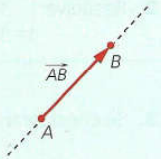
QUÉ DEBES SABER

Producto escalar, vectorial y mixto

Vectores en el espacio

Un **vector** en el espacio, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en B. Dicho vector queda determinado por:

- **Módulo:** es la longitud del segmento AB. Se escribe $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección:** es la recta que pasa por A y B. Dos vectores tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o rectas paralelas.
- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir, de fijar cuál de los puntos es el origen y cuál es el extremo.



- Llamamos **vector nulo**, $\vec{0}$, al vector en el que coinciden su origen y su extremo y, por tanto, su módulo es cero. Este vector no tiene dirección.
- Si el vector tiene módulo 1, diremos que es un **vector unitario**.
- Dos **vectores** son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección (los vectores están situados sobre la misma recta o rectas paralelas) y el mismo sentido.

Coordenadas y módulo de un vector

- En el sistema de referencia canónico, las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del punto extremo menos las del origen:

$$\left.\begin{array}{l} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

- En este sistema de referencia, si $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su módulo es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Dependencia e independencia lineal de vectores

Dada una colección de n vectores en el espacio $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$:

- Son **linealmente independientes** cuando el rango de la matriz que forman sus coordenadas es n.
- Son **linealmente dependientes** cuando el rango de la matriz que forman sus coordenadas es estrictamente menor que n.

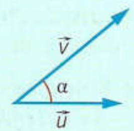
Dos vectores son **paralelos** si son linealmente dependientes, es decir, cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ es paralelo a } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ cuando } \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}.$$

Producto escalar

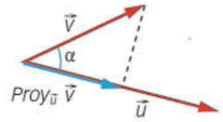
Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número real que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$



Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, equivale al producto del módulo de cualquiera de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él.



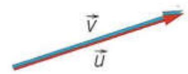
Expresión en coordenadas

En el sistema de referencia canónico, el producto escalar de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Propiedades

- El producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$



$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0° = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = |\vec{v}|^2$$

- El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si, y solo si, los vectores son perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 90° \rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares.}$$

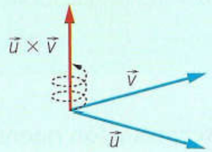
QUÉ DEBES SABER

Producto escalar, vectorial y mixto

Producto vectorial

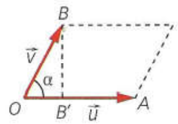
El **producto vectorial** de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ que tiene los siguientes elementos:

- **Módulo:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha$, siendo α el menor ángulo entre los vectores.
- **Dirección:** la perpendicular de cualquier plano generado por ambos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido:** el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.



Interpretación geométrica

El módulo del producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es igual al área del paralelogramo que definen ambos vectores.



Expresión en coordenadas

En el sistema de referencia canónico, el producto vectorial de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Propiedades

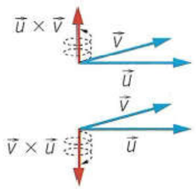
- El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

$$|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot sen\ 0° = |\vec{u}|^2 \cdot 0 = 0$$

- El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector nulo si, y solo si, los vectores son paralelos.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha = 0 \rightarrow sen\ \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0° \\ \alpha = 180° \end{cases}$$

- Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos.



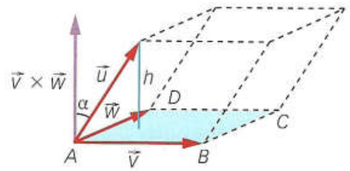
Producto mixto

Se llama **producto mixto** de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se escribe $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Interpretación geométrica

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo definido por ellos.



Expresión en coordenadas del producto mixto

En el sistema de referencia canónico, el producto mixto de tres vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

- El producto mixto cambia de signo si se permutan dos de los vectores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

- El producto mixto de tres vectores no nulos es cero si, y solo si, los vectores son linealmente dependientes. Es decir, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$
$$\vec{u} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$$

$\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

CALCULAR VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Determina el número máximo de vectores linealmente independientes entre los siguientes, y elige vectores que lo sean.

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 3) \qquad v_2 = (0, 1, -2) \qquad \vec{v}_3 = (1, 3, 0) \qquad \vec{v}_4 = (0, 2, -4)$$

PRIMERO. Hallamos el rango de la matriz de las coordenadas de los vectores.

Calculamos el rango haciendo ceros.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix} = \text{Rargo}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3$$

SEGUNDO. Identificamos los vectores de las filas que son distintas de cero.

Como el rango es 3, el número máximo de vectores independientes es 3.

Son independientes v_1, v_2 y v_3 porque representan las filas de la matriz que son distintas de cero.

CALCULAR VECTORES PERPENDICULARES A OTRO VECTOR

Dado el vector $\vec{u} = (1, -1, 2)$, calcula los vectores perpendiculares a él.

PRIMERO. Escribimos la condición de perpendicularidad para un vector genérico $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (1, -1, 2) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow (1, -1, 2) \cdot (v_1, v_2, v_3) = v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$$

SEGUNDO. Resolvemos la ecuación despejando una incógnita en función de las otras.

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \rightarrow v_1 = v_2 - 2v_3$$

Haciendo $v_2 = \lambda$ y $v_3 = \mu$:

$$\text{Solución: }\begin{cases} v_1 = \lambda - 2\mu \\ v_2 = \lambda \\ v_3 = \mu \end{cases}$$

TERCERO. Escribimos la solución en forma vectorial y la descomponemos en suma de dos vectores, siendo cada uno dependiente de un parámetro.

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda \quad 2\mu, \lambda, \mu) = (\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu)$$

CUARTO. Sacamos factor común a cada parámetro, obteniendo dos vectores que formar una base de los vectores perpendiculares al dado.

$$(\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(-2, 0, 1) \rightarrow \mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$$

Todo vector perpendicular a $\vec{u}$ es combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$.

CALCULAR EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO CONOCIDOS SUS VÉRTICES

Halla el área encerrada en el triángulo cuyos vértices son:

$$A(-1, 1, 1) \qquad B(3, 0, 2) \qquad C(1, 2, 3)$$

PRIMERO. Calculamos dos vectores que tengan como origen uno de los puntos y extremos en los otros dos.

Tomamos, por ejemplo, como origen A y extremos B y C:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -1, 1) \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 2)$$

SEGUNDO. Hallamos el producto vectorial de los dos vectores.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = (-3, -6, 6)$$

TERCERO. Determinamos el módulo del producto vectorial (área del paralelogramo), y calculamos el área del triángulo dividiendo este módulo por 2.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-3, -6, 6)| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{9}{2}$$

CALCULAR EL VOLUMEN DE UN TETRAEDRO CONOCIDOS SUS VÉRTICES

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

$$A(-1, 2, 1) \qquad B(3, 0, 2) \qquad C(1, 2, 3) \qquad D(-1, 0, 1)$$

PRIMERO. Calculamos tres vectores que tengan origen en uno de los puntos y extremo en los otros tres.

Tomamos, por ejemplo, como origen A y extremos B, C y D:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1) \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) \qquad \overrightarrow{AD} = (0, -2, 0)$$

SEGUNDO. Hallamos el producto mixto de los tres vectores.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix} = -4 + 16 = 12$$

TERCERO. Aplicamos la fórmula para el cálculo del volumen del tetraedro.

$$\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

QUÉ DEBES SABER

Rectas y planos

Ecuaciones de la recta

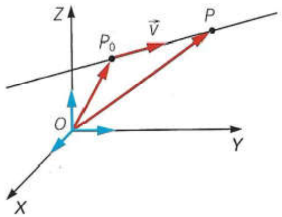
Ecuación vectorial

$$OP = OP_0 + t\vec{v}, \text{ donde } \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto de la recta} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición del punto } P_0 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \text{Vector director de la recta} \\ t & \text{Cualquier número real} \end{cases}$$

Expresándolo en coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3)$

Ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{array}\right\}, \text{ siendo } t \text{ un número real.}$$



Ecuación continua

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ecuación implícita (intersección de dos planos)

$$\left.\begin{array}{l} v_2x - v_1y + (v_1y_0 - v_2x_0) = 0 \\ v_3x - v_1z + (v_1z_0 - v_3x_0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones del plano

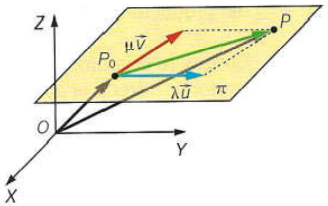
Ecuación vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto del plano} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición} \\ \left.\begin{array}{l}\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\end{array}\right\} & \text{Vectores directores del plano} \\ \lambda, \mu & \text{Dos números reales} \end{cases}$$

En coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$

Ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}, \text{ siendo } \lambda \text{ y } \mu \text{ números reales.}$$

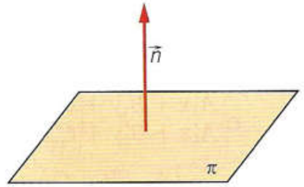


Ecuación general o implícita

$Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C y D son números reales.

Vector normal a un plano

Dado el plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$, el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular al plano π. A este vector se le llama **vector normal** del plano.



Vector director de una recta expresada por dos planos

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Posiciones relativas de dos rectas

$$r: \begin{cases} P(a, b, c) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(a', b', c') \\ \vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3) \end{cases}$$

Estas rectas en el espacio pueden ser:

Coincidentes

Las dos rectas son la misma.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ son proporcionales.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 1$$

Secantes

Las dos rectas se cortan en un solo punto.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix} = 2$$

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ no son proporcionales y el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 2$$

Paralelas

Las dos rectas no tienen puntos comunes, pero están en el mismo plano.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \end{pmatrix} = 1$$

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ son proporcionales, pero no son proporcionales a $\overrightarrow{PQ}$.

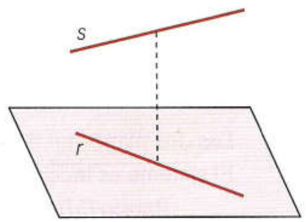
$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 2$$

Rectas que se cruzan

Las dos rectas no tienen puntos comunes ni están en el mismo plano.

Los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}'$ y $\overrightarrow{PQ}$ forman una base.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ a' - a & b' - b & c' - c \end{pmatrix} = 3$$



QUÉ DEBES SABER

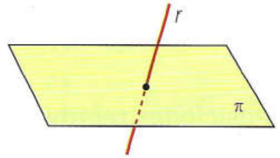
Rectas y planos

Posiciones relativas de recta y plano

$$r: \begin{rcases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0 \end{rcases} \qquad \pi: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

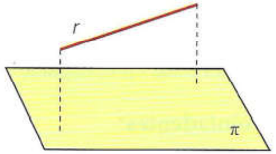
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1' & B_1' & C_1' \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Secantes



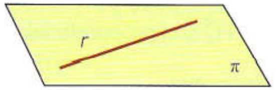
La recta y el plano se cortan en un punto.
El sistema es compatible determinado.
Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$

Paralelos



La recta y el plano no se cortan.
El sistema es incompatible.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

Recta contenida en el plano



La recta está contenida en el plano.
El sistema es compatible indeterminado.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

Posiciones relativas de dos planos

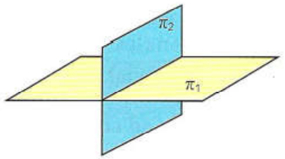
$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Coincidentes

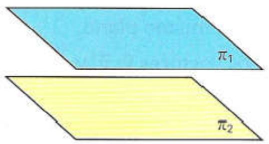
La intersección es todo el plano.
El sistema es compatible indeterminado.
Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 1$

Secantes



La intersección de los planos es una recta.
El sistema es compatible indeterminado.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

Paralelos

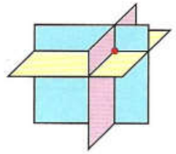


Los dos planos no tienen puntos en común.
El sistema es incompatible.
Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

Posiciones relativas de tres planos

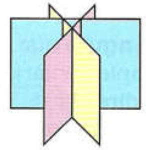
$$\begin{matrix} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow M^* = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Se cortan en un punto



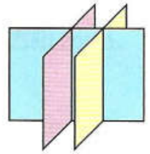
El sistema es compatible determinado.
Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$

Se cortan dos a dos



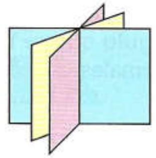
Ninguno de los planos es paralelo a otro.
El sistema es incompatible.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

Dos planos paralelos cortan al tercero



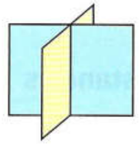
Dos de los planos son paralelos.
El sistema es incompatible.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

No coincidentes y se cortan en una recta



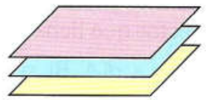
El sistema es compatible indeterminado.
No hay ecuaciones proporcionales.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

Dos planos coincidentes cortan al tercero



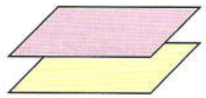
El sistema es compatible indeterminado.
Dos de las ecuaciones son proporcionales.
Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

Tres planos paralelos



El sistema es incompatible.
Ninguna de las ecuaciones es proporcional.
Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

Dos planos coincidentes y paralelos al tercero



El sistema es incompatible.
Dos ecuaciones son proporcionales y la otra no.
Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

Tres planos coincidentes

El sistema es compatible indeterminado.
Sus ecuaciones son proporcionales.
Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 1$

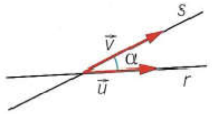
QUÉ DEBES SABER

Rectas y planos

Ángulos

Ángulo entre dos rectas

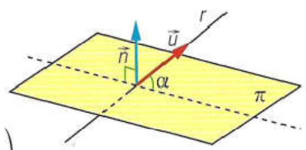
El **ángulo que forman dos rectas**, r y s, es el menor ángulo que se puede formar entre sus vectores directores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se calcula como:



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Ángulo entre una recta y un plano

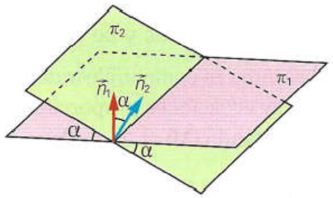
El **ángulo** que forman una **recta** r y un **plano** π es el complementario del menor ángulo formado por el vector director de la recta $\vec{u}$ y el vector normal al plano $\vec{n}$. Se calcula como:



$$\cos (90° - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \rightarrow \alpha = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo** que forman **dos planos**, π_1 y π_2, es el menor ángulo que se forma entre sus respectivos vectores normales, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$. Se calcula como:



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

Distancias

Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ en el espacio es el módulo del vector que tiene por extremos dichos puntos.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

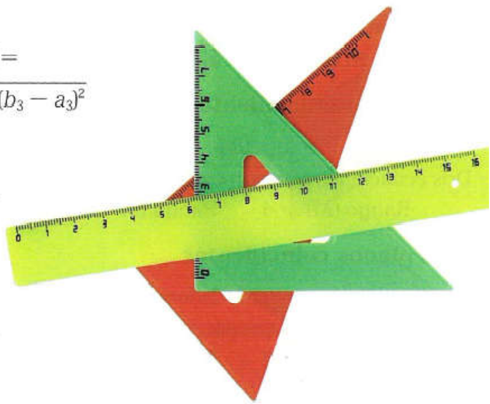
$$d(A, B) = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distancia de un punto a una recta

La **distancia de un punto** P **a una recta** r se puede calcular con la fórmula:

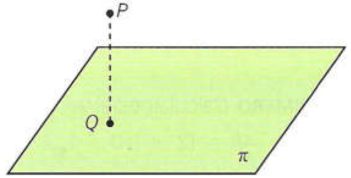
$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|}$$

siendo $\vec{v}_r$ el vector director de la recta y A un punto cualquiera de la recta.



Distancia de un punto a un plano

La **distancia de un punto** P **a un plano** π es la distancia entre el punto P y su proyección sobre el plano π.



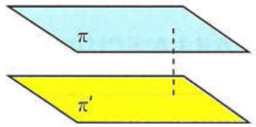
Conocida la ecuación del plano:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

la distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ al plano π se puede calcular mediante la expresión:

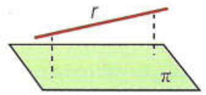
$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos



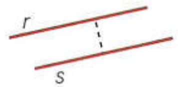
- Si los planos son coincidentes o se cortan, la distancia es cero.
- Si los planos son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto P de uno de los planos al otro.

Distancia entre una recta y un plano



- Si la recta y el plano tienen algún punto en común, la distancia es cero.
- Si la recta y el plano son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto P de la recta al plano π.

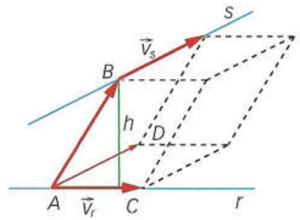
Distancia entre rectas coincidentes, secantes o paralelas



- Si las rectas son secantes o son coincidentes, la distancia entre ambas rectas es cero.
- Si las rectas son paralelas, la distancia entre ellas es igual a la distancia entre cualquier punto de una a la otra.

Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos rectas**, r y s, que se cruzan se calcula con la fórmula:



$$d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

Siendo: $\vec{v}_r \rightarrow$ vector director de la recta r

$A \rightarrow$ punto de la recta r

$\vec{v}_s \rightarrow$ vector director de la recta s

$B \rightarrow$ punto de la recta s

HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 0, 3)$.

PRIMERO. Calculamos el vector definido por los dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 0-1, 3-1) = (1, -1, 2) = \vec{v}$$

SEGUNDO. Escribimos la ecuación de la recta, conocidos un punto y el vector.

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \xrightarrow[\vec{v}=(1,-1,2)]{A(1,1,1)} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \rightarrow \text{Ecuación continua}$$

HALLAR LA ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS

Calcula la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(3, 0, 0)$.

PRIMERO. Calculamos dos vectores a partir de los tres puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 0)$$

SEGUNDO. Desarrollamos el determinante que expresa su ecuación general e igualamos a cero.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(y+1) + z - 2z - 2(x-1) \rightarrow 2x - 4y + z - 6 = 0$$

COMPROBAR SI VARIOS PUNTOS ESTÁN ALINEADOS

Determina si los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(5, 2, -2)$ están alineados.

PRIMERO. Definimos la ecuación de la recta que determinan dos de esos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2, 0-1, 2-0) = (-3, -1, 2)$$

$A(2, 1, 0)$

Ecuación continua de $r \rightarrow \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$

SEGUNDO. Comprobamos si el resto de puntos pertenecen a esa recta.

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \xrightarrow{C(5,2,-2)} \frac{5-2}{-3} = \frac{2-1}{-1} = \frac{-2}{2} \rightarrow C \subset r$$

Por tanto, los tres puntos están alineados.

COMPROBAR SI VARIOS PUNTOS SON COPLANARIOS

Determina si $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, -2, -1)$ y $D(0, 3, -2)$ son coplanarios.

PRIMERO. Definimos la ecuación del plano que determinan tres de esos puntos.

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -3, -1) \end{array} \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7x - 7y + 7z - 7 = 0$$

SEGUNDO. Comprobamos si el resto de puntos pertenecen al plano.

$$7x - 7y + 7z - 7 = 0 \xrightarrow{D(0,3,-2)} 7\cdot 0 - 7\cdot 3 + 7\cdot(-2) - 7 \neq 0 \rightarrow D \notin \pi$$

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

CALCULAR UNA RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

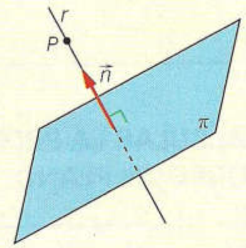
Halla la recta perpendicular al plano π: $2x - 3y + z - 1 = 0$ que pasa por $P(0, 2, 0)$.

PRIMERO. Hallamos un vector normal al plano.

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

SEGUNDO. Calculamos la ecuación de la recta que tiene por vector director el vector normal al plano y pasa por el punto pedido.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (2, -3, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$$



CALCULAR UN PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

Halla el plano perpendicular a la recta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ que contiene a $P(0, 2, 0)$.

PRIMERO. Hallamos un vector director de la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (2, -3, 1)$.

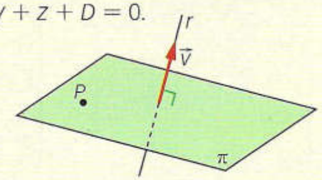
SEGUNDO. Calculamos la ecuación del plano que tiene por vector normal ese vector director.

$\vec{v} = (2, -3, 1) \rightarrow$ La ecuación del plano es de la forma $\pi: 2x - 3y + z + D = 0$.

TERCERO. Imponemos la condición de que el punto pertenezca al plano para calcular el valor de la constante D.

$$P(0, 2, 0) \rightarrow 2\cdot 0 - 3\cdot 2 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 6$$

La ecuación del plano es: $\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$.



CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

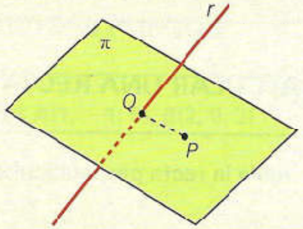
PRIMERO. Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (2, 1, -1) \\ \text{Punto: } & P(0, 0, 0) \end{array}\right\} \to 2(x-0) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \to \pi: 2x + y - z = 0$$

SEGUNDO. La proyección ortogonal es el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \left.\begin{array}{r} x - 2y = -5 \\ x + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{13}{6} \\ z = \dfrac{5}{6} \end{array}\right. \to Q\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$$



CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre π: $2x - 3y + z - 2 = 0$.

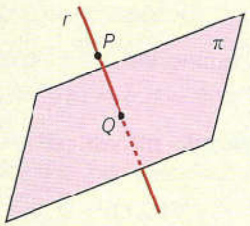
PRIMERO. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (2, -3, 1) \\ \text{Punto: } & P(0, 0, 0) \end{array}\right\} \to r: \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-0}{-3} = \dfrac{z-0}{1}$$

SEGUNDO. La proyección ortogonal es el punto de corte del plano con la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1} \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{array}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{-3}{7} \\ z = \dfrac{1}{7} \end{array}\right. \to Q\left(\dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$$



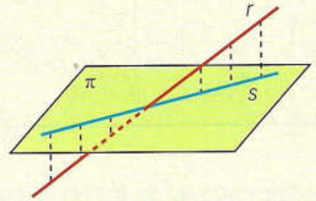
CALCULAR LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Determina la proyección ortogonal de la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$$

sobre el plano de ecuación π: $2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.



Vector director de r: $\vec{u} = (2, 1, -1)$

Vector normal a π: $\vec{n} = (2, -3, 1)$

Punto de r: $P(1, 3, 0)$

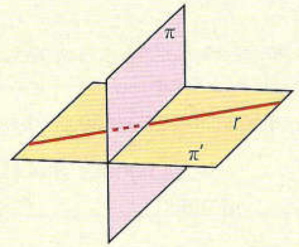
SEGUNDO. Calculamos el plano π' que pasa por el punto P y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal al plano π.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi': -2(x-1) - 4(y-3) - 8z = 0$$

$$\pi': x + 2y + 4z - 7 = 0$$

El plano π' contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

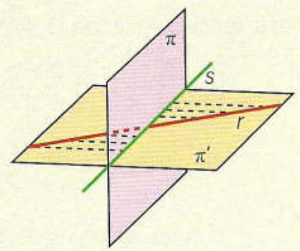


TERCERO. Hallamos el corte de los dos planos, π y π', que es la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 4z - 7 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \dfrac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Luego la ecuación de la recta es:

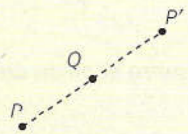
$$s: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \dfrac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$



CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO

Halla el simétrico del punto $P(0, 2, -1)$ respecto del punto $Q(-1, 0, 2)$.

PRIMERO. Si el simétrico es $P'(a, b, c)$, hallamos el punto medio del segmento PP'.



$$P(0, 2, -1) \text{ y } P'(a, b, c) \rightarrow \text{Punto medio: } \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right)$$

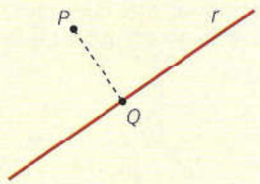
SEGUNDO. Resolvemos el sistema que se forma al igualar el punto medio al punto Q.

$$(-1, 0, 2) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(-2, -2, 5).$$

CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA RECTA

Halla el simétrico del punto $P(2, 1, 0)$ respecto de la recta r: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

PRIMERO. Hallamos la proyección ortogonal, Q, del punto P sobre la recta r.

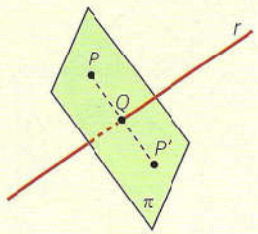


La ecuación del plano perpendicular es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (1, 2, 1) \\ \text{Punto: } & P(2, 1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: x + 2y + z - 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1} \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x - z = -2 \\ x + 2y + z = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{7}{3} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

SEGUNDO. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección Q.



$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Resolviendo: $a = -\dfrac{4}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{14}{3}$

El punto simétrico de P respecto de r es $P'\left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$.

CALCULAR EL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UN PLANO

Halla el simétrico del punto $P(2, 1, 0)$ respecto del plano π: $2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Hallamos la proyección ortogonal, Q, del punto P sobre el plano π.

La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P(2, 1, 0)$ es:

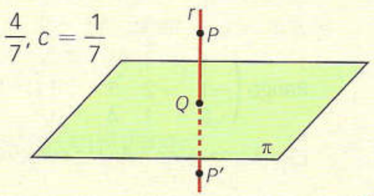
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal: } & \vec{n} = (2, -3, 1) \\ \text{Punto: } & P(2,1,0) \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-0}{1}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{1} \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Operando}} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 8 \\ x - 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{7} \\ y = \dfrac{11}{14} \\ z = \dfrac{1}{14} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{15}{7}, \frac{11}{14}, \frac{1}{14}\right)$$

SEGUNDO. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección Q.

$$\left(\frac{15}{7}, \frac{11}{14}, \frac{1}{14}\right) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow a = \frac{16}{7}, b = \frac{4}{7}, c = \frac{1}{7}$$

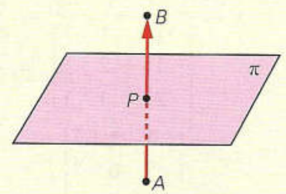
El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'\left(\dfrac{16}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$.



CALCULAR EL PLANO DE SIMETRÍA DE DOS PUNTOS

Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas $A(3, 4, 1 + 2a)$ y $B(-3, 0, 1 - 2a)$. Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto a un plano π. Halla de forma razonada la ecuación de dicho plano.

PRIMERO. Se hallan el punto medio del segmento AB y el vector $\overrightarrow{AB}$.



$$P\left(\frac{3-3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{1+2a+1-2a}{2}\right) \rightarrow P(0, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3-3, 0-4, 1-2a-(1+2a)) = (-6, -4, -4a)$$

SEGUNDO. Se calcula la ecuación del plano que pasa por el punto P y cuyo vector normal es $\overrightarrow{AB}$.

La ecuación del plano es: $-6x - 4y - 4az + D = 0$

$$\left.\begin{array}{l} P(0, 2, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (-6, -4, -4a) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: -6(x-0) - 4(y-2) - 4a(z-1) = 0$$

$$\pi: -6x - 4y - 4az + 4a + 8 = 0$$