

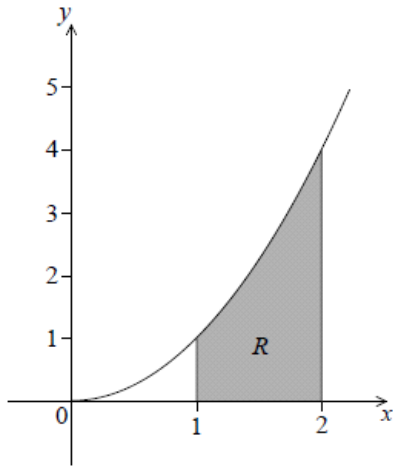



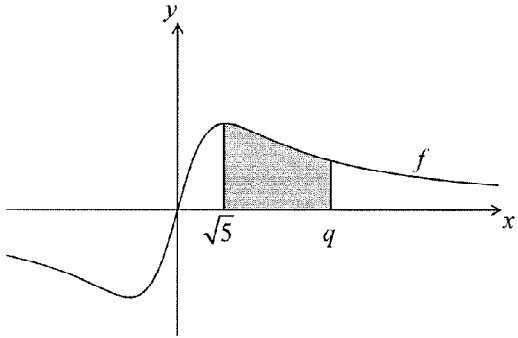


INTEGRALES

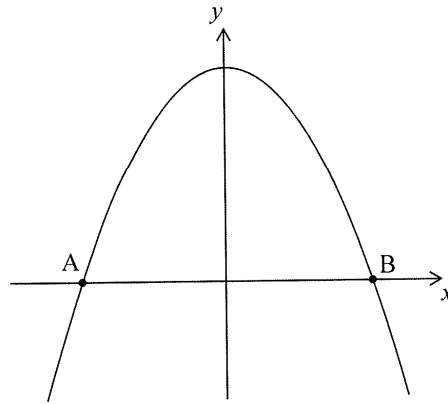
<p>1 Muestra 2014 P1</p>	<p>(a) Find $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$.</p> <p>(b) Find $\int \sin 3x \cos 3x dx$.</p> 
<p>2 Muestra 2014 P2</p>	<p>Let $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.</p> <p>(a) Find $h^{-1}(x)$.</p> <p>(b) (i) Sketch the graph of h for $-4 \leq x \leq 4$ and $-5 \leq y \leq 8$, including any asymptotes.</p> <p>(ii) Write down the equations of the asymptotes.</p> <p>(iii) Write down the x-intercept of the graph of h.</p> <p>(c) Let R be the region in the first quadrant enclosed by the graph of h, the x-axis and the line $x=3$.</p> <p>(i) Find the area of R.</p> <p>(ii) Write down an expression for the volume obtained when R is revolved through 360° about the x-axis.</p>
<p>3 Mayo 2014 TZ1 P1</p> 	<p>Let $f(x) = x^2$.</p> <p>(a) Find $\int_1^2 (f(x))^2 dx$.</p> <p>(b) The following diagram shows part of the graph of f.</p>  <p>The shaded region R is enclosed by the graph of f, the x-axis and the lines $x=1$ and $x=2$.</p> <p>Find the volume of the solid formed when R is revolved 360° about the x-axis.</p>

<p>5</p> <p>Mayo 2014 TZ1 P1</p>	<p>Let $\int_{\pi}^a \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}$, where $\pi < a < 2\pi$. Find the value of a.</p> 
<p>6</p> <p>Mayo 2014 TZ2 P1</p>	<p>El gráfico de una función h pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{12}, 5\right)$.</p> <p>Sabiendo que $h'(x) = 4 \cos 2x$, halle $h(x)$.</p> 
<p>7</p> <p>Mayo 2014 TZ2 P1</p> 	<p>Sea $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$.</p> <p>(a) Utilice la regla del cociente para mostrar que $f'(x) = \frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2}$.</p> <p>(b) Halle $\int \frac{2x}{x^2 + 5} \, dx$.</p> <p>La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f.</p>  <p>(c) La región sombreada está delimitada por el gráfico de f, el eje x, y las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = q$. El área de esta región es igual a $\ln 7$. Halle el valor de q.</p>

8

Mayo
2014
TZ2
P2

Sea $f(x) = 5 - x^2$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f .



El gráfico corta al eje x en los puntos A y B.

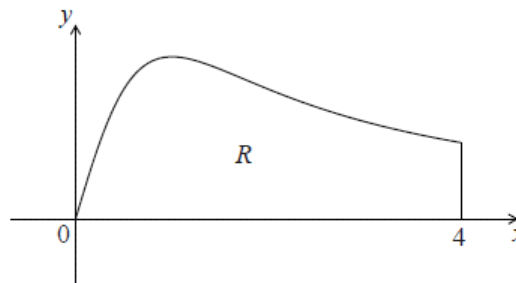
- Halle la coordenada x de A y de B.
- La región delimitada por el gráfico de f y el eje x se rota 360° alrededor del eje x . Halle el volumen del sólido de revolución generado.

9

Noviembre
2014
TZ2
P1



La siguiente figura muestra el gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, para $0 \leq x \leq 4$, y la recta $x = 4$.



Sea R la región delimitada por el gráfico de f , el eje x y la recta $x = 4$.

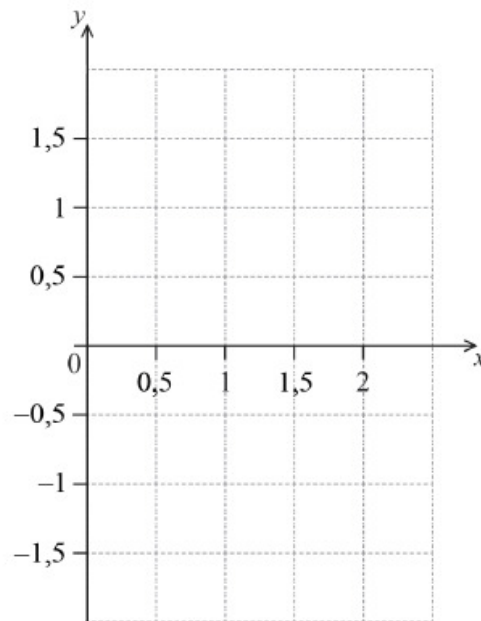
Halle el área de R .

10

Noviembre
2014
T22
P2

Sea $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$, para $0 \leq x \leq 2$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de f en la siguiente cuadrícula.



(b) Resuelva $f(x) = 0$.

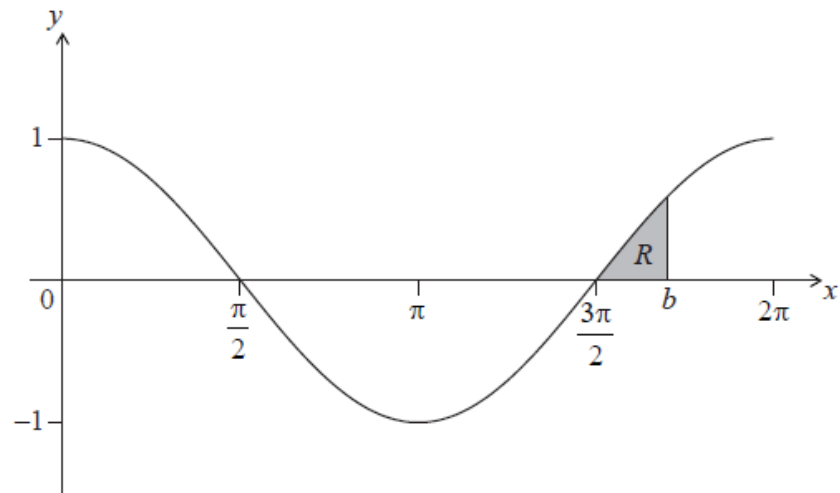
(c) La región delimitada por el gráfico de f y el eje x se rota 360° alrededor del eje x . Halle el volumen del sólido de revolución generado.

11

Mayo
2015
TZ1
P1



Let $f(x) = \cos x$, for $0 \leq x \leq 2\pi$. The following diagram shows the graph of f .
There are x -intercepts at $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.



The shaded region R is enclosed by the graph of f , the line $x = b$, where $b > \frac{3\pi}{2}$, and the x -axis. The area of R is $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Find the value of b .

12

Mayo
2015
TZ2
P1

Sea $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(a) Halle $g'(x)$.

(b) Halle $\int g(x) dx$.

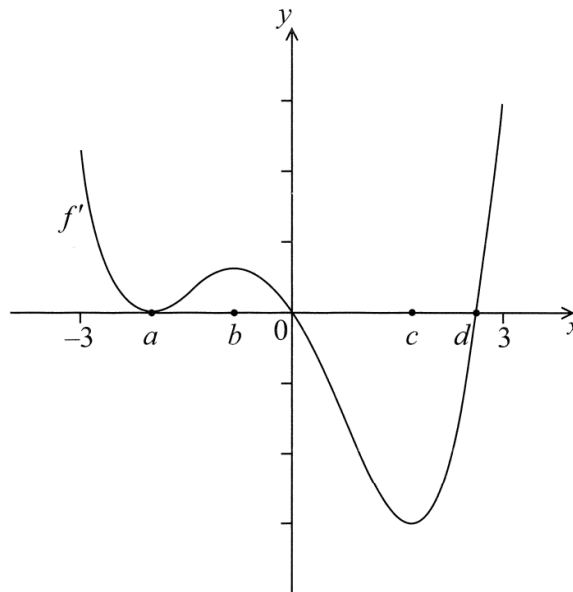


13

Mayo
2015
TZ2
P1



Considere una función f cuyo dominio sea $-3 < x < 3$. La siguiente figura muestra el gráfico de f' , la **derivada** de f .



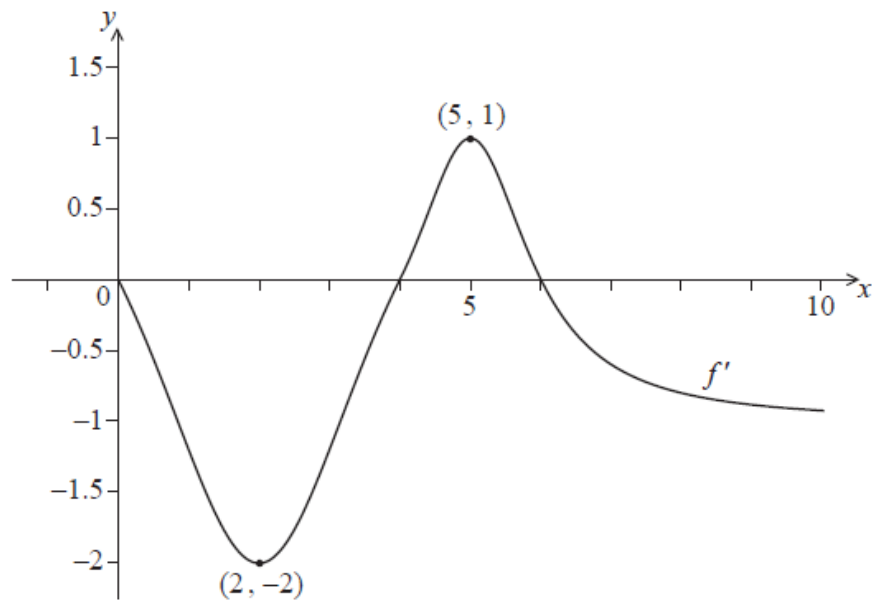
El gráfico de f' tiene puntos de intersección con el eje x en $x = a$, $x = 0$, y $x = d$. Hay un máximo local en $x = b$ y hay mínimos locales en $x = a$ y en $x = c$.

- (a) Halle todos los posibles valores de x para los cuales el gráfico de f es decreciente.
- (b) (i) Halle el valor de x para el cual el gráfico de f tiene un mínimo local.
(ii) Justifique su respuesta.
- (c) El área total de la región delimitada por el gráfico de f' y el eje x es igual a 15. Sabiendo que $f(a) = 3$ y $f(d) = -1$, halle el valor de $f(0)$.

14

Mayo
2015
TZ1
P2

Consider a function f , for $0 \leq x \leq 10$. The following diagram shows the graph of f' , the derivative of f .



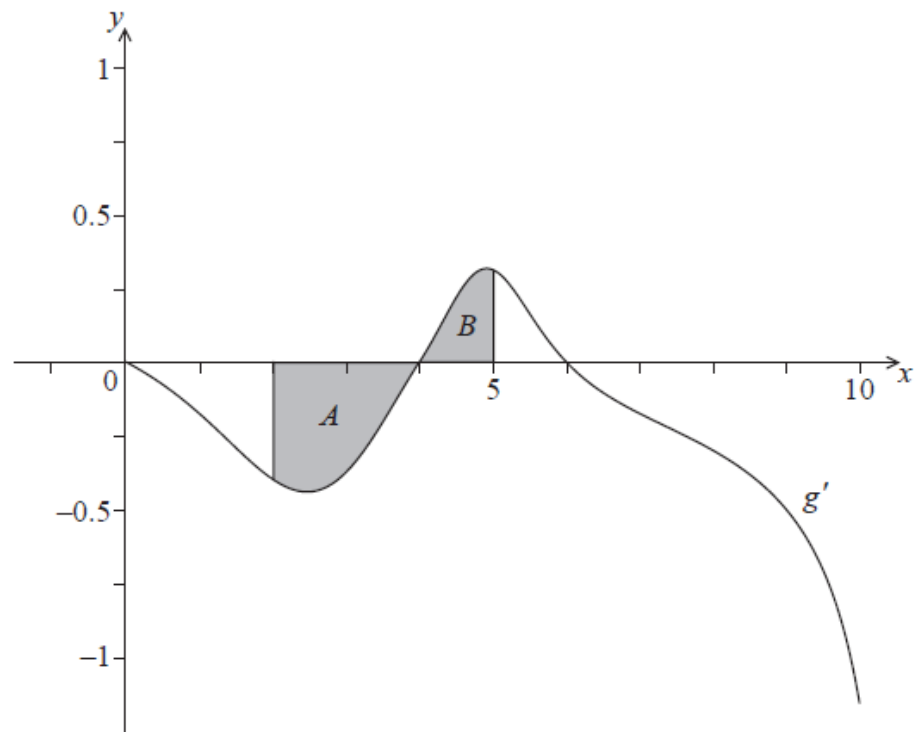
The graph of f' passes through $(2, -2)$ and $(5, 1)$, and has x -intercepts at $0, 4$ and 6 .

- (a) The graph of f has a local maximum point when $x = p$. State the value of p , and justify your answer.
- (b) Write down $f'(2)$.

Let $g(x) = \ln(f(x))$ and $f(2) = 3$.

- (c) Find $g'(2)$.
- (d) Verify that $\ln 3 + \int_2^a g'(x) dx = g(a)$, where $0 \leq a \leq 10$.

(e) The following diagram shows the graph of g' , the derivative of g .



The shaded region A is enclosed by the curve, the x -axis and the line $x = 2$, and has area 0.66 units^2 .

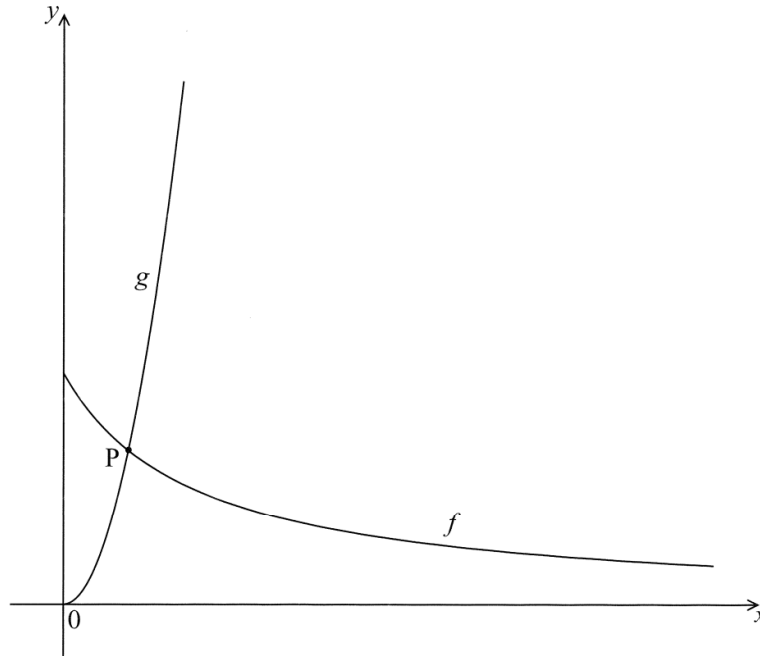
The shaded region B is enclosed by the curve, the x -axis and the line $x = 5$, and has area 0.21 units^2 .

Find $g(5)$.

15

Mayo
2015
TZ2
P2

Sean $f(x) = \frac{9}{x+2}$ y $g(x) = 3x^2$, para $x \geq 0$. La siguiente figura muestra partes de los gráficos de f y g .



El gráfico de f y el de g se cortan en el punto $P(p, q)$.

- (a) Halle el valor de p y el de q .
 (b) Escriba $f'(p)$.

Sea L la normal al gráfico de f en P .

- (c) (i) Halle la ecuación de L , de la forma $y = ax + b$.
 (ii) Escriba el punto de intersección de L con el eje y .
 (d) Sea R la región delimitada por el eje y , el gráfico de g y la recta L .
 Halle el área de R .

16

Noviembre
2015
TZ1
P1

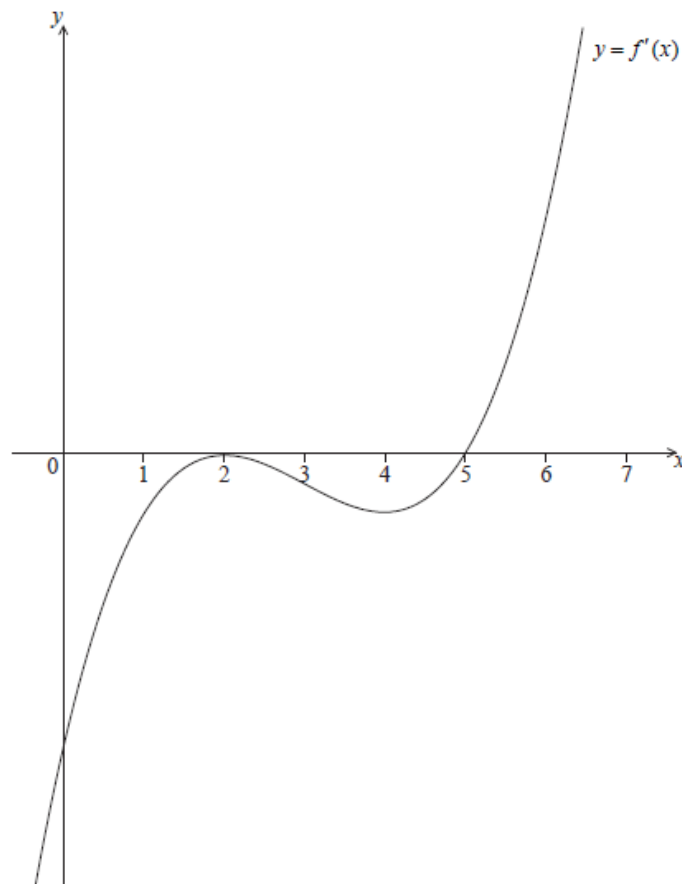
Let $f'(x) = 6x^2 - 5$. Given that $f(2) = -3$, find $f(x)$.



17

Noviembre
2015
T22
P1

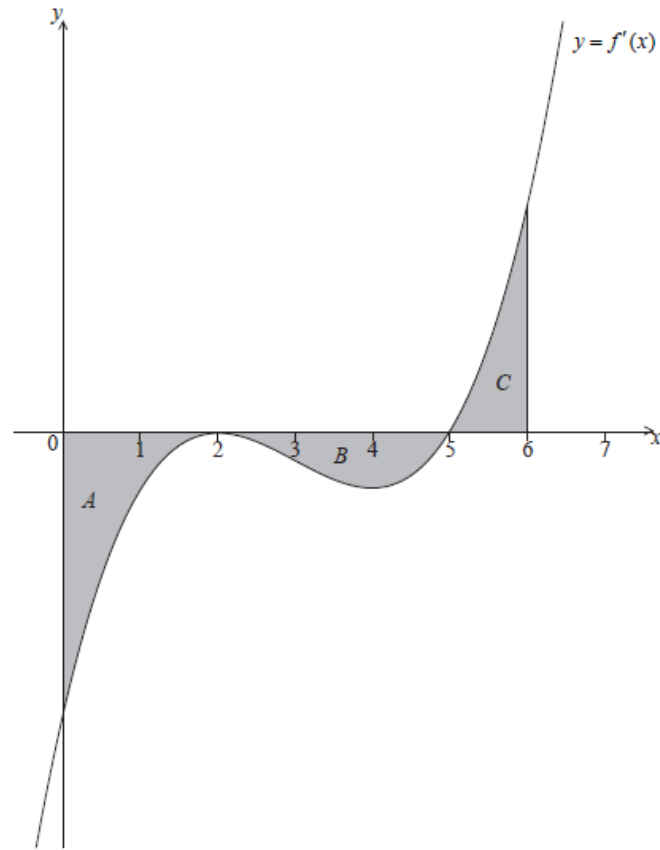
Let $y = f(x)$, for $-0.5 \leq x \leq 6.5$. The following diagram shows the graph of f' , the derivative of f .



The graph of f' has a local maximum when $x = 2$, a local minimum when $x = 4$, and it crosses the x -axis at the point $(5, 0)$.

- Explain why the graph of f has a local minimum when $x = 5$.
- Find the set of values of x for which the graph of f is concave down.

The following diagram shows the shaded regions A , B and C .



The regions are enclosed by the graph of f' , the x -axis, the y -axis, and the line $x = 6$.
The area of region A is 12, the area of region B is 6.75 and the area of region C is 6.75.

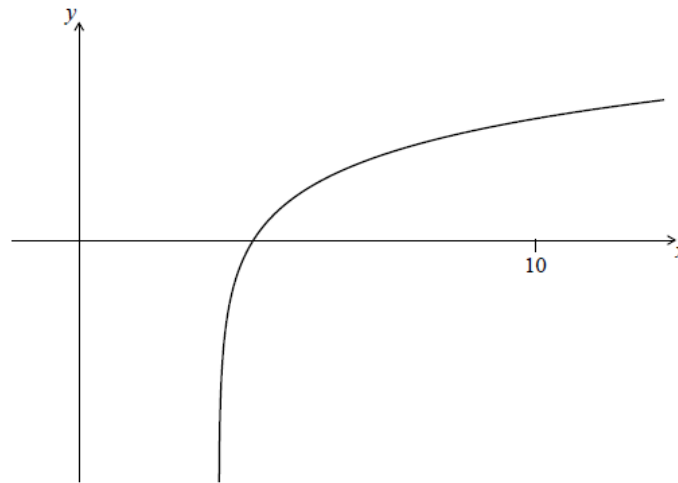
(c) Given that $f(0) = 14$, find $f(6)$.

(d) Let $g(x) = (f(x))^2$. Given that $f'(6) = 16$, find the equation of the tangent to the graph of g at the point where $x = 6$.

18

Noviembre
2015
TZ2
P2

Let $f(x) = 2 \ln(x - 3)$, for $x > 3$. The following diagram shows part of the graph of f .



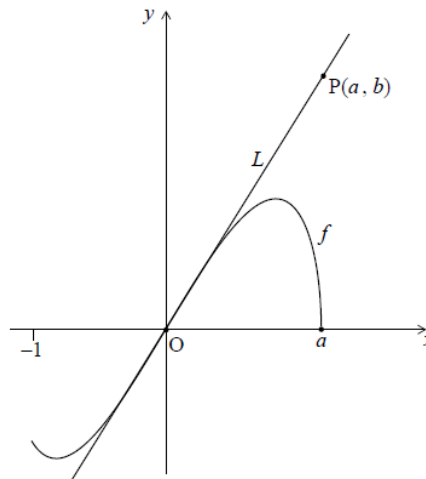
- (a) Find the equation of the vertical asymptote to the graph of f .
- (b) Find the x -intercept of the graph of f .
- (c) The region enclosed by the graph of f , the x -axis and the line $x = 10$ is rotated 360° about the x -axis. Find the volume of the solid formed.

19

Mayo
2016
TZ2
P1

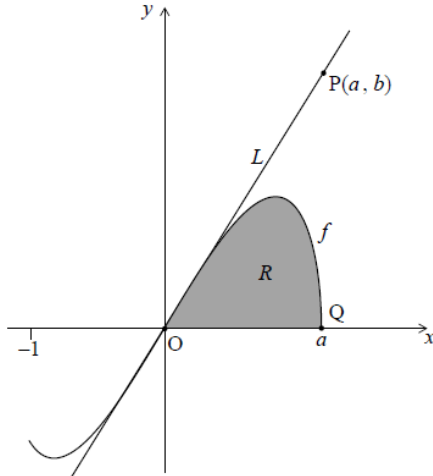




La siguiente figura muestra el gráfico de $f(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$, para $-1 \leq x \leq a$, donde $a > 1$.



La recta L es la tangente al gráfico de f en el origen, O . El punto $P(a, b)$ pertenece a L .

- (a) (i) Sabiendo que $f'(x) = \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, para $-1 \leq x < a$, halle la ecuación de L .
- (ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión para b en función de a .

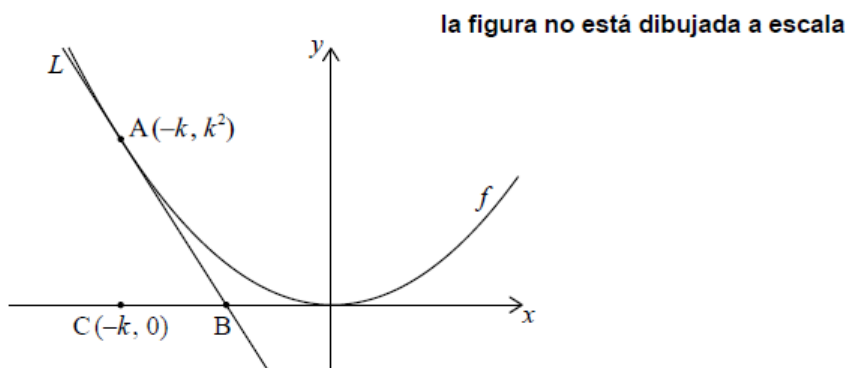
	<p>El punto $Q(a, 0)$ pertenece al gráfico de f. Sea R la región delimitada por el gráfico de f y el eje x. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.</p>  <p>Sea A_R el área de la región R.</p> <p>(b) Muestre que $A_R = \frac{2}{3}a^3$.</p> <p>(c) Sea A_T el área del triángulo OPQ. Sabiendo que $A_T = kA_R$, halle el valor de k.</p>
<p>20 Mayo 2016 TZ1 P2</p>	<p>Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = 3 \ln(x + 1)$, for $x > -1$.</p> <p>(a) Solve $f(x) = g(x)$.</p> <p>(b) Find the area of the region enclosed by the graphs of f and g.</p>
<p>21 Noviembre 2016 TZ2 P2</p>	<p>Sean $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = -3f(x) + 1$.</p> <p>Los gráficos de f y de g se cortan en $x = p$ y en $x = q$, donde $p < q$.</p> <p>(a) Halle el valor de p y de q.</p> <p>(b) A partir de lo anterior, halle el área de la región delimitada por los gráficos de f y de g.</p>
<p>22 Mayo 2017 TZ1 P1</p>	<p>(a) Find $\int xe^{x^2-1} dx$.</p> <p>(b) Find $f(x)$, given that $f'(x) = xe^{x^2-1}$ and $f(-1) = 3$. </p>
<p>23 Mayo 2017 TZ2 P1</p>	<p>Sea $f'(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}$. Sabiendo que $f(0) = 1$, halle $f(x)$. </p>

24

Mayo
2017
TZ2
P1



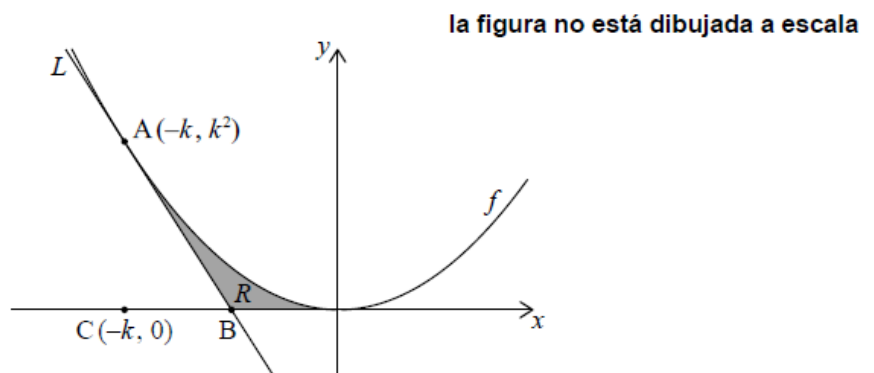
Sea $f(x) = x^2$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f .



La recta L es la tangente al gráfico de f en el punto $A(-k, k^2)$ y corta al eje x en el punto B . El punto C es $(-k, 0)$.

- (a) (i) Escriba $f'(x)$.
- (ii) Halle la pendiente de L .
- (b) Muestre que la coordenada x de B es $-\frac{k}{2}$.
- (c) Halle el área del triángulo ABC , en función de k .

La región R está delimitada por L , el gráfico de f y el eje x . Esta información se muestra en la siguiente figura.



- (d) Sabiendo que el área del triángulo ABC es igual a p veces el área de R , halle el valor de p .

25

Mayo
2017
TZ1
P2

Let $f(x) = \ln x$ and $g(x) = 3 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)$, for $x > 0$.

The graph of g can be obtained from the graph of f by two transformations:
a horizontal stretch of scale factor q followed by
a translation of $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

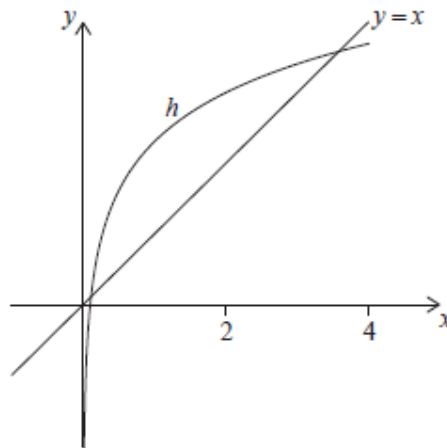
(a) Write down the value of

(i) q ;

(ii) h ;

(iii) k .

Let $h(x) = g(x) \times \cos(0.1x)$, for $0 < x < 4$. The following diagram shows the graph of h and the line $y = x$.



The graph of h intersects the graph of h^{-1} at two points. These points have x coordinates 0.111 and 3.31, correct to three significant figures.

(b) (i) Find $\int_{0.111}^{3.31} (h(x) - x) dx$.

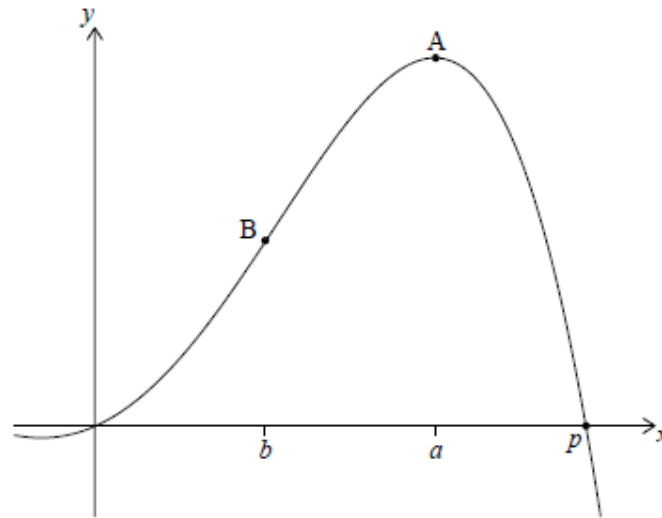
(ii) Hence, find the area of the region enclosed by the graphs of h and h^{-1} .

(c) Let d be the vertical distance from a point on the graph of h to the line $y = x$. There is a point $P(a, b)$ on the graph of h where d is a maximum. Find the coordinates of P , where $0.111 < a < 3.31$.

26

Mayo
2017
TZ2
P2

Sea $f(x) = -0,5x^4 + 3x^2 + 2x$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f .



Los cortes con el eje x están en $x=0$ y en $x=p$. Hay un máximo en A donde $x=a$, y un punto de inflexión en B donde $x=b$.

- (a) Halle el valor de p .
- (b)
 - (i) Escriba las coordenadas de A.
 - (ii) Escriba la razón de cambio de f en A.
- (c)
 - (i) Halle las coordenadas de B.
 - (ii) Halle la razón de cambio de f en B.
- (d) Sea R la región delimitada por el gráfico de f , el eje x , la recta $x=b$ y la recta $x=a$. La región R se rota 360° alrededor del eje x . Halle el volumen del sólido de revolución así generado.