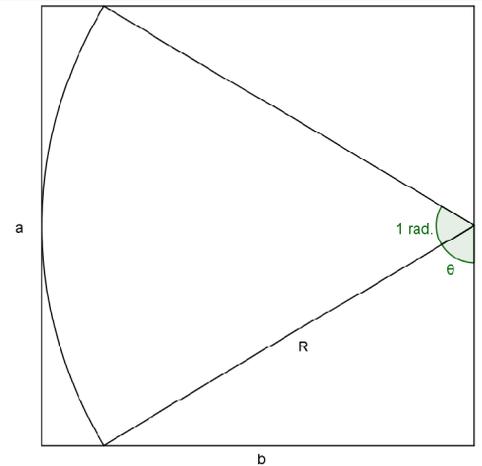


## Resolución de Triángulos - Soluciones

1. Un rectángulo circunscribe simétricamente a un sector circular tal como muestra el dibujo adjunto. Si el ángulo del sector es de 1 radián y su área es de  $7 \text{ cm}^2$ , halla en milímetros las dimensiones del rectángulo.



$$\text{Area} = \frac{R^2 \theta}{2} \rightarrow \frac{R^2 \cdot 1}{2} = 7 \rightarrow R = \sqrt{14} \Rightarrow \boxed{\text{Base} = \sqrt{14} \approx 37 \text{ mm.}}$$

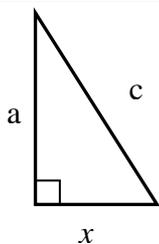
$$2\theta + 1 = \pi \rightarrow \theta = \frac{\pi - 1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{a/2}{R} \rightarrow a = 2R \cos \theta = 2\sqrt{14} \cos \frac{\pi - 1}{2} \approx 3,6 \Rightarrow \boxed{\text{Altura} \approx 36 \text{ mm.}}$$

2. a) Llamando  $x$  a la base de un triángulo rectángulo de  $18 \text{ cm}^2$  de área, demuestra que su perímetro sería

$$P = \frac{x^2 + 36 + \sqrt{x^4 + 1296}}{x}$$

- b) Representa gráficamente con Geogebra esta función, ¿qué dimensiones tendría el triángulo con menor perímetro? ¿Existiría un triángulo con perímetro máximo?



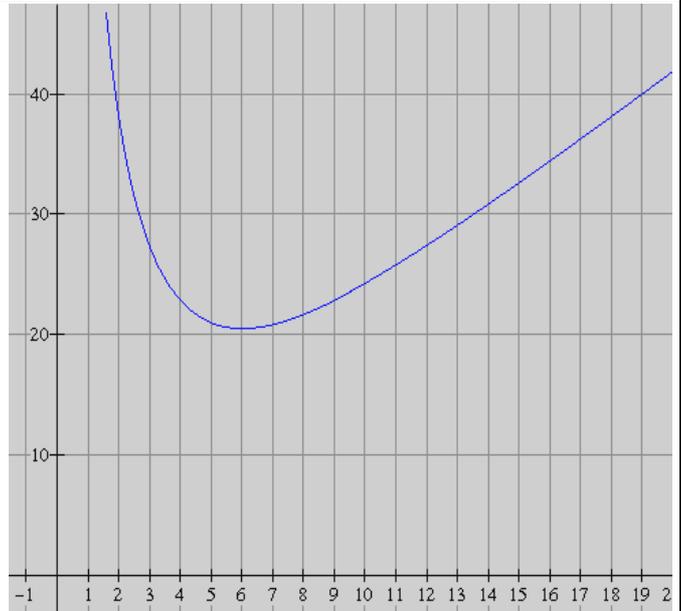
$$\text{Area} = \frac{a \cdot x}{2} = 18 \Rightarrow a = \frac{36}{x} \text{ será la altura}$$

$$\text{La Hipotenusa: } c = \sqrt{x^2 + \left(\frac{36}{x}\right)^2}$$

El perímetro entonces será:

$$\begin{aligned} P &= x + \frac{36}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{36}{x}\right)^2} = \frac{x^2 + 36}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1296}{x^2}} = \\ &= \frac{x^2 + 36}{x} + \sqrt{\frac{x^4 + 1296}{x^2}} = \frac{x^2 + 36}{x} + \frac{\sqrt{x^4 + 1296}}{x} = \\ &= \frac{x^2 + 36 + \sqrt{x^4 + 1296}}{x} \end{aligned}$$

Esta función está representada gráficamente a la derecha.

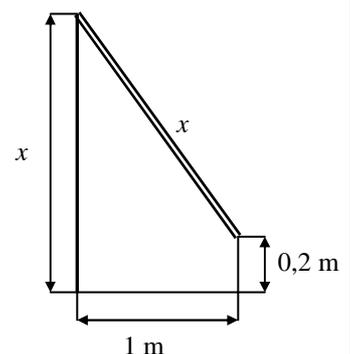


En la gráfica se observa que el perímetro crecería indefinidamente tanto para valores de  $x$  cercanos a cero como para valores inmensos de  $x$ , por lo que no existe en concreto ningún triángulo rectángulo de  $18 \text{ cm}^2$  de área cuyo perímetro sea el mayor posible. Sin embargo, sí existe un triángulo de  $18 \text{ cm}^2$  de área cuyo perímetro es el menor posible, es el que tiene  $x = 6 \text{ cm}$  de base y  $6 \text{ cm}$  de altura, cuyo perímetro es: **Perímetro mínimo** =  $12 + \sqrt{72} \approx 20,49 \text{ cm}$ .

3. Pedro quiere subir hasta el borde de una tapia, para ello ha cogido una escalera, pero no le sirve pues tiene la misma altura que la tapia. Como es muy ingenioso ha cogido un cajón de  $20 \text{ cm}$  de alto y lo ha colocado a  $1 \text{ m}$  de distancia del pie de la tapia. Si al poner sobre el cajón la escalera ésta llega al borde de la tapia, ¿qué altura tiene la tapia?

Se puede hallar la altura de la tapia mediante el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1^2 + (x - 0,2)^2 \rightarrow x^2 = 1 + x^2 - 0,4x + 0,04 \rightarrow 0,4x = 1,04 \Rightarrow x = \boxed{2,60 \text{ m}}$$



4. El cuerpo del dibujo, que recuerda a un helado de cucurucho, está formado por una semiesfera situada sobre un cono. Halla el volumen y la superficie total de dicho cuerpo.

$$\operatorname{sen} 11,5^\circ = \frac{R}{20} \rightarrow R = 20 \cdot \operatorname{sen} 11,5^\circ \approx 3,99 \text{ cm}$$

$$\operatorname{cos} 11,5^\circ = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot \operatorname{cos} 11,5^\circ \approx 19,60 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen Cono} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3,99^2 \cdot 19,60}{3} \approx 326 \text{ cm}^3$$

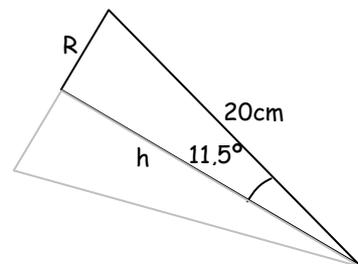
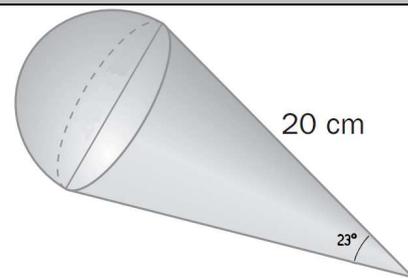
$$\text{Volumen Semi-Esfera} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3,99^3 \approx 133 \text{ cm}^3$$

$$\text{Superficie Lateral Cónica} = \pi R g = \pi \cdot 3,99 \cdot 20 \approx 251 \text{ cm}^2$$

$$\text{Superficie Semi-Esfera} = 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3,99^2 \approx 99,9 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen Total} = 326 + 133 = \boxed{459 \text{ cm}^3}$$

$$\text{Superficie Total} = 251 + 99,9 = \boxed{350 \text{ cm}^2}$$



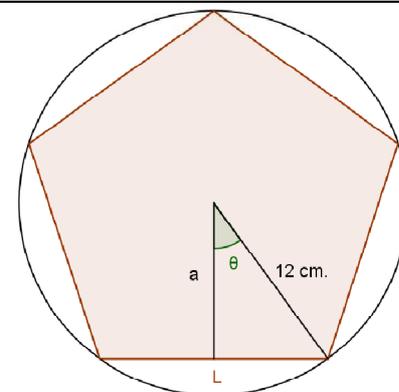
5. Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 12cm de radio.

$$\vartheta = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{L/2}{12} \rightarrow L = 24 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ \approx 14,1$$

$$\operatorname{cos} 36^\circ = \frac{a}{12} \rightarrow a = 12 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ \approx 9,71$$

$$\text{Area} = \frac{5L \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 14,1 \cdot 9,71}{2} \approx \boxed{342 \text{ cm}^2}$$



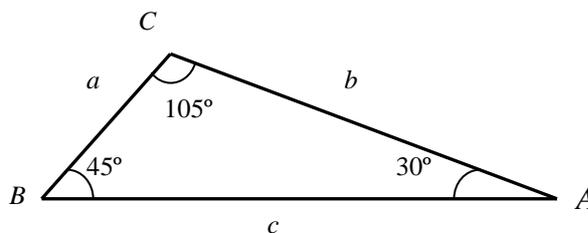
6. Halla los lados de un triángulo de 18 cm<sup>2</sup> de área sabiendo que dos de sus ángulos son A = 30° y B = 45°.

$$\text{Area} = \frac{c \cdot b \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2} \rightarrow 18 = \frac{c \cdot b \cdot 1/2}{2} \rightarrow c = \frac{72}{b}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{72/b}{\sin 105^\circ} \rightarrow b^2 = \frac{72 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$\rightarrow b = \sqrt{\frac{72 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}} \approx 7,26 \rightarrow c = \frac{72}{7,26} \approx 9,92$$

$$\frac{7,26}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ} \rightarrow a \approx 5,13$$



A = 30°	a = 5,13 cm
B = 45°	b = 7,26 cm
C = 105°	c = 9,92 cm

7. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC = 46° y BCA = 53°. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

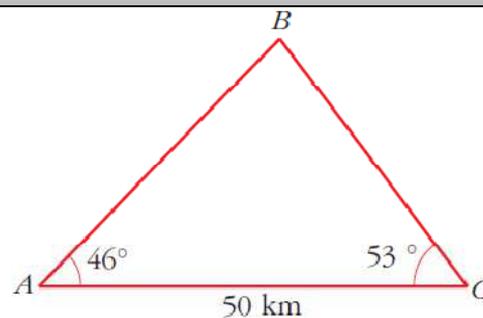
$$B = 180^\circ - 53^\circ - 46^\circ = 81^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 81^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 53^\circ}$$

$$a = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 46^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} \approx 36,4$$

$$c = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 53^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} \approx 40,4$$

A = 46°	a = 36,4 km
B = 81°	b = 50 km
C = 53°	c = 40,4 km



8. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de  $45^\circ$ . Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de  $30^\circ$ . Halla la altura de la antena.

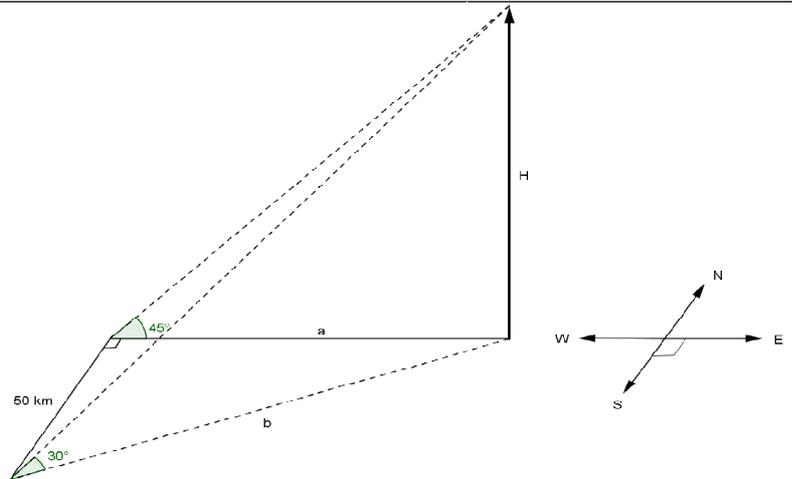
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{H}{a} \rightarrow 1 = \frac{H}{a} \Rightarrow a = H$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{b} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{H}{a} \Rightarrow a = H\sqrt{3}$$

$$b^2 = 50^2 + a^2 \rightarrow (H\sqrt{3})^2 = 2500 + H^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3H^2 = 2500 + H^2 \rightarrow 2H^2 = 2500 \rightarrow$$

$$\rightarrow H^2 = 1250 \Rightarrow H = \boxed{25\sqrt{2} \approx 35,4 \text{ m}}$$

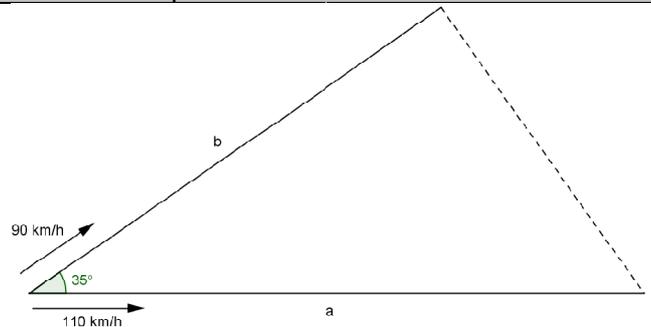


9. Salen desde un mismo punto dos coches con trayectorias rectas que forman un ángulo de  $35^\circ$ . El primer coche va a 110 Km/h y el segundo a 90 Km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 7 minutos?

$$t = 7 \text{ min.} \rightarrow a = 110 \cdot 7 / 60 \approx 12,9 \text{ km}$$

$$t = 7 \text{ min.} \rightarrow b = 90 \cdot 7 / 60 = 10,5 \text{ km}$$

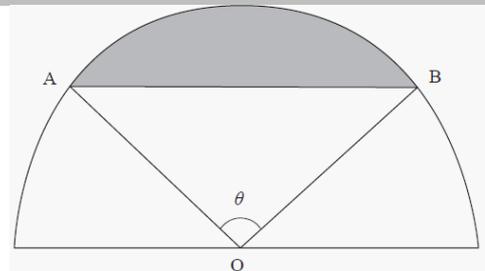
$$x = \sqrt{12,9^2 + 10,5^2 - 2 \cdot 12,9 \cdot 10,5 \cdot \cos 35^\circ} \approx \boxed{7,36 \text{ km}}$$



10. La siguiente figura muestra un semicírculo de 20 cm de diámetro y centro O y dos puntos A y B, tales que  $\widehat{AOB} = \theta$ , donde  $\theta$  está expresado en radianes.

a) Compruebe que el área de la región sombreada se puede expresar como  $50\theta - 50\operatorname{sen}\theta$

b) Con ayuda de la calculadora gráfica, halle el valor de  $\theta$  para el cual el área de la región sombreada es igual a la mitad del área de la región no sombreada, con una aproximación de cuatro cifras significativas.



$$\text{Area} = \text{Area Sector} - \text{Area Triángulo} = \frac{10^2 \theta}{2} - \frac{10 \cdot 10 \operatorname{sen}\theta}{2} = 50 \cdot \theta - 50 \operatorname{sen}\theta$$

$$50\theta - 50 \operatorname{sen}\theta = \frac{\pi \cdot 10^2 - (50 \cdot \theta - 50 \operatorname{sen}\theta)}{2} \rightarrow 50\theta - 50 \operatorname{sen}\theta = 50\pi - 25\theta + 25 \operatorname{sen}\theta \rightarrow$$

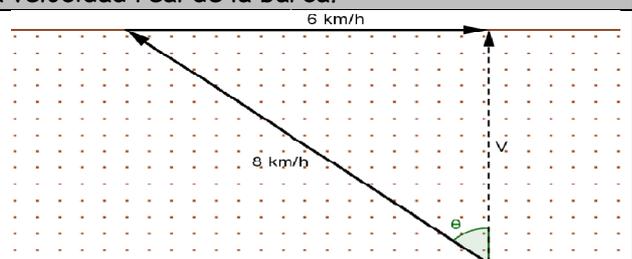
$$\rightarrow 75\theta = 50\pi + 75 \operatorname{sen}\theta \rightarrow 3\theta = 2\pi + 3 \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Resolviendo la ecuación con la calculadora gráfica: } \theta \approx \boxed{1,969 \text{ rad}}$$

11. Una barca puede navegar en agua tranquila a la velocidad de 8 Km/h. Si la corriente del río lleva una velocidad de 6 Km/h ¿bajo qué ángulo deberá cortar la barca a la corriente para que la dirección de su movimiento sea perpendicular a la corriente? ¿Cuál es la velocidad real de la barca?

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{6}{8} \Rightarrow \theta \approx \boxed{49^\circ}$$

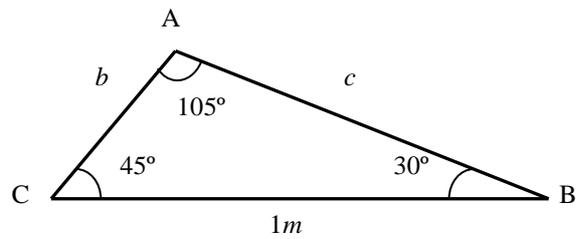
$$V = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} \approx \boxed{5,29 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$$



12. Halla el área del triángulo ABC sabiendo que  $a = 1$  m,  $B = 30^\circ$  y  $C = 45^\circ$

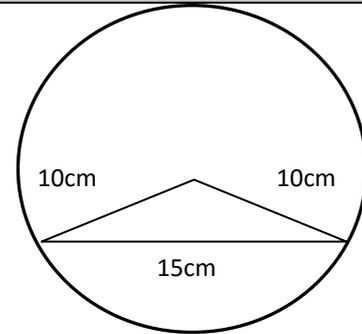
$$\frac{1}{\operatorname{sen}105^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen}45^\circ} \rightarrow c \approx 0,732 \text{ m}$$

$$\text{Area} = \frac{c \cdot a \cdot \operatorname{sen}30^\circ}{2} = \frac{0,732 \cdot 1 \cdot 0,5}{2} \approx \boxed{0,183 \text{ m}^2}$$



13. En una circunferencia de 10cm de radio se unen dos puntos con una cuerda de 15cm. ¿Cuánto vale el ángulo central?

$$\cos \alpha = \frac{10^2 + 10^2 - 15^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} \Rightarrow \cos \alpha = -0,125 \Rightarrow \alpha \approx \boxed{97^\circ}$$

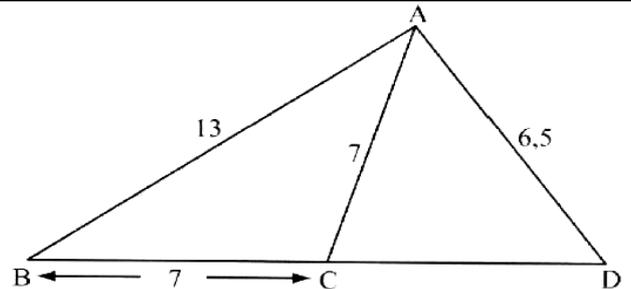


14. La siguiente figura muestra un triángulo ABD, donde  $AB = 13$  cm,  $AD = 6,5$  cm y D es un ángulo agudo. Sea C un punto perteneciente a la recta BD, tal que  $BC = AC = 7$  cm.

- Halle la medida del ángulo ACB
- Halle la medida del ángulo CAD

$$\cos \hat{ACB} = \frac{7^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 7} \Rightarrow \hat{ACB} \approx \boxed{136^\circ}$$

$$\hat{ACD} = 180^\circ - \hat{ACB} \approx 44^\circ$$



$$\frac{7}{\operatorname{sen} \hat{ADC}} = \frac{6,5}{\operatorname{sen} 44^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{ADC} = \frac{7 \cdot \operatorname{sen} 44^\circ}{6,5} \approx 0,742 \rightarrow \begin{cases} \hat{ADC} \approx 48^\circ \\ \hat{ADC} \approx 132^\circ \text{ que no considero porque el ángulo del dibujo es agudo} \end{cases}$$

$$\hat{CAD} = 180^\circ - 48^\circ \approx \boxed{88^\circ}$$

15. En el triángulo ABC,  $A = 30^\circ$ ,  $a = 5$  cm y  $c = 7$  cm. Halle la diferencia entre las áreas de los dos triángulos ABC que se pueden construir con los datos proporcionados.

$$5^2 = b^2 + 7^2 - 2b \cdot 7 \cos 30^\circ \Rightarrow b^2 - 7\sqrt{3} \cdot b + 24 = 0$$

$$b = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{(7\sqrt{3})^2 - 96}}{2} = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{51}}{2} = \begin{cases} 9,63 \\ 2,49 \end{cases}$$

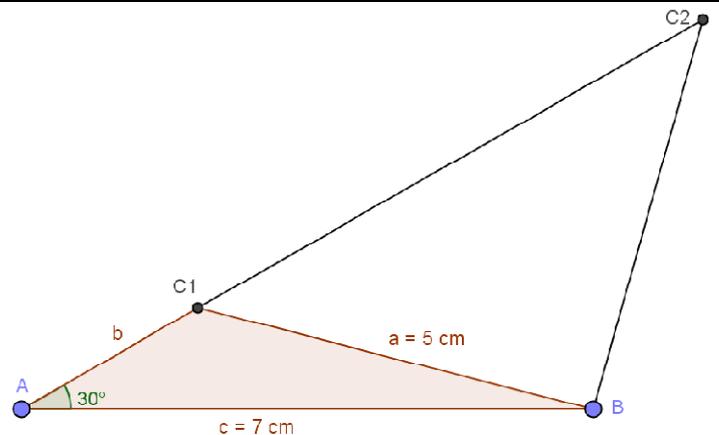
$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{2} = \frac{7b}{4}$$

$$\text{Area}_2 - \text{Area}_1 = \frac{7 \cdot 9,63}{4} - \frac{7 \cdot 2,49}{4} \approx \boxed{12,5 \text{ cm}^2}$$

También:

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{7}{\operatorname{sen} C} \rightarrow \operatorname{sen} C = 0,7 \Rightarrow \begin{cases} C_2 \approx 44^\circ \rightarrow B_2 \approx 180^\circ - 30^\circ - 44^\circ = 106^\circ \\ C_1 \approx 136^\circ \rightarrow B_1 \approx 180^\circ - 30^\circ - 136^\circ = 14^\circ \end{cases}$$

$$\text{Area}_2 - \text{Area}_1 = \text{Area}_{BC_1C_2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \operatorname{sen}(106^\circ - 14^\circ)}{2} \approx 12,5 \text{ cm}^2$$

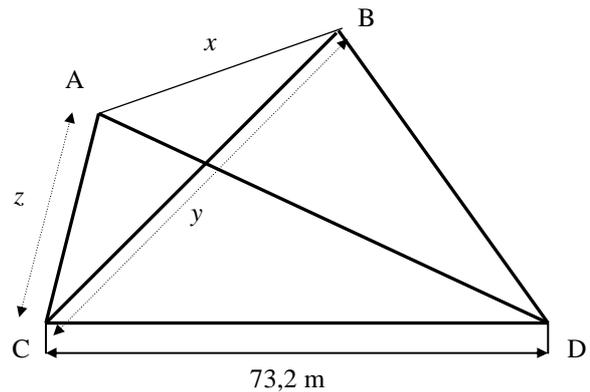


16. Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados por la longitud 73,2m. Suponiendo que los ángulos  $\angle ACD = 80^\circ 12'$ ;  $\angle BCD = 43^\circ 31'$ ;  $\angle BDC = 32^\circ$  y  $\angle ADC = 23^\circ 14'$ , determina la distancia AB.

$$\frac{73,2}{\text{sen}76^\circ 34'} = \frac{z}{\text{sen}23^\circ 14'} \Rightarrow z = \frac{73,2 \cdot \text{sen}23^\circ 14'}{\text{sen}76^\circ 34'} = 29,69$$

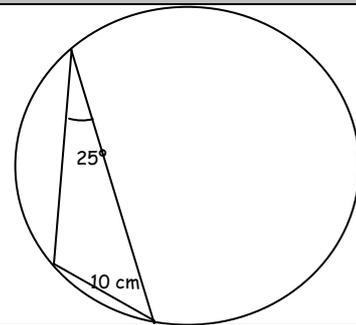
$$\frac{73,2}{\text{sen}104^\circ 29'} = \frac{y}{\text{sen}32^\circ} \Rightarrow y = \frac{73,2 \cdot \text{sen}32^\circ}{\text{sen}104^\circ 29'} = 40,06$$

$$x = \sqrt{z^2 + y^2 - 2zy \cdot \cos 36^\circ 41'} \approx \boxed{24,1m}$$



17. El triángulo de la figura está inscrito en un círculo, halla su radio..

$$\frac{10}{\text{sen}25^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{5}{\text{sen}25^\circ} \approx \boxed{11,8cm}$$



18. Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de  $17^\circ$ . Aproximadamente a 25,9m hacia la orilla en dirección al árbol, el ángulo es de  $31^\circ$ . Calcula la altura del árbol.

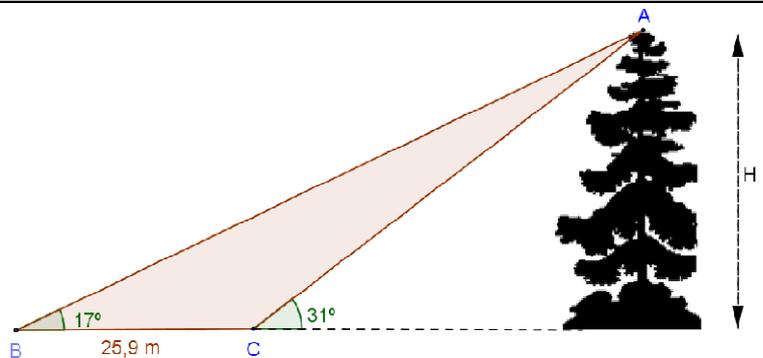
$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$$

$$\widehat{CAB} = 180^\circ - 17^\circ - 149^\circ = 14^\circ$$

$$\frac{25,9}{\text{sen}14^\circ} = \frac{AC}{\text{sen}17^\circ} \Rightarrow AC = \frac{25,9 \cdot \text{sen}17^\circ}{\text{sen}14^\circ} \approx 31,3$$

$$\text{sen}31^\circ = \frac{H}{AC} \Rightarrow H = 31,3 \cdot \text{sen}31^\circ \approx \boxed{16,1m}$$

También:



Llamando L a la distancia desde C hasta la base del árbol:

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg}31^\circ &= \frac{L}{H} \Rightarrow L = H \cdot \text{ctg}31^\circ \\ \text{ctg}17^\circ &= \frac{L}{H + 25,9} \Rightarrow L = (H + 25,9) \cdot \text{ctg}17^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow H \cdot \text{ctg}31^\circ = (H + 25,9) \cdot \text{ctg}17^\circ \Rightarrow H \cdot \text{ctg}31^\circ - H \cdot \text{ctg}17^\circ = 25,9 \cdot \text{ctg}17^\circ \Rightarrow$$

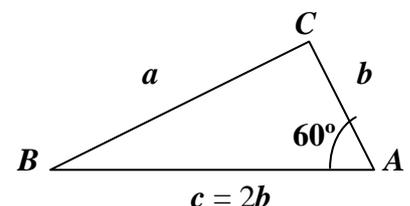
$$\rightarrow H = \frac{25,9}{\text{ctg}31^\circ - \text{ctg}17^\circ} \approx 16,1m$$

19. Uno de los lados de un triángulo es doble del otro y el ángulo comprendido mide  $60^\circ$ . Halla los otros dos ángulos.

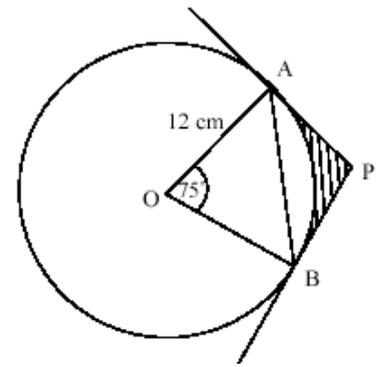
$$a^2 = b^2 + (2b)^2 - 2b(2b) \cos 60 = 3b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{\text{sen} A} = \frac{c}{\text{sen} C} \Rightarrow \text{sen} C = \frac{c \text{sen} 60^\circ}{a} = \frac{2b\sqrt{3}/2}{b\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow C = 90^\circ \rightarrow B = 30^\circ$$

Se trata de un triángulo rectángulo



20. La siguiente figura muestra un círculo de centro  $O$  y radio 12 cm. La cuerda  $AB$  determina un ángulo central de  $75^\circ$ . Las tangentes a la circunferencia en  $A$  y en  $B$  se encuentran en  $P$ .



- Halla el área del sector  $OAB$
- Halla el área del triángulo  $OAB$
- Demuestra que  $AB = 12\sqrt{2(1 - \cos 75^\circ)}$
- Halla el área del triángulo  $ABP$
- Halla el área de la región sombreada

$$a) 75^\circ = \frac{75 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad} \rightarrow \text{Area Sector} = \frac{12^2 \cdot 5\pi / 12}{2} = \boxed{30\pi \text{ cm}^2}$$

$$b) \text{Area Triángulo } OAB = \frac{12 \cdot 12 \cdot \text{sen}75^\circ}{2} \approx \boxed{69,5 \text{ cm}^2}$$

$$c) AB = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 75^\circ} = \sqrt{12^2(1 + 1 - 2 \cdot \cos 75^\circ)} = 12\sqrt{2(1 - \cos 75^\circ)} \approx \boxed{14,6 \text{ cm}}$$

$$d) 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \rightarrow \hat{O}AB = \hat{O}BA = \frac{105}{2} = 52,5^\circ \rightarrow \hat{B}AP = \hat{A}BP = 90^\circ - 52,5^\circ = 37,5^\circ \rightarrow \hat{A}PB = 180^\circ - 2 \cdot 37,5^\circ = 105^\circ$$

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot PB \cdot \cos 105^\circ$$

$$\text{Como } AP = PB \rightarrow AB^2 = AP^2 + AP^2 - 2 \cdot AP \cdot AP \cdot \cos 105^\circ \rightarrow AB^2 = AP^2(2 - 2 \cdot \cos 105^\circ) \rightarrow$$

$$\rightarrow AP^2 = \frac{AB^2}{2 - 2 \cdot \cos 105^\circ} \Rightarrow AP = \frac{AB}{\sqrt{2 - 2 \cdot \cos 105^\circ}} = \frac{14,6}{\sqrt{2 - 2 \cdot \cos 105^\circ}} \approx 9,20 \text{ cm}$$

$$\text{Area Triángulo } ABP = \frac{AB \cdot AP \cdot \text{sen} \hat{B}AP}{2} = \frac{14,6 \cdot 9,20 \cdot \text{sen} 37,5^\circ}{2} \approx \boxed{40,9 \text{ cm}^2}$$

$$e) \text{Area Sombreada} = \text{Area Triángulo } OAB + \text{Area Triángulo } ABP - \text{Area Sector} \approx \boxed{16,2 \text{ cm}^2}$$

21. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados miden 13m, 14m y 15m.

Solo necesitamos hallar uno de sus ángulos:

$$\cos A = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} \rightarrow \cos A = 0,51 \rightarrow A = 59,49^\circ$$

$$\frac{14}{\sin 59,49^\circ} = 2r \Rightarrow r \approx \boxed{8,13 \text{ m}}$$

