$ = 0’3 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0’1.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$ = 0’4 : 0’6 = 4/6 = 2/3.

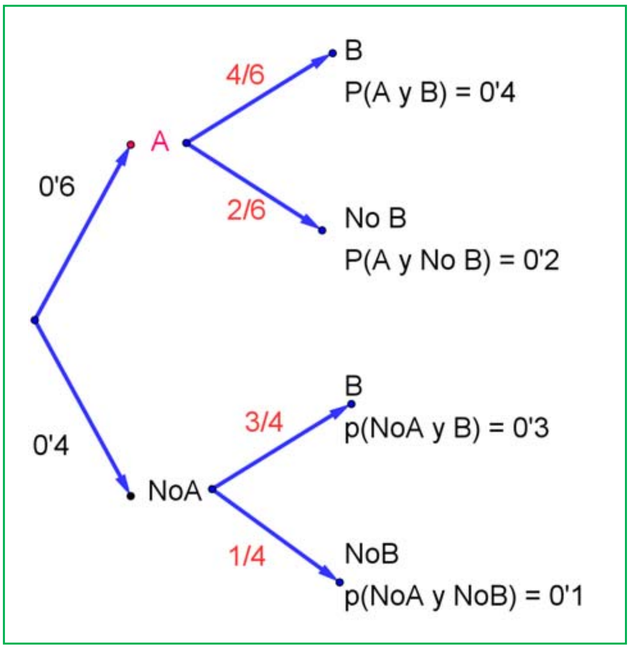
Del mismo modo calculamos:

$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A)$ = 0’2 : 0’6 = 2/6 = 1/3.

$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A})$ = 0’3 : 0’4 = 3/4.

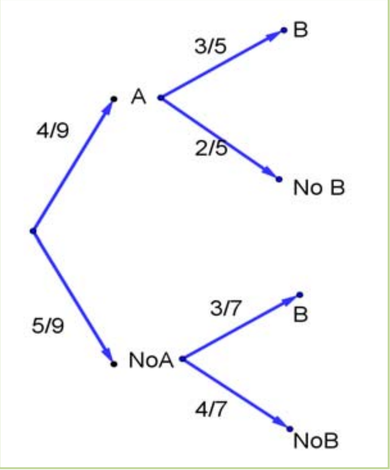
$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A})$ = 0’1 : 0’4 = 1/4.

El árbol es el del margen:



Actividad resuelta

- *Recíprocamente, dado el diagrama de árbol del margen obtener la tabla de contingencia:*



Ahora conocemos $P(A) = 4/9$ y $P(\overline{A}) = 5/9$. Además conocemos:

$$P(B/A) = 3/5;\ P(B/\overline{A}) = 3/7;\ P(\overline{B}/A) = 2/5 \text{ y } P(\overline{B}/\overline{A}) = 4/7.$$

Calculamos, multiplicando:

$$P(A \cap B) = (4/9)\cdot(3/5) = 12/45 = 4/15;$$

$$P(A \cap \overline{B}) = (4/9)\cdot(2/5) = 8/45;$$

$$P(\overline{A} \cap B) = (5/9)\cdot(3/7) = 15/63 = 5/21 \text{ y}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (5/9)\cdot(4/7) = 20/63.$$

Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	12/45	15/63	
No B = $\overline{B}$	8/45	20/63	
	20/45 = 4/9	35/63 = 5/9	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan,

$$P(B) = (12/45) + (15/63) = 159/315 \text{ y}$$

$$P(\overline{B}) = (8/45) + (20/63) = 156/315$$

	A	No A = $\overline{A}$	
B	12/45	15/63	159/315
No B = $\overline{B}$	8/45	20/63	156/315
	4/9	5/9	1

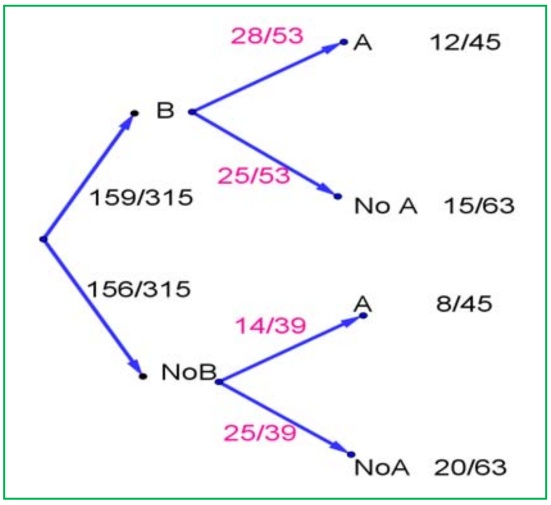
Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:

$$P(A/B) = (12/45)/(159/315) = 28/53;$$

$$P(\overline{A}/B) = (15/63) / (159/315) = 25/53$$

$$P(A/\overline{B}) = (8/45)/(156/315) = 14/39$$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = (20/63)/. (156/315) = 25/39$$



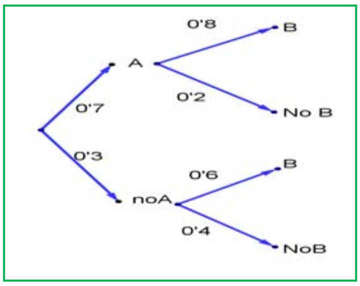
Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'3	0'1	0'4
No B = $\overline{B}$	0'5	0'1	0'6
	0'8	0'2	1

36. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después el otro diagrama de árbol.



37. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo? Selectividad Junio 94

38. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero. Selectividad Septiembre 2013

39. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista? Selectividad Septiembre 2013

40. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A. Selectividad Junio 2013

41. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Teoremas de la probabilidad total y teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "*Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis*". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el *Teorema de Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Previamente vamos a enunciar un teorema que también ya has usado, el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

Antes de comprobar que SÍ sabes resolver problemas tipo *Bayes*, vamos a trabajar un poco la nomenclatura de las probabilidades condicionadas.

- *Escribe con símbolos las siguientes probabilidades:*

a) Sabemos que se ha verificado B, ¿cuál es la probabilidad de A? $\to P(A/B) = P(A \cap B) : P(A)$.

b) Probabilidad de B *y* $A \to P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)$

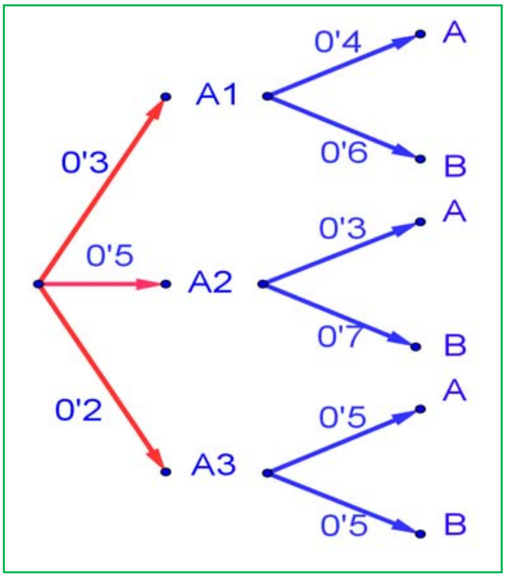
c) Ha salido una bola negra (A), probabilidad de que sea de la segunda urna (B) $\to P\ (B/A)$

d) Probabilidad de B *o* $A \to P(A \cup B) = P(B \cup A)$

e) El accidente ha sido en carretera (A), probabilidad de que haya sido mortal (B) $\to P\ (B/A)$

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Tenemos un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *tales que* $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, *y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:* $P(A_1)$ = 0'3, $P(A_2)$ = 0'5, $P(A_3)$ = 0'2. *Tenemos otros dos sucesos incompatibles,* A *y* B, *de los que conocemos las probabilidades condicionadas* $P(A/A_1)$ = 0'4, $P(B/A_1)$ = 0'6, $P(A/A_2)$ = 0'5, $P(B/A_2)$ = 0'7, $P(A/A_3)$ = 0'5, $P(B/A_3)$ = 0'5. *Queremos calcular* $P(A_1/B)$.



Confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.

Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A / A_1) = 0'3 \cdot 0'4 = 0'12$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$$

$$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A / A_2) = 0'5 \cdot 0'3 = 0'15$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B / A_2) = 0'5 \cdot 0'7 = 0'35$$

$$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A / A_3) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'10$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B / A_3) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'10$$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

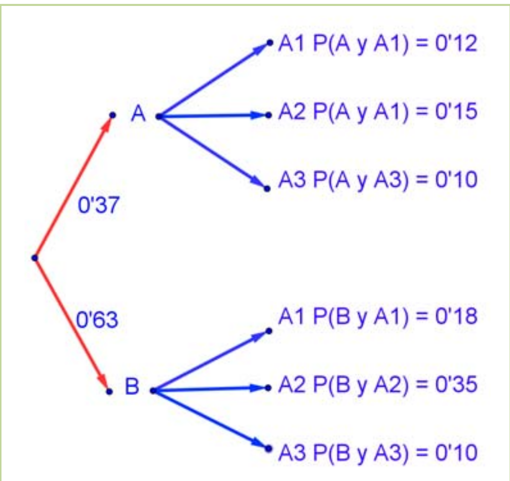
	A_1	A_2	A_2	
A	$P(A_1 \cap A)$ = 0'12	$P(A_2 \cap A)$ = 0'15	$P(A_3 \cap A)$ = 0'10	$P(A)$ = 0'12+0'15+0'1= 0'37
B	$P(A_1 \cap B)$ = 0'18	$P(A_2 \cap B)$ = 0'35	$P(A_3 \cap B)$ = 0'10	$P(B)$= 0'18+0'35+0'10=0'63
	$P(A_1)$ = 0'12 + 0'18 = 0'3	$P(A_2)$ = 0'15 + 0'35 = 0'5	$P(A_3)$ = 0'10 + 0'10 = 0'2	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos: $P(A_1)$ = 0'12 + 0'18 = 0'3; $P(A_2)$ = 0'15 + 0'35 = 0'5 y $P(A_3)$ = 0'10 + 0'10 = 0'2 son las conocidas.

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$$P(A) = 0'12 + 0'15 + 0'1 = 0'37 \text{ y } P(B) = 0'18 + 0'35 + 0'10 = 0'63.$$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0'12/0'37 = 12/37$$

$$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0'15/0'37 = 15/37$$

$$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0'10/0'37 = 10/37$$

$$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0'18/0'63 = 18/63$$

$$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0'35/0'63 = 35/63$$

$$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0'10/0'63 = 10/63$$

La probabilidad pedida $P(A_1/B)$ = 18/63 = 2/7.

Observa que:

Vamos a repasar los cálculos, para comprender mejor los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Si miramos la tabla hemos obtenido $P(B)$ sumando la fila como:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Y las probabilidades de las intersecciones las hemos obtenido multiplicando en el árbol:

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1)$… luego:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + P(B / A_3) \cdot P(A_3).$$

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$

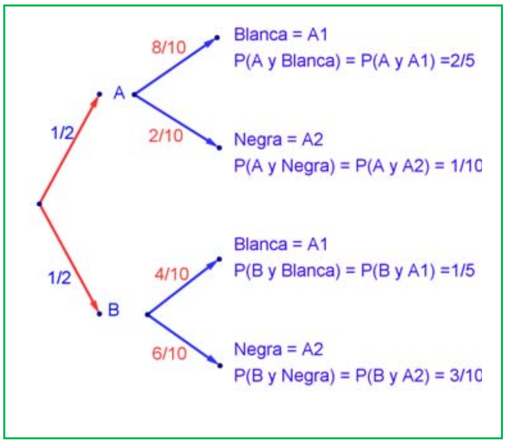
En el segundo árbol hemos obtenido $P(A_1/B)$ dividiendo $P(A_1 \cap B) : P(B)$. Para tener el teorema de Bayes basta sustituir de nuevo la probabilidad de la intersección por el producto, y utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Teorema de *Bayes*: $P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$

- *Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

Debemos calcular $P(\text{Negra}/B)$. Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(A_2/B)$.



Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.

Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(\text{Blanca}/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

P(Negra/A) = $P(A_2/A)$ = 2/10;

P(Blanca/B) = $P(A_1/B)$ = 4/10, y

P(Negra/B) = $P(A_2/B)$ = 6/10.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1)$ = 2/5,

$P(A \cap A_2)$ = 1/10,

$P(B \cap A_1)$ = 1/5,

$P(B \cap A_2)$ = 3/10.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1)$ = 2/5	$P(A \cap A_2)$ = 1/10	$P(A)$ = 2/5 + 1/10 = 1/2
B	$P(B \cap A_1)$ = 1/5	$P(B \cap A_2)$ = 3/10	$P(B)$ = 1/5 + 3/10 = 1/2
	$P(A_1)$ = 2/5 + 1/5 = 3/5	$P(A_2)$ = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5	1

Comprueba cómo se verifica el teorema de la probabilidad total:

$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$

Lo mismo para $P(A)$, P(Blanca) y P(Negra).

Y ahora construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1)$ = 3/5 y $P(A_2)$ = 2/5, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1)$ = (2/5)/(3/5) = 2/3.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B$ / Negra) = $P(B/A_2)$ = 3/4.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Actividades propuestas

42. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

43. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja B tiene 10 bolas con una bola negra. La caja C tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja C.

44. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0'4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar. Selectividad

45. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: Selectividad Junio 2013

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

46. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0'01, de que lo sea uno fabricado en B es 0'02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0'03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B? Selectividad Curso 2012/13

47. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso: Selectividad Curso. 2011/12

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

48. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

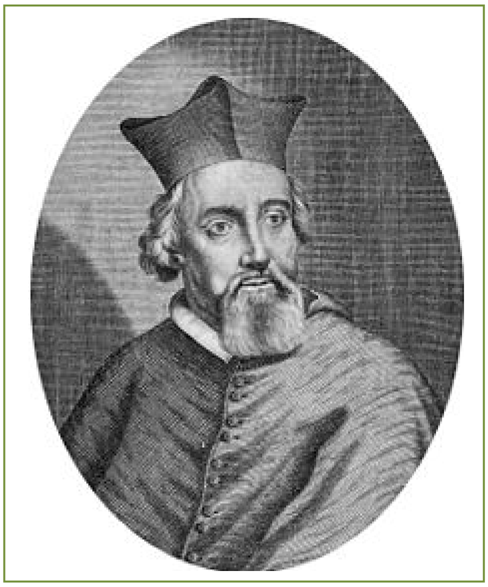
(b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Junio 2012. Opción A, 2 puntos

CURIOSIDADES. REVISTA

Juan Caramuel Lobkowitz

(Madrid, 23 de mayo de 1606 – Vigevano, Lombardía, 8 de septiembre de 1682)



Juan Caramuel fue un personaje extraño y prodigioso, tan fascinante como olvidado. Fue matemático, filósofo, lógico, lingüista y monje cisterciense, que se ganó el sobrenombre de «*Leibniz español*» por la variedad y vastedad de sus conocimientos. Lo traemos aquí, por ser un matemático español del siglo XVII, que ya es raro, y porque nació en Madrid, donde una calle lleva su nombre, así como un centro de salud y un parque.

Era hijo del ingeniero luxemburgués Lorenzo Caramuel y de la bohemia Catalina de Frisia. De inteligencia superdotada, a los doce años componía tablas astronómicas, siendo su padre su primer maestro en esta disciplina.

Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá, ingresó en la Orden Cisterciense en el Monasterio de la Santa Espina (cerca de Medina de Rioseco Valladolid); se formó en filosofía en el monasterio de Montederramo, Orense, y en teología en el de Santa María del Destierro, en Salamanca. Amante de las lenguas, llegó a dominar y hablar una veintena como latín, griego, árabe, siríaco, hebreo, chino, etc..

Fue abad, obispo coadjutor en Maguncia y agente del rey de España en Bohemia.

Obra

Mantuvo activa relación epistolar con los eruditos más célebres de su época. Se rebeló contra la autoridad de Aristóteles y adoptó, por ejemplo, el mecanicismo cartesiano.

Nada escapó a su omnímoda curiosidad, de suerte que por su espíritu enciclopédico ha llegado a llamársele el *Leibniz español*. Fue ante todo un generalista y nunca abordó un tema, cualquiera que este fuese, sin replantearse sus fundamentos teóricos desde todas las perspectivas posibles como un típico *homo universalis*: Caramuel se interesó y escribió sobre la lengua, la literatura en general y el teatro y la poesía en particular, la pedagogía, la criptografía, la filosofía y la teología, la historia y la política de su tiempo, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura, las matemáticas, la física, la astronomía, etc. La obra de Caramuel fue cuantiosa, variada y dispersa (se le atribuyen doscientos sesenta y dos títulos, entre ellos sesenta impresos).

Trabajó en **teoría de la probabilidad**, dando pasos en la dirección correcta hacia la formulación de Pascal, quien seguramente se inspiró en su «*Kybeia, quæ combinatoriæ genus est, de alea et ludis Fortunæ serio disputans*» (1670), un tratadito de veintidós páginas incluso en su *Mathesis biceps* que

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

representa el segundo tratado sobre cálculo de probabilidades de la historia después del tratado de 1656 de Huygens. En el tratado de Caramuel se estudian distintos juegos y el problema de la división de las apuestas.

También se le debe la primera descripción impresa del **sistema binario** en su *Mathesis biceps* en lo que se adelantó treinta años a Leibniz, su más famoso divulgador. Explicó allí el principio general de los números en base n, destacando las ventajas de utilizar bases distintas de la 10 para resolver algunos problemas. Fue también el primer español que publicó una tabla de logaritmos. El sistema de logaritmos que desarrolló fue en base 1009, donde log 1010 = 0 y log 1 = 0.

Otra de sus aportaciones científicas fue, en **astronomía**, un método para determinar la longitud utilizando la posición de la Luna.

En **trigonometría**, propuso un método nuevo para la trisección de un ángulo.

Sobre **arquitectura** escribió en español su *Architectura civil, recta y obliqua* (Vigevano, 1678). Se trata de una obra especulativa y destinada al lector entendido en los temas objeto de debate; por eso es difícil de llevar a la práctica por más que la obra se halle ilustrada con calcografías que el autor agrupa en el último tomo y que él mismo diseñó y tardó más de cuarenta años en hacerlas esculpir y grabar. Su origen se encuentra en una obra suya anterior, la *Mathesis architectonica*, publicada en latín, que constituye la tercera parte de su *Cursus mathematicus* (1667–1668), que tradujo al castellano en una versión ampliada en 1678. Diseñó además la fachada de la catedral de Vigevano (1680), transformando el conjunto renacentista de la Piazza Ducale.

Galileo,

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 < 0{,}5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	P(5) = 1/6. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. 3. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Propiedades de la Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Sucesos dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. P(5 $\cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 = 2/36
Teorema de la probabilidad total	$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$	
Teorema de Bayes	$P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$	

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. El enunciado del teorema de *Bayes* es:

a) $P(A_i / C) = \dfrac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{P(C)} = \dfrac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(C/A_k)\cdot P(A_k)}$

b) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_2)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$

c) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_3)}{P(B)}$

d) $P(A_i / A) = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$

7. En una urna hay 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas. Llamamos A al suceso sacar una bola roja, y B a sacar una bola negra. Los sucesos A y B son:

a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

8. Sacamos una carta de una baraja. Llamamos A al suceso sacar un rey y B a sacar una sota. Los sucesos A y B son:

a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Problemas propuestos en selectividad

1. Junio 94. Opción B (2 puntos)

Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

2. Curso 94/95. Modelo Opción A (2 puntos)

En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 30 estudiantes, y los grupos B y C tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo A ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo B y el 40 por ciento del resto han elegido informática.

(a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática.

(b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al grupo B.

3. Curso 94/95. Modelo Opción B (3 puntos)

Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan es 0'12, la probabilidad de que salga una copa es 0'08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0'84.

(a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.

(b) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

4. Junio 95. Opción A. (3 puntos)

En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:

(a) que sea hombre.

(b) que esté enfermo.

(c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

5. Septiembre 95. Opción B. (3 puntos)

Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:

(a) que los calcetines sean negros.

(b) que los dos calcetines sean del mismo color.

(c) que al menos uno de ellos sea rojo.

(d) que uno sea negro y el otro no.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. Septiembre 95. Opción B. (2 puntos)

Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,

(a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.

(b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

7. Curso 95/96. Modelo Opción A (3 puntos)

En una bolsa hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa B hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de A, anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa B, a continuaciones extrae al azar una bola de B y se anota también su paridad.

(a) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad.

(b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de B correspondan a un número impar.

8. Junio 96. Opción A. (3 puntos)

Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

(a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

9. Junio 96. Opción B. (2 puntos)

De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar:

(a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey.

(b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

10. Septiembre 96. Opción A. (2 puntos)

La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té?

(b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?

(c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

11. Curso 96/97. Modelo Opción A (2,5 puntos)

Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades.

Las unidades pueden tener defectos de dos tipos, A y B. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo A únicamente, 8 unidades con defecto del tipo B únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total:

(a) Cero defectos.

(b) Una unidad con defecto del tipo A y otra con defecto del tipo B, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Curso 96/97. Modelo Opción A (3 puntos)

Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra.

(a) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par.

(b) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

13. Septiembre 97. Opción A. (3 puntos)

Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide:

(a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce.

(b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

14. Curso 97/98. Modelo Opción A (2 puntos)

En dos urnas A y B, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A, si la bola escogida resultó ser blanca?

15. Curso 97/98. Modelo Opción B (2 puntos)

Se dispone de dos urnas A y B, de idéntico aspecto externo. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que B contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reemplazamiento, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que:

(a) Ambas bolas sean rojas.

(b) Las dos bolas sean del mismo color.

16. Junio 98. Opción A. (2 puntos)

Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4.

(b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

17. Septiembre 98. Opción A (3 puntos)

En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de 1/3, si es de dificultad media, 2/5, y si es de escasa dificultad, 3/4.

(a) Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen.

(b) Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

18. Curso98/99. Modelo Opción A. (2puntos)

De una urna con cinco bolas, dos blanca y tres negras, extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) A = Las dos bolas extraídas son del mismo color.

b) B = Extraemos al menos una bola blanca.

19. Curso 98/99.Modelo Opción B. (2 puntos)

Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

20. Junio 99. Opción A. (2 puntos)

Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

21. Junio 99. Opción B. (2 puntos)

Se considera una célula en el instante **t** = 0. En el instante **t** = 1 la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir, con probabilidad 1/4. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo t = 2 cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro.

(a) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo t = 2?

(b) ¿Con qué probabilidad?

22. Septiembre 99. Opción A. (2 puntos)

Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

(a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados.

(b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación).

(c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

23. Septiembre 99. Opción B. (2 puntos)

Se dispone de tres urnas, la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas, y la C con una blanca y cinco rojas.

(a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

(a) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

24. Curso 99/00. Modelo Opción A (2 puntos)

Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0'7 y de que figure a nombre de una mujer es 0'3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0'8 y de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

25. Curso 99/00. Modelo Opción B (2 puntos)

Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

a) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

26. Junio 00. Opción A. (2 puntos)

De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

(b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

27. Junio 00. Opción B. (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio talas que $\boldsymbol{P(A)}$ = 0'6; $\boldsymbol{P(B)}$ = 0'2 y $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 0{,}7$

(a) Calcúlese $P(A\cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.

(b) Calcúlese $P(A\cup B)$

28. Septiembre 00. Opción A. (2 puntos)

La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0'6; la probabilidad de que compre un producto B es 0'5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto B no habiendo comprado el producto A es 0'4.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?

29. Septiembre 00. Opción B. (2 puntos)

Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0'3; de que se remita al bufete B es 0'5 y de que se remita al bufete C es 0'2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0'6; para el bufete B esta probabilidad es 0'8 y para el bufete C es 0,7.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

(b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

30. Curso 00/01. Modelo Opción A. (2 puntos)

En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0'4; la probabilidad de que vote al partido B es 0'35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0'25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0'4; 0'4 y 0'6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

31. Curso 00/01. Modelo Opción B. (2 puntos)

Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos $B1$: La primera bola es blanca, $B2$: La segunda bola es blanca y $B3$: La tercera bola es blanca.

a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no.

b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.

32. Junio 01. Opción A. (2 puntos)

Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

(a) El coche es del modelo C.

(b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel.

(c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.

33. Junio 01. Opción B. (2 puntos)

Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0'01 para A, de 0'02 para B y de 0'03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

34. Septiembre 01. Opción A. (2 puntos)

En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

(a) Los tres escojan la misma película.

(b) Dos escojan la película A y el otro la C.

35. Septiembre 01. Opción B. (2 puntos)

Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

(a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?

(b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

36. Curso 01/02. Modelo Opción A. (2 puntos)

Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

37. Curso 01/02. Modelo Opción B. (2 puntos)

Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0’05 de falsos positivos, esto es, casos en los que estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0’99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0’99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

38. Junio02. Opción A. (2 puntos)

Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras.

a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

39. Junio02. Opción B. (2 puntos)

Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:

a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.

b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

40. Septiembre02. Opción A. (2 puntos)

Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0’3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?
b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento?
c) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?

41. Septiembre02. Opción B. (2 puntos)

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?
b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

42. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0’25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

43. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A)$ = 0'7 $P(B)$ = 0'5 $P(A \cap B) = 0{,}45$

Calcular a) $P(B/A)$ b) $P(A^c \cap B^c) =$ A^c representa el suceso complementario del suceso A.

44. Junio 03. Opción A (2 puntos)

El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) Las tres personas votan al candidato A.

(b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.

(c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

45. Junio 03. Opción B (2 puntos)

De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

(a) Tres reyes.

(b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

(c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

46. Septiembre 03. Opción A (2 puntos)

Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0'99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0'05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0'99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

47. Curso 03/04. Opción A (2 puntos)

En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor.

(a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor?

(b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?

48. Curso 03/04. Opción B (2 puntos)

En una clase, el 20% de los alumnos aprueba lengua, el 30% aprueba matemáticas y el 40% aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12% aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7% aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua'? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

49. Junio 04. Opción A (2 puntos)

Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0'55 y por E_2 es 0'45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

50. Junio 04. Opción B (2 puntos)

En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

51. Septiembre 04. Opción A (2 puntos)

Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.

(a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores.

(b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

52. Septiembre 04. Opción B (2 puntos)

En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa poblaci6n el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol.

(a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.

(b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

53. Curso 04/05. Opción B (2 puntos)

En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

(a) No curse la opción Científico-Tecnológica.

(b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

54. Curso 04/05. Opción A (2 puntos)

Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0’6, la empata con probabilidad 0’3 y la pierde con probabilidad 0’1. El jugador juega dos partidas.

(a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio.

(b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

55. Junio 05. Opción A (2 puntos)

Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

(a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

(b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

56. Junio 05. Opción B (2 puntos)

En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno”, "Obtener al menos un dos”, "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4”.

57. Septiembre 05. Opción A (2 puntos)

En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

(a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

(b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

58. Septiembre 05. Opción B (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $\quad P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ $\quad P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\frac{3}{4}$ Calcular:

(a) $P(B/A)$. (b) $P(\overline{A}/B)$ Nota: $\overline{A}$ representa el suceso complementario del suceso A.

59. Curso 05/06. Opción A (2 puntos)

Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0'6 \qquad P(B) = 0'2 \qquad P(A \cap B) = 0'12.$$

(a) Calcular las probabilidades de los sucesos(A U B) y (A/(A U B)).

(b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

60. Curso 05/06. Opción B (2 puntos)

Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

61. Junio 06. Opción A (2 puntos)

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0'25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

62. Junio 06. Opción B (2 puntos)

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

63. Septiembre 06. Opción A (2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0'2 %, mientras que dicha proporción es 0'5 % en la segunda y 0'1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

64. Septiembre 06. Opción B (2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

65. Junio 07. Opción A (2 puntos)

Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

66. Junio 07. Opción B (2 puntos)

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

(a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

(b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

67. Septiembre 07. Opción A (2 puntos)

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0'01 para la marca A; 002 para la marca B y 0'03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

(a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

(b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

68. Junio 2008-Opción A, 2 puntos

En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

69. Junio 2008-Opción B, 2 puntos

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A)$ = 1/4, $P(B)$ = 1/3, $P(AUB)$ = 1/2

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$.*Nota*.- La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

70. Septiembre 2008-Opción A, 2 puntos

Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0'46; la probabilidad de que practique B es igual a 0'33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0'15.

a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

71. Septiembre 2008-Opción B, 2 puntos

Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3.

a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

72. Junio 2009 Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:
$P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cup B \cup C) = 2/3$; $P(A \cap B \cap C) = 0$: $P(A/B) = P(C/A) = ½$.

(a) Calcúlese $P(C \cap B)$. (b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.

73. Junio 2009 Opción B, 2 puntos

Para la construcción de un luminoso de feriase dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0'01 si la bombilla es blanca, es igual a 0'02 si la bombilla es azul e igual a 0'03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

74. Septiembre 2009. Opción A, 2 puntos

En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

75. Septiembre 2009 Opción B, 2 puntos

La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0'55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0'40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0'25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.

76. Junio 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos

Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.

b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

77. Junio 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'2 y $P(B)$ = 0'4.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A\ \ B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese. b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.

c) Si $P(A/B)$ = 0, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.

d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.

78. Junio 2010 Fase específica. Opción A, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'5; $P(B)$ = 0'4 ; $P(A \cap B)$ = 0'1.

Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$. Nota. $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

79. Junio 2010 Fase específica. Opción B, 2 puntos

Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

80. Septiembre 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A/C) \geq P(B/C),\ P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C}).$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

81. Septiembre 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos

Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: *La economía de un cierto país está en recesión.*

Suceso B: *Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión*.

Se sabe que $P(A)$ = 0'005; $P(B/A)$ = 0'95; $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 0'96.

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

82. Septiembre 2010 Fase específica Opción A, 2 puntos

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?

b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

83. Septiembre 2010 Fase específica Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A)$ = 0'6. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos:

a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$.

c) $B \subset A$ y $P(B)$ = 0'3. d) $P(A \cap B)$ = 0'1.

84. Curso 2010/11. Modelo. Opción A, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a 7/12. Se sabe además que $P(A/B)$ = 1/2.

a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B. b) Calcula la probabilidad de que ocurra A.

85. Curso 2010/11. Modelo. Opción B, 2 puntos

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0'2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'3. Se elige al azar un habitante de la población.
a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente.
b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

86. Junio 2011. Opción A, 2 puntos

En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0'4, de molinos eólicos con probabilidad 0'26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0'12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.

87. Junio 2011. Opción B, 2 puntos

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0'5, de que sea un camión es 0'3 y de que sea una motocicleta es 0'2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0'06 para un coche, 0'02 para un camión y 0'12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar.

a) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.

88. Septiembre 2011. Opción A, 2 puntos

Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0'49 y de nazca un niño es 0'51. Una familia tiene dos hijos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

89. Septiembre 2011. Opción B, 2 puntos

Se disponen de tres urnas A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

90. Septiembre 2011. Opción A, (Reserva) 2 puntos

La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

91. Septiembre 2011. Opción B, (Reserva) 2 puntos

Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
No apto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

92. Curso 2011/12. Modelo. Opción A, 2 puntos

Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

93. Junio 2012. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B)$ = 0'1 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$ $P(A|B)$ = 0'5.Calcula: (a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B} / \overline{A})$

94. Septiembre 2012. Opción A, 2 puntos.

Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

(a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

(b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

95. Curso 2012/13. Modelo. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.
b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B.
Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

Autor: David Miranda
Revisores: Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF