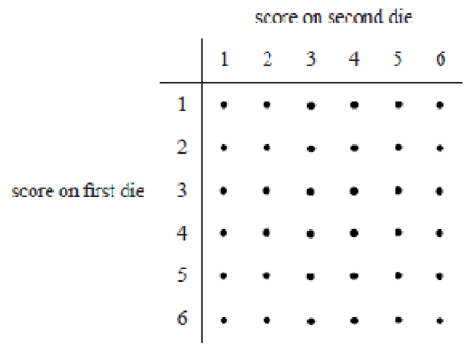
COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

<table>
<tr>
<td>1
Muestra
2014
P1</td>
<td>
Two standard six-sided dice are tossed. A diagram representing the sample space is shown below.



Let X be the sum of the scores on the two dice.

(a) (i) Find $P(X = 6)$.

(ii) Find $P(X > 6)$.

(iii) Find $P(X = 7 \mid X > 6)$.

(b) Elena plays a game where she tosses two dice.

If the sum is 6, she wins 3 points.
If the sum is greater than 6, she wins 1 point.
If the sum is less than 6, she loses k points.

Find the value of k for which the game is fair
</td>
</tr>
<tr>
<td>2

Muestra
2014
P2</td>
<td>
The probability of obtaining heads on a biased coin is 0.4. The coin is tossed 600 times.

(a) (i) Write down the mean number of heads.

(ii) Find the standard deviation of the number of heads.

(b) Find the probability that the number of heads obtained is less than one standard deviation away from the mean.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3

Mayo
2014
TZ1
P1</td>
<td>
Celeste wishes to hire a taxicab from a company which has a large number of taxicabs. The taxicabs are randomly assigned by the company.

The probability that a taxicab is yellow is 0.4.
The probability that a taxicab is a Fiat is 0.3.
The probability that a taxicab is yellow or a Fiat is 0.6.

Find the probability that the taxicab hired by Celeste is **not** a yellow Fiat.
</td>
</tr>
</table>

4

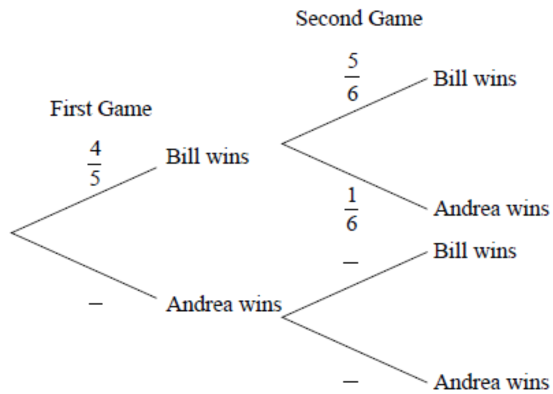
Mayo 2014 TZ1 P1

Bill and Andrea play two games of tennis. The probability that Bill wins the first game is $\frac{4}{5}$.

If Bill wins the first game, the probability that he wins the second game is $\frac{5}{6}$.

If Bill loses the first game, the probability that he wins the second game is $\frac{2}{3}$.

(a) **Copy** and complete the following tree diagram. *(Do **not** write on this page.)*



(b) Find the probability that Bill wins the first game and Andrea wins the second game.

(c) Find the probability that Bill wins at least one game.

(d) Given that Bill wins at least one game, find the probability that he wins both games.

5

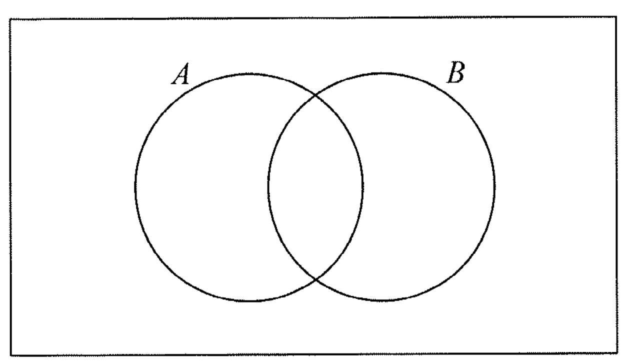
Mayo 2014 TZ2 P2

Sean A y B sucesos independientes, donde $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ y $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A \cap B)$.

(b) Halle $\mathrm{P}(A \cup B)$.

(c) (i) En el siguiente diagrama de Venn, sombree la región que representa $A \cap B'$.

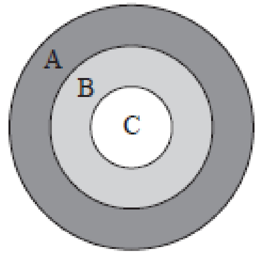


(ii) Halle $\mathrm{P}(A \cap B')$.

6

Noviembre 2014 TZ2 P1

La siguiente figura muestra un tablero que está dividido en tres regiones, A, B y C.



Un juego consiste en que un jugador lanza un dardo al tablero. La siguiente tabla muestra la probabilidad de que el dardo dé en cada una de las regiones.

Región	A	B	C
Probabilidad	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$

(a) Halle la probabilidad de que el dardo **no** dé en el tablero.

El jugador va ganando puntos, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Región	A	B	C	No da en el tablero
Puntos	0	q	10	-3

(b) Sabiendo que el juego es justo, halle el valor de q.

7

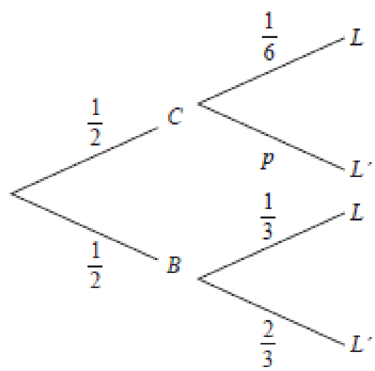
Noviembre 2014 TZ2 P1

Adam va al colegio en coche (C) o en bicicleta (B). Cada día, existe la misma probabilidad de que vaya en coche que de que vaya en bicicleta.

La probabilidad de que llegue tarde (L) al colegio es igual a $\frac{1}{6}$ si va en coche.

La probabilidad de que llegue tarde al colegio es igual a $\frac{1}{3}$ si va en bicicleta.

Esta información aparece representada en el siguiente diagrama de árbol.



(a) Halle el valor de p.

(b) Halle la probabilidad de que Adam viaje en coche y llegue tarde al colegio.

(c) Halle la probabilidad de que Adam llegue tarde al colegio.

(d) Sabiendo que Adam ha llegado tarde al colegio, halle la probabilidad de que haya viajado en coche.

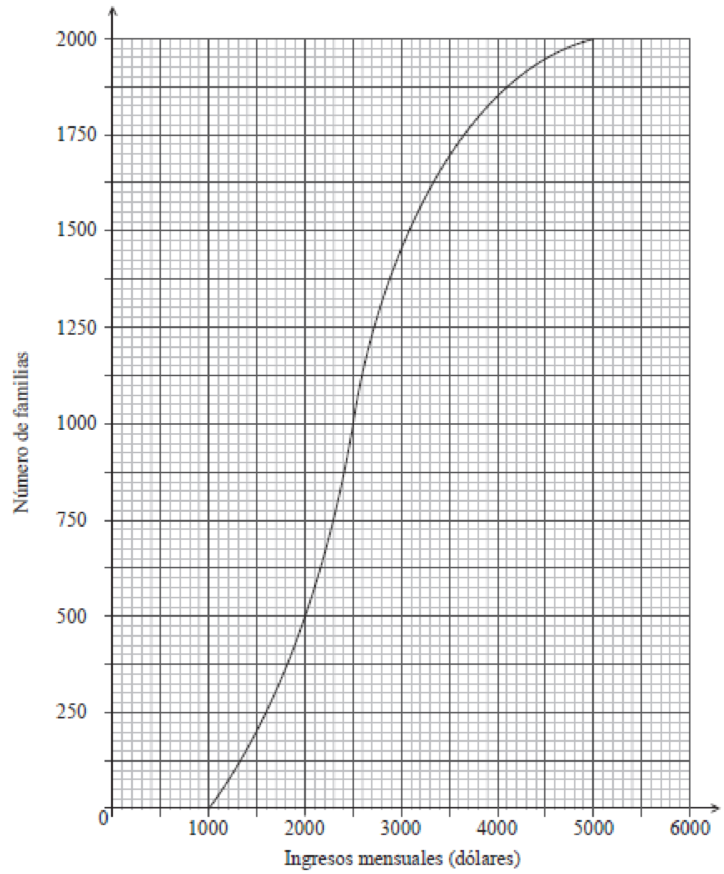
La semana próxima Adam irá tres veces al colegio.

(e) Halle la probabilidad de que Adam llegue tarde exactamente una vez.

8

Noviembre 2014 TZ2 P2

El siguiente gráfico de frecuencias acumuladas muestra los ingresos mensuales, I dólares, de 2000 familias.



(a) Halle la mediana de los ingresos mensuales.

(b) (i) Escriba el número de familias cuyos ingresos mensuales son de 2000 dólares o menos.

(ii) Halle el número de familias cuyos ingresos mensuales son de más de 4000 dólares.

Estas 2000 familias viven en dos tipos distintos de viviendas. La siguiente tabla muestra el número de familias que viven en cada tipo de vivienda y los ingresos mensuales, I, de dichas familias.

	$1000 < I \le 2000$	$2000 < I \le 4000$	$4000 < I \le 5000$
Piso	436	765	28
Chalet	64	p	122

(c) Halle el valor de p.

(d) Se escoge una familia al azar.

(i) Halle la probabilidad de que dicha familia viva en un piso.

(ii) Halle la probabilidad de que dicha familia viva en un piso, sabiendo que tiene ingresos mensuales superiores a 4000 dólares.

(e) Estime la media de los ingresos mensuales de las familias que viven en un chalet.

9

Mayo 2015 TZ1 P1

A discrete random variable X has the following probability distribution.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	p

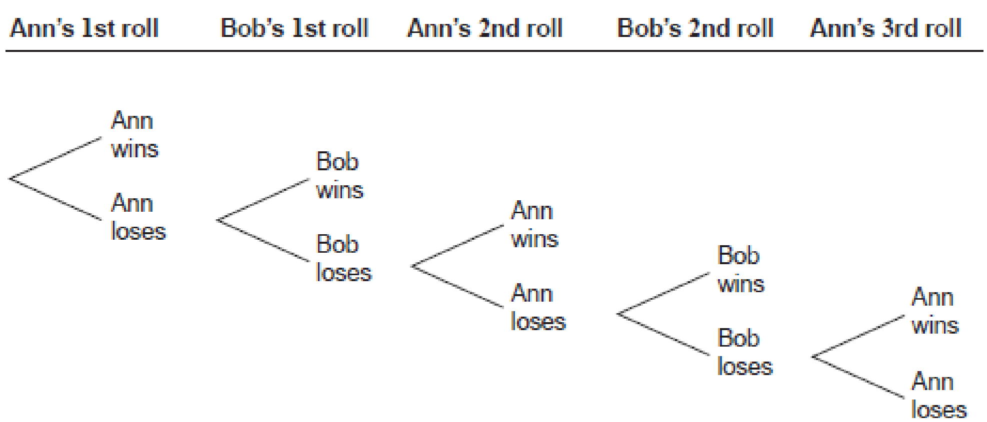
(a) Find p.

(b) Find $\mathrm{E}(X)$.

10

Mayo 2015 TZ1 P1

Ann and Bob play a game where they each have an eight-sided die. Ann's die has three green faces and five red faces; Bob's die has four green faces and four red faces. They take turns rolling their own die and note what colour faces up. The first player to roll green wins. Ann rolls first. Part of a tree diagram of the game is shown below.



(a) Find the probability that Ann wins on her first roll.

(b) (i) The probability that Ann wins on her third roll is $\frac{5}{8}\times\frac{4}{8}\times p\times q\times\frac{3}{8}$.

Write down the value of p and of q.

(ii) The probability that Ann wins on her tenth roll is $\frac{3}{8}r^{k}$ where $r\in\mathbb{Q}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Find the value of r and of k.

(c) Find the probability that Ann wins the game.

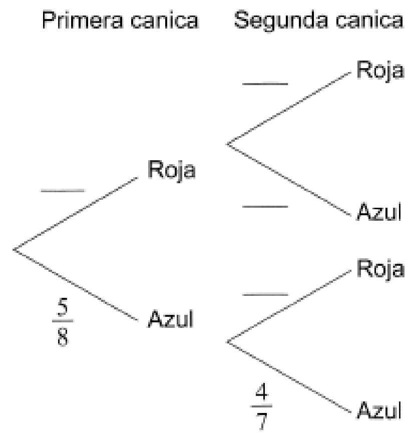
11

Mayo 2015 TZ2 P1

Una bolsa contiene ocho canicas. Tres canicas son rojas y cinco son azules. Se extraen de la bolsa dos canicas sin reposición.

(a) Escriba la probabilidad de que la primera canica extraída sea roja.

(b) Complete el siguiente diagrama de árbol.



(c) Halle la probabilidad de que las dos canicas sean azules.

12

Mayo 2015 TZ2 P1

Una bolsa contiene fichas negras y fichas blancas. Rose paga $\$10$ por jugar a un juego en el que tiene que sacar una ficha de la bolsa. La siguiente tabla muestra la probabilidad de sacar una ficha de cada uno de los colores.

Resultado	negra	blanca
Probabilidad	0,4	0,6

Rose no gana nada si saca una ficha blanca, y gana $\$k$ si saca una ficha negra. El juego es justo. Halle el valor de k.

13

Noviembre 2015 TZ2 P2

The following table shows the probability distribution of a discrete random variable X.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	0.15	k	0.1	$2k$

(a) Find the value of k.

(b) Find $\mathrm{E}(X)$.

14

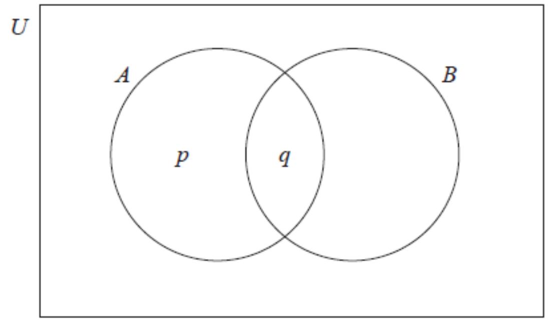
Noviembre 2015 TZ2 P2

Let C and D be independent events, with $\mathrm{P}(C)=2k$ and $\mathrm{P}(D)=3k^2$, where $0<k<0.5$.

(a) Write down an expression for $\mathrm{P}(C\cap D)$ in terms of k.

(b) Given that $\mathrm{P}(C\cap D)=0.162$, find k.

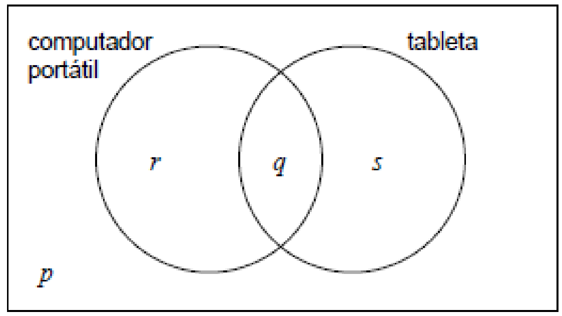
(c) Find $\mathrm{P}(C'|D)$.

15 **Mayo 2016 TZ1 P1**	The following Venn diagram shows the events A and B, where $\mathrm{P}(A) = 0.4$, $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.8$ and $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.1$. The values p and q are probabilities.  (a) (i) Write down the value of q. (ii) Find the value of p. (b) Find $\mathrm{P}(B)$.
16 **Mayo 2016 TZ1 P2**	A factory has two machines, A and B. The number of breakdowns of each machine is independent from day to day. Let A be the number of breakdowns of Machine A on any given day. The probability distribution for A can be modelled by the following table. a: 0, 1, 2, 3 $\mathrm{P}(A=a)$: 0.55, 0.3, 0.1, k (a) Find k. (b) (i) A day is chosen at random. Write down the probability that Machine A has no breakdowns. (ii) Five days are chosen at random. Find the probability that Machine A has no breakdowns on exactly four of these days. Let B be the number of breakdowns of Machine B on any given day. The probability distribution for B can be modelled by the following table. b: 0, 1, 2, 3 $\mathrm{P}(B=b)$: 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 (c) Find $\mathrm{E}(B)$. On Tuesday, the factory uses both Machine A and Machine B. The variables A and B are independent. (d) (i) Find the probability that there are exactly two breakdowns on Tuesday. (ii) Given that there are exactly two breakdowns on Tuesday, find the probability that both breakdowns are of Machine A.

16

Mayo 2016 TZ2 P1

En una clase de 21 alumnos, hay 12 que tienen un computador portátil, 10 que tienen una tableta y 3 que no tienen ninguno de los dos dispositivos. El siguiente diagrama de Venn muestra los sucesos "tener un computador portátil" y "tener una tableta".
Los valores p, q, r y s representan cada uno un número de alumnos.



(a) (i) Escriba el valor de p.

(ii) Halle el valor de q.

(iii) Escriba el valor de r y el de s.

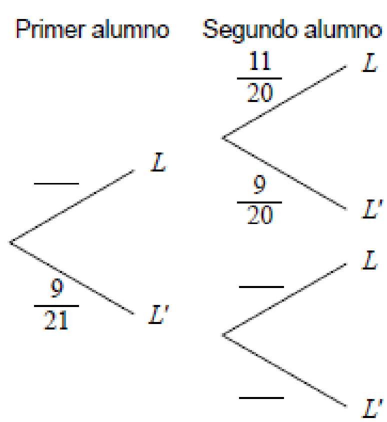
(b) Se escoge al azar a un alumno de esa clase.

(i) Escriba la probabilidad de que ese alumno tenga un computador portátil.

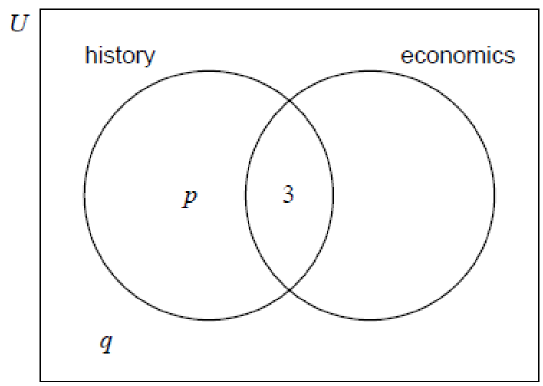
(ii) Halle la probabilidad de que ese alumno tenga o un computador portátil o una tableta, pero no los dos dispositivos.

(c) Se escogen al azar a dos alumnos de esa clase. Sea L el suceso "el alumno tiene un computador portátil".

(i) Copie y complete el siguiente diagrama de árbol. (No escriba nada en esta página.)



(ii) Escriba la probabilidad de que el segundo alumno tenga un computador portátil, sabiendo que el primero tiene un computador portátil.

17 **Noviembre 2016 TZ1 P1**	Events A and B are independent with $P(A \cap B) = 0.2$ and $P(A' \cap B) = 0.6$. (a) Find $P(B)$. (b) Find $P(A \cup B)$.
18 **Noviembre 2016 TZ1 P2**	A jar contains 5 red discs, 10 blue discs and m green discs. A disc is selected at random and replaced. This process is performed four times. (a) Write down the probability that the first disc selected is red. (b) Let X be the number of red discs selected. Find the smallest value of m for which $\mathrm{Var}(X) < 0.6$.
19 **Mayo 2017 TZ1 P1**	In a group of 20 girls, 13 take history and 8 take economics. Three girls take both history and economics, as shown in the following Venn diagram. The values p and q represent numbers of girls.  (a) Find the value of (i) p; (ii) q. (b) A girl is selected at random. Find the probability that she takes economics but not history.
20 **Mayo 2017 TZ1 P1**	The following table shows the probability distribution of a discrete random variable A, in terms of an angle θ. a | 1 | 2 $P(A = a)$ | $\cos\theta$ | $2\cos 2\theta$ (a) Show that $\cos\theta = \frac{3}{4}$. (b) Given that $\tan\theta > 0$, find $\tan\theta$. (c) Let $y = \frac{1}{\cos x}$, for $0 < x < \frac{\pi}{2}$. The graph of y between $x = \theta$ and $x = \frac{\pi}{4}$ is rotated 360° about the x-axis. Find the volume of the solid formed.

21

Mayo 2017 TZ1 P2

In a large university the probability that a student is left handed is 0.08. A sample of 150 students is randomly selected from the university. Let k be the expected number of left-handed students in this sample.

(a) Find k.

(b) Hence, find the probability that

(i) exactly k students are left handed;

(ii) fewer than k students are left handed.

22

Mayo 2017 TZ2 P2

La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde $\mathrm{E}(X) = 1{,}2$.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$	p	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	q

(a) (i) Halle q.

(ii) Halle p.

Una bolsa contiene canicas blancas y azules y se sabe que hay al menos tres de cada color. Se sacan tres canicas de la bolsa, sin reposición. El número de canicas azules que se sacan viene dado por la variable aleatoria X.

(b) (i) Escriba la probabilidad de sacar tres canicas azules.

(ii) Explique por qué la probabilidad de sacar tres canicas blancas es $\frac{1}{6}$.

(iii) La bolsa contiene un total de diez canicas, de las cuales w son blancas. Halle w.

Se juega a un juego en el que se sacan tres canicas de esa bolsa que contiene diez canicas, sin reposición. El jugador gana un premio si saca tres canicas blancas.

(c) Jill juega nueve veces a este juego. Halle la probabilidad de que gane exactamente dos premios.

(d) Grant juega a este juego hasta que gana dos premios. Halle la probabilidad de que gane el segundo premio en el octavo intento.