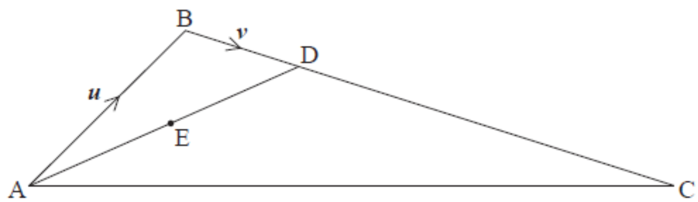
# VECTORES

**1**

**Muestra 2014 P1**

In the following diagram, $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ and $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$.




The midpoint of $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ is E and $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = \dfrac{1}{3}$.

Express each of the following vectors in terms of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

**2**

**Muestra 2014 P2**

Consider the lines $L_1$, $L_2$, $L_3$, and $L_4$, with respective equations.

$$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} \qquad L_4: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Write down the line which is parallel to $L_4$.

(b) Write down the position vector of the point of intersection of $L_1$ and $L_2$.

(c) Given that $L_1$ is perpendicular to $L_3$, find the value of $a$.

**3**

**Mayo 2014 TZ1 P1**

The line $L_1$ passes through the points $\mathrm{A}(2, 1, 4)$ and $\mathrm{B}(1, 1, 5)$.

(a) Show that $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Hence, write down

(i) a direction vector for $L_1$;

(ii) a vector equation for $L_1$.

Another line $L_2$ has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. The lines $L_1$ and $L_2$ intersect at the point P.

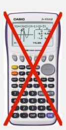
(c) Find the coordinates of P.

(d) (i) Write down a direction vector for $L_2$.

(ii) Hence, find the angle between $L_1$ and $L_2$.

**4**

**Mayo 2014 TZ2 P1**



La recta $L$ es paralela al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Halle la pendiente de la recta $L$.

La recta $L$ pasa por el punto $(9, 4)$.

(b) Halle la ecuación de la recta $L$ de la forma $y = ax + b$.

(c) Escriba una ecuación vectorial para la recta $L$.

**5**

**Mayo 2014 TZ2 P1**

*En esta pregunta, las distancias vienen dadas en metros.*

Ryan y Jack tienen aviones en miniatura (de aeromodelismo), que despegan en terreno llano. El avión de Jack despega después del de Ryan.

La posición del avión de Ryan $t$ segundos después de despegar viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Halle la celeridad del avión de Ryan.

(b) Halle la altura del avión de Ryan al cabo de dos segundos.

La posición del avión de Jack $s$ segundos después de despegar viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -39 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(c) Muestre que las trayectorias de los aviones son perpendiculares entre sí.

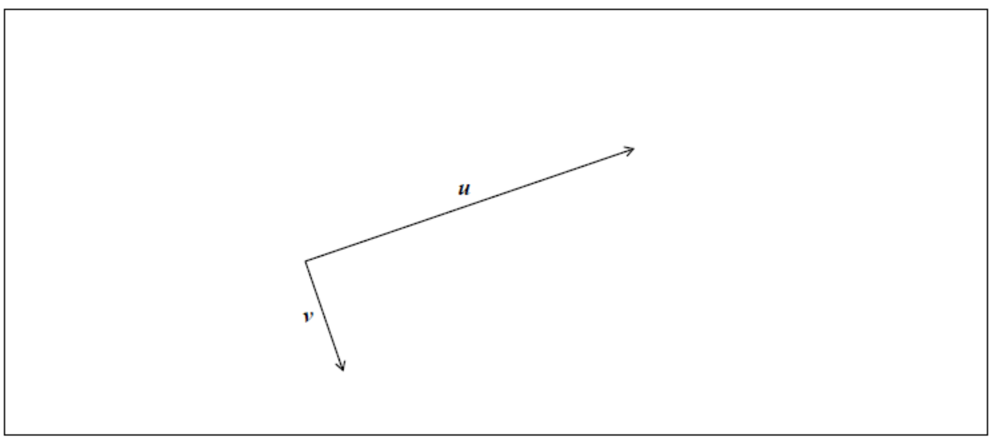
Los dos aviones colisionan se chocan en el punto $(-23, 20, 28)$.

(d) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que despegó el avión de Ryan hasta que despegó el avión de Jack?

**6**

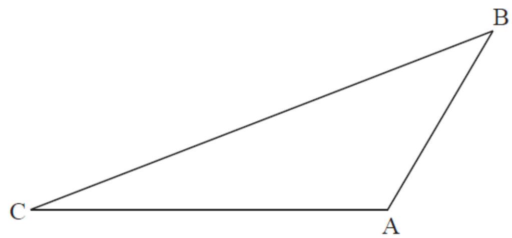
**Mayo 2014 TZ1 P2**

The following diagram shows two perpendicular vectors $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.




(a) Let $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Represent $\boldsymbol{w}$ on the diagram above.

(b) Given that $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ n \\ 3 \end{pmatrix}$, where $n \in \mathbb{Z}$, find $n$.

| | |
|---|---|
| **7**<br><br>**Noviembre 2014**<br>**TZ2**<br>**P1**<br> | La siguiente figura muestra el triángulo ABC.<br>***la figura no está dibujada a escala***<br><br>Sean $\vec{\mathrm{AB}}\bullet\vec{\mathrm{AC}}=-5\sqrt{3}$ y $\lvert\vec{\mathrm{AB}}\rvert\lvert\vec{\mathrm{AC}}\rvert=10$. Halle el área del triángulo ABC. |
| **8**<br><br>**Noviembre 2014**<br>**TZ2**<br>**P1**<br> | Sea $L_x$ una familia de rectas cuya ecuación viene dada por $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{x} \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} x^2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donde $x>0$.<br><br>(a) Escriba la ecuación de $L_1$.<br><br>Una recta $L_a$ corta al eje $y$ en un punto P.<br><br>(b) Muestre que P tiene por coordenadas $\left(0,\ \frac{4}{a}\right)$.<br><br>La recta $L_a$ corta al eje $x$ en $\mathrm{Q}(2a,\ 0)$. Sea $d=\mathrm{PQ}^2$.<br><br>(c) Muestre que $d=4a^2+\frac{16}{a^2}$.<br><br>(d) Existe un valor mínimo para $d$. Halle el valor de $a$ que da este valor mínimo. |

**9**

**Mayo 2015 TZ1 P1**

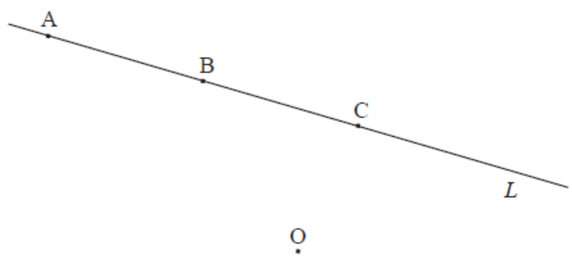
A line $L$ passes through points $\mathrm{A}(-2, 4, 3)$ and $\mathrm{B}(-1, 3, 1)$.

(a) (i) Show that $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(ii) Find $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

(b) Find a vector equation for $L$.

The following diagram shows the line $L$ and the origin $\mathrm{O}$. The point $\mathrm{C}$ also lies on $L$.



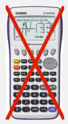
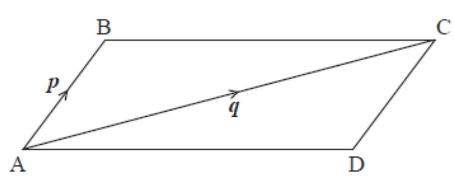

Point $\mathrm{C}$ has position vector $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$.

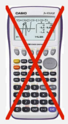
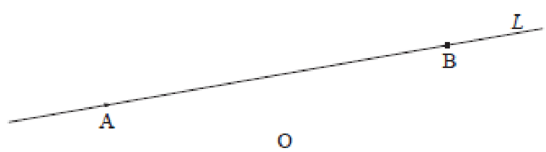
(c) Show that $y = 2$.

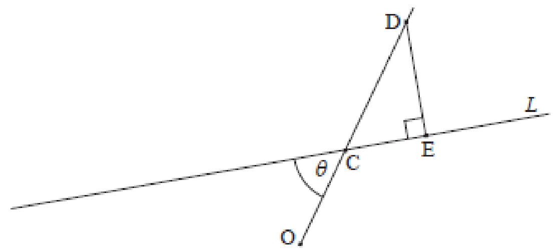
(d) (i) Find $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

(ii) Hence, write down the size of the angle between OC and $L$.

(e) Hence or otherwise, find the area of triangle OAB.

| | |
|---|---|
| **10**<br><br>**Mayo 2015 TZ2 P1**<br> | Las coordenadas de P y Q son $(1\,,0\,,2)$ y $(-11\,,8\,,m)$ respectivamente.<br><br>(a) Exprese $\overrightarrow{PQ}$ en función de $m$.<br><br>Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores perpendiculares, donde $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$.<br><br>(b) Halle $n$.<br><br>(c) Sabiendo que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\boldsymbol{b}$,<br><br>(i) exprese $\overrightarrow{PQ}$ en función de $\boldsymbol{b}$;<br><br>(ii) a partir de lo anterior, halle $m$.<br><br>En el apartado (d), la distancia está en metros y el tiempo está en segundos.<br><br>(d) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por Q, de modo tal que su posición viene dada por $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{a}$. |
| **11**<br><br>**Mayo 2015 TZ2 P2** | Sean $\boldsymbol{u}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.<br><br>(a) Halle<br><br>(i) $\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}$;<br><br>(ii) $\lvert\boldsymbol{u}\rvert$;<br><br>(iii) $\lvert\boldsymbol{v}\rvert$.<br><br>(b) Halle el ángulo que forman $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. |
| **12**<br><br>**Noviembre 2015 P1**<br> | The following diagram shows the parallelogram ABCD.<br><br>Let $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$ and $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{q}$. Find each of the following vectors in terms of $\boldsymbol{p}$ and/or $\boldsymbol{q}$.<br><br>(a) $\overrightarrow{CB}$<br><br>(b) $\overrightarrow{CD}$<br><br>(c) $\overrightarrow{DB}$ |

| | |
|---|---|
| **13**<br><br>**Noviembre 2015**<br>**P1**<br><br> | A line $L_1$ passes through the points $A(0, -3, 1)$ and $B(-2, 5, 3)$.<br><br>(a) (i) Show that $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.<br><br>(ii) Write down a vector equation for $L_1$.<br><br>A line $L_2$ has equation $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. The lines $L_1$ and $L_2$ intersect at a point C.<br><br>(b) Show that the coordinates of C are $(-1, 1, 2)$.<br><br>(c) A point D lies on line $L_2$ so that $\left\lvert\overrightarrow{CD}\right\rvert = \sqrt{18}$ and $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CD} = -9$. Find $A\hat{C}D$. |
| **14**<br><br>**Mayo 2016**<br>**TZ1**<br>**P2** | The points A and B lie on a line $L$, and have position vectors $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectively.<br>Let O be the origin. This is shown on the following diagram.<br><br>**diagram not to scale**<br><br><br><br><br>(a) Find $\overrightarrow{AB}$.<br><br>The point C also lies on $L$, such that $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$.<br><br>(b) Show that $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.<br><br>Let $\theta$ be the angle between $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{OC}$. |

| | |
|---|---|
| | (c) Find $\theta$.<br><br>Let D be a point such that $\vec{\mathrm{OD}} = k\vec{\mathrm{OC}}$, where $k > 1$. Let E be a point on $L$ such that $\mathrm{C\hat{E}D}$ is a right angle. This is shown on the following diagram.<br><br>diagram not to scale<br><br><br>(d) (i) Show that $\left\|\vec{\mathrm{DE}}\right\| = (k-1)\left\|\vec{\mathrm{OC}}\right\| \sin\theta$.<br><br>(ii) The distance from D to line $L$ is less than 3 units. Find the possible values of $k$. |
| **15**<br><br>**Mayo 2016 TZ2 P1** | Sean $\boldsymbol{u} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$, donde $m, n \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $\boldsymbol{v}$ es un vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{u}$, halle los posibles valores de $m$ y de $n$.<br> |
| **16**<br><br>**Mayo 2016 TZ2 P2** | Considere los puntos $\mathrm{A}(1, 5, -7)$ y $\mathrm{B}(-9, 9, -6)$.<br><br>(a) Halle $\vec{\mathrm{AB}}$.<br><br>Sea C un punto tal que $\vec{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.<br><br>(b) Halle las coordenadas de C.<br><br>La recta $L$ pasa por B y es paralela a $(\mathrm{AC})$.<br><br>(c) Escriba una ecuación vectorial para $L$.<br><br>(d) Sabiendo que $\left\|\vec{\mathrm{AB}}\right\| = k\left\|\vec{\mathrm{AC}}\right\|$, halle $k$.<br><br>(e) El punto D pertenece a $L$, de modo tal que $\left\|\vec{\mathrm{AB}}\right\| = \left\|\vec{\mathrm{BD}}\right\|$. Halle las posibles coordenadas de D. |

| | |
|---|---|
| **17**<br><br>**Mayo 2017 TZ2 P1** | Los vectores $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} k+3 \\ k \end{pmatrix}$ son perpendiculares entre sí.<br><br>(a) Halle el valor de $k$.<br>(b) Sabiendo que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, halle $\boldsymbol{c}$. |
| **18**<br><br>**Mayo 2017 TZ2 P1**<br> | **Nota: En esta pregunta, las distancias están en metros y el tiempo está en segundos.**<br>Dos partículas $P_1$ y $P_2$ empiezan a moverse al mismo tiempo partiendo de un punto A pero siguiendo rectas diferentes.<br>Al cabo de $t$ segundos, la posición de $P_1$ viene dada por $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.<br>(a) Halle las coordenadas de A.<br>Dos segundos después de partir de A, $P_1$ se encuentra en el punto B.<br>(b) Halle<br>(i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$;<br>(ii) $\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert$.<br>Dos segundos después de partir de A, $P_2$ se encuentra en el punto C, donde $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.<br>(c) Halle $\cos \mathrm{B\hat{A}C}$.<br>(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle la distancia que hay entre $P_1$ y $P_2$ dos segundos después de partir de A. |