

## MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO INTERNACIONAL NIVEL MEDIO - Serie 9: Funciones

1 Sean  $f(x) = 4x - 2$  y  $g(x) = -2x^2 + 8$ .

(a) Halle  $f^{-1}(x)$ .

(b) Halle  $(f \circ g)(1)$ .

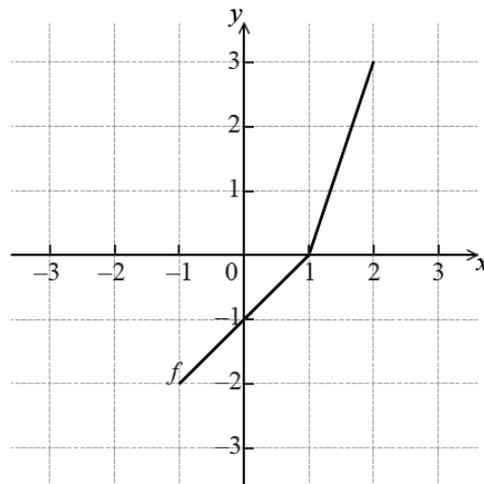
2 Sea  $f(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $x \geq -4$  y  $g(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Halle  $(g \circ f)(3)$ .

(b) Halle  $f^{-1}(x)$ .

(c) Escriba el dominio de  $f^{-1}$ .

3 La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de una función  $f$ , para  $-1 \leq x \leq 2$ .



(a) Escriba el valor de

(i)  $f(2)$ ;

(ii)  $f^{-1}(-1)$ .

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f^{-1}$  en la cuadrícula

4 Razona cuáles de las siguientes funciones son pares / impares:

a)  $y = 2x$       b)  $y = -x^2$       c)  $y = x^4 - x^2$       d)  $y = \frac{6}{x}$       e)  $y = x^3 + x^2$       f)  $y = 5$

5 Halla el dominio de estas funciones:

a)  $f(x) = \frac{x-2}{2x+3}$       b)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$       c)  $f(x) = \frac{10}{10^{3x}}$       d)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$   
 e)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$       f)  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$       g)  $f(x) = \log(x+2)$       h)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$

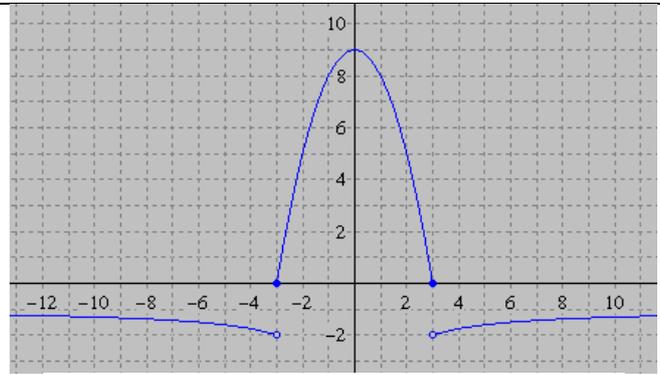
6 Considere las funciones  $f$  y  $g$  donde  $f(x) = 3x - 5$  y  $g(x) = x - 2$ .

(a) Halle la función inversa,  $f^{-1}$ .

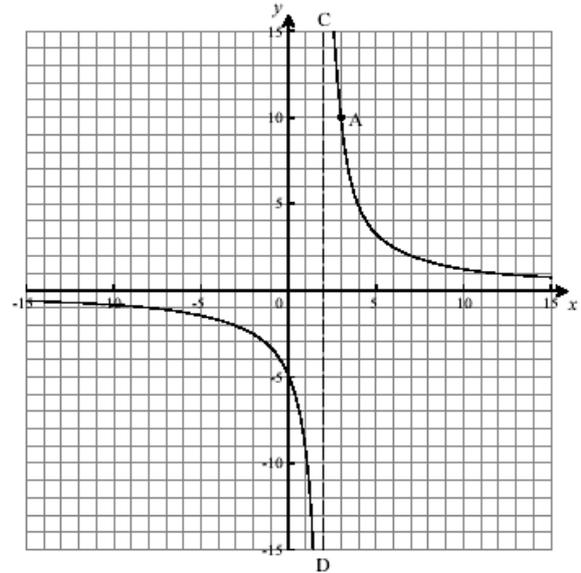
(b) Dado que  $g^{-1}(x) = x + 2$ , halle  $(g^{-1} \circ f)(x)$ .

(c) Dado también que  $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x+3}{3}$ , resuelva  $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$ .

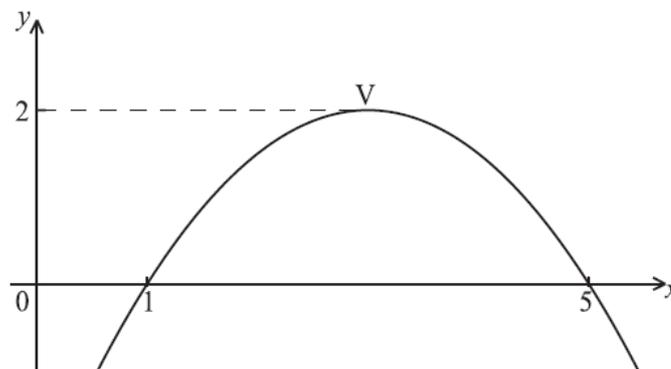
- 7 Observa la función del dibujo y contesta a las siguientes preguntas:
- Halla su dominio y recorrido
  - escribe la ecuación de sus asíntotas
  - ¿Es simétrica? ¿De qué tipo?
  - ¿Tiene extremos relativos? ¿Y absolutos?
  - Halla los intervalos de monotonía
  - Describe su curvatura.



- 8 La siguiente figura muestra parte de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{q}{x-p}$ . La curva pasa por el punto  $A(3,10)$ . La recta (CD) es una asíntota. Halle los valores de  $p$  y  $q$

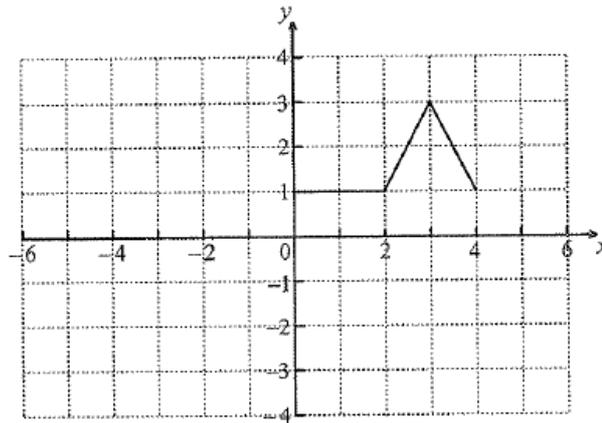


- 9 Part of the graph of the function  $y = d(x-m)^2 + p$  is given in the diagram below. The  $x$ -intercepts are  $(1, 0)$  and  $(5, 0)$ . The vertex is  $V(m, 2)$ .



- Write down the value of
    - $m$ ;
    - $p$ .
  - Find  $d$ .
- 10 La función  $f(x) = kx^2 + 3x + 1$  corta al eje  $X$  en un único punto. Halle el valor de  $k$ .

11 Consider the graph of  $f$  shown below.



(a) On the **same** grid sketch the graph of  $y = f(-x)$ .

The following four diagrams show **images** of  $f$  under different transformations.

Diagram A

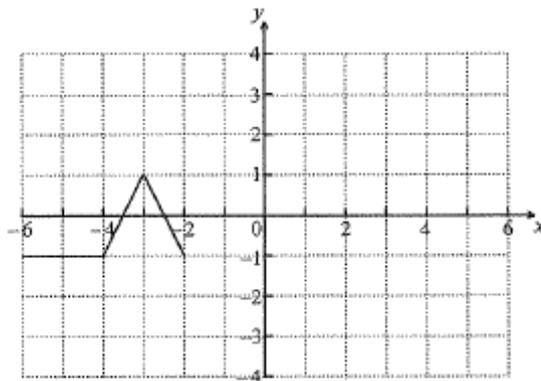


Diagram B

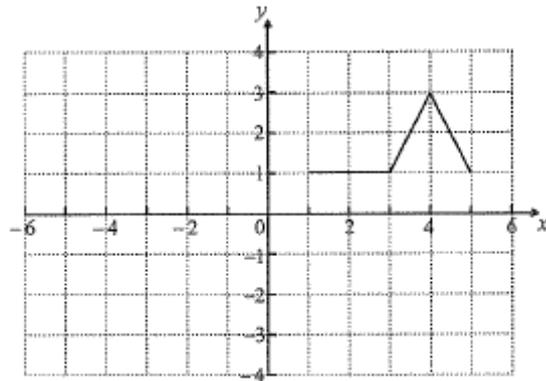


Diagram C

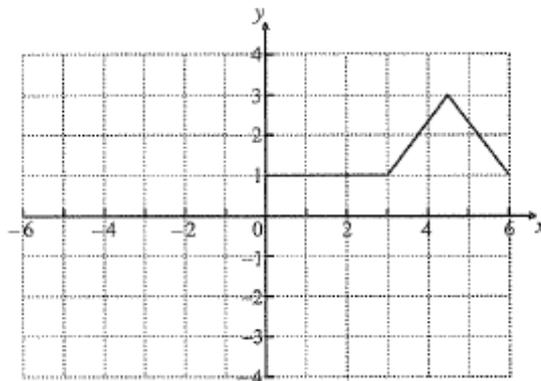
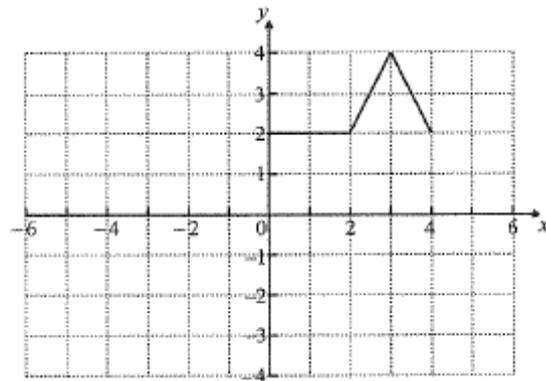


Diagram D



(b) Complete the following table.

Description of transformation	Diagram letter
Horizontal stretch with scale factor 1.5	
Maps $f$ to $f(x)+1$	

(c) Give a full geometric description of the transformation that gives the image in Diagram A.

- 12 (a) Exprese  $y = 2x^2 - 12x + 23$  en la forma  $y = 2(x - c)^2 + d$ .

La gráfica de  $y = x^2$  se transforma en la gráfica de  $y = 2x^2 - 12x + 23$  mediante las transformaciones

un estiramiento vertical de razón  $k$  **seguido de**  
una traslación horizontal de  $p$  unidades **seguida de**  
una traslación vertical de  $q$  unidades.

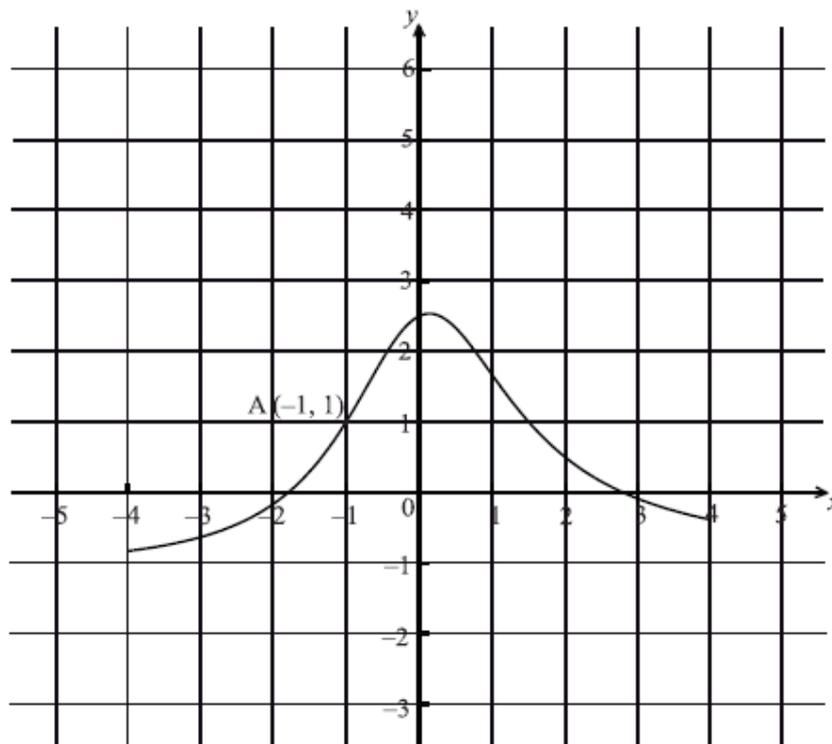
- (b) Escriba el valor de

(i)  $k$ ;

(ii)  $p$ ;

(iii)  $q$ .

- 13 El siguiente diagrama muestra la gráfica de una función  $f$ . El punto  $A(-1, 1)$  pertenece a la gráfica, e  $y = -1$  es una asíntota horizontal.

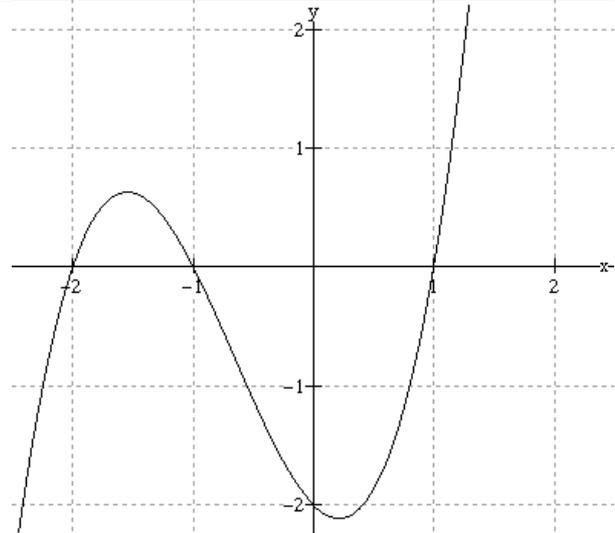


- (a) Sea  $g(x) = f(x-1) + 2$ . Dibuje aproximadamente la gráfica de  $g$  en el diagrama anterior.
- (b) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal de  $g$ .
- (c) Sea  $A'$  el punto en la gráfica de  $g$  que se corresponde con el punto  $A$ . Escriba las coordenadas de  $A'$ .

- 14 Representa: a)  $y = |x - 1|$                       b)  $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

15

En el diagrama se observa parte del gráfico de la función  $y = f(x)$   
 Representa en el mismo diagrama la gráfica de:  $y = f(x - 2) + 1$



16

Let  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

(a) Sketch the graph of  $f$ .

The graph of  $f$  is transformed to the graph of  $g$  by a translation of  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

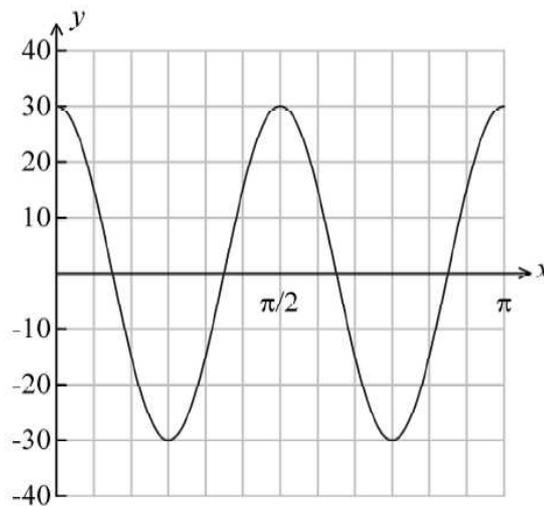
(b) Find an expression for  $g(x)$ .

(c) (i) Find the intercepts of  $g$ .

(ii) Write down the equations of the asymptotes of  $g$ .

(iii) Sketch the graph of  $g$ .

17 The graph of a function of the form  $y = p \cos qx$  is given in the diagram below.



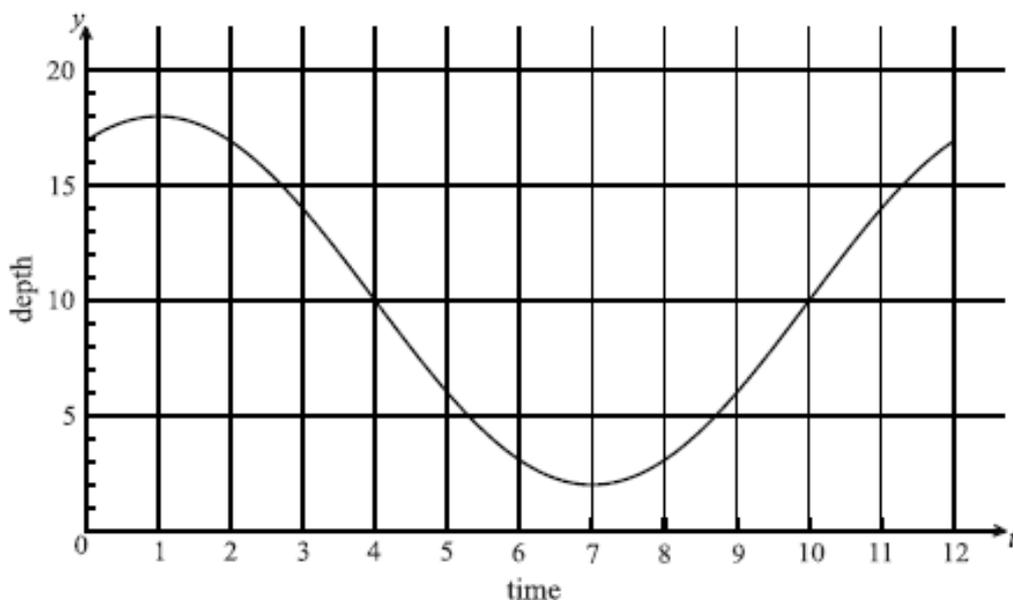
(a) Write down the value of  $p$ .

(b) Calculate the value of  $q$ .

18 Let  $f(x) = \frac{3x}{2} + 1$ ,  $g(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 1$ . Let  $h(x) = (g \circ f)(x)$ .

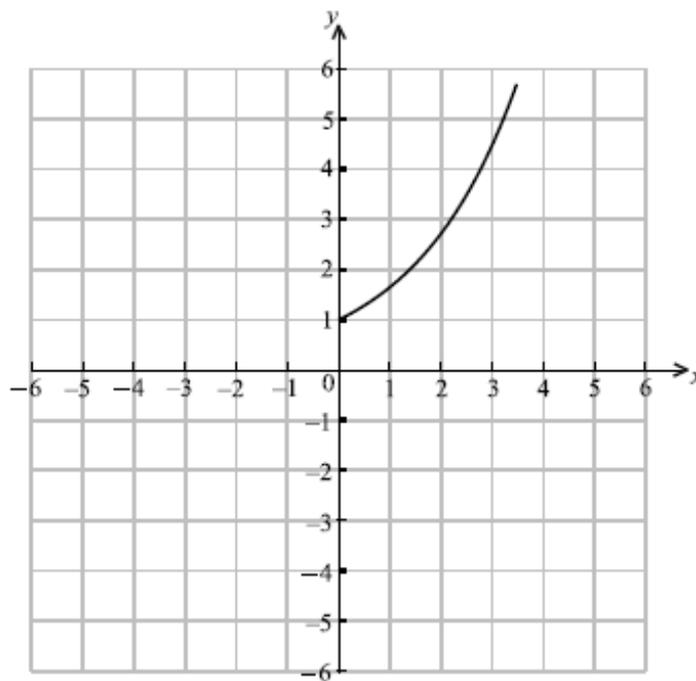
- Find an expression for  $h(x)$ .
- Write down the period of  $h$ .
- Write down the range of  $h$ .

19 The following graph shows the depth of water,  $y$  metres, at a point P, during one day. The time  $t$  is given in hours, from midnight to noon.



- Use the graph to write down an estimate of the value of  $t$  when
  - the depth of water is minimum;
  - the depth of water is maximum;
  - the depth of the water is increasing most rapidly.
- The depth of water can be modelled by the function  $y = A \cos(B(t-1)) + C$ .
  - Show that  $A = 8$ .
  - Write down the value of  $C$ .
  - Find the value of  $B$ .
- A sailor knows that he cannot sail past P when the depth of the water is less than 12 m. Calculate the values of  $t$  between which he cannot sail past P.

- 20 Let  $f$  be the function given by  $f(x) = e^{0.5x}$ ,  $0 \leq x \leq 3.5$ . The diagram shows the graph of  $f$ .



- (a) On the same diagram, sketch the graph of  $f^{-1}$ .
- (b) Write down the range of  $f^{-1}$ .
- (c) Find  $f^{-1}(x)$ .

## MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO INTERNACIONAL NIVEL MEDIO - Funciones en clase

21 Considere la función  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ .

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de  $f$ , para  $-1 \leq x \leq 5$ .

Esta función también se puede escribir de la forma  $f(x) = (x - p)^2 - 3$ .

(b) Escriba el valor de  $p$ .

La gráfica de  $g$  se obtiene realizando una simetría de la gráfica de  $f$  respecto al eje  $x$ , seguida de una traslación de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

(c) Compruebe que  $g(x) = -x^2 + 4x + 5$ .

Las gráficas de  $f$  y  $g$  se cortan en dos puntos.

(d) Escriba la coordenada  $x$  de cada uno de estos dos puntos.

22 Sean  $f(x) = 3 \ln x$  y  $g(x) = \ln 5x^3$ .

(a) Exprese  $g(x)$  de la forma  $f(x) + \ln a$ , donde  $a \in \mathbb{Z}^+$ .

(b) La gráfica de  $g$  es una transformación de la gráfica de  $f$ . Dé una descripción geométrica completa de esta transformación.

23 Sea  $g$  una función cuadrática tal que  $g(0) = 5$ . La recta  $x = 2$  es el eje de simetría de la gráfica de  $g$ .

(b) Halle  $g(4)$ .

La función  $g$  se puede expresar de la forma  $g(x) = a(x - h)^2 + 3$ .

(c) (i) Escriba el valor de  $h$ .

(ii) Halle el valor de  $a$ .

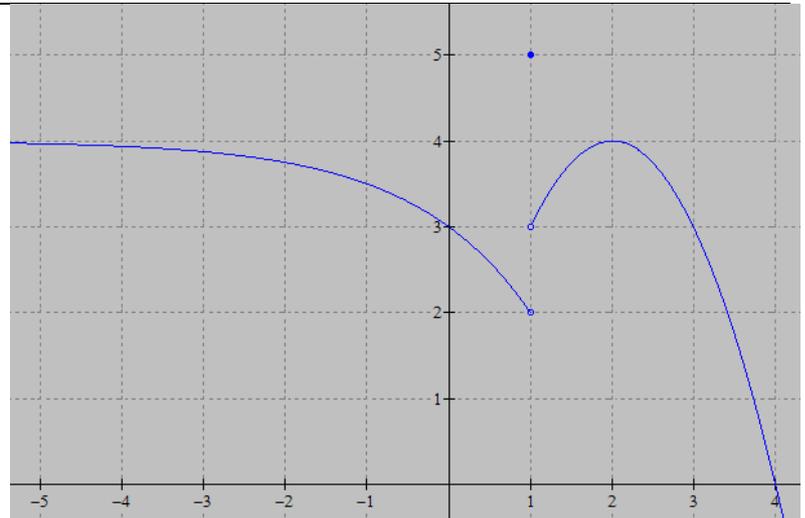
24 Razona cuáles de las siguientes funciones son pares / impares:

a)  $y = 2 - 3x$     b)  $y = 3 - x^2$     c)  $y = 3x^4 - x^2 + 1$     d)  $y = \frac{6}{x}$     e)  $y = 2x^2 - x^3$     f)  $y = -4$

25 Halla el dominio de estas funciones:

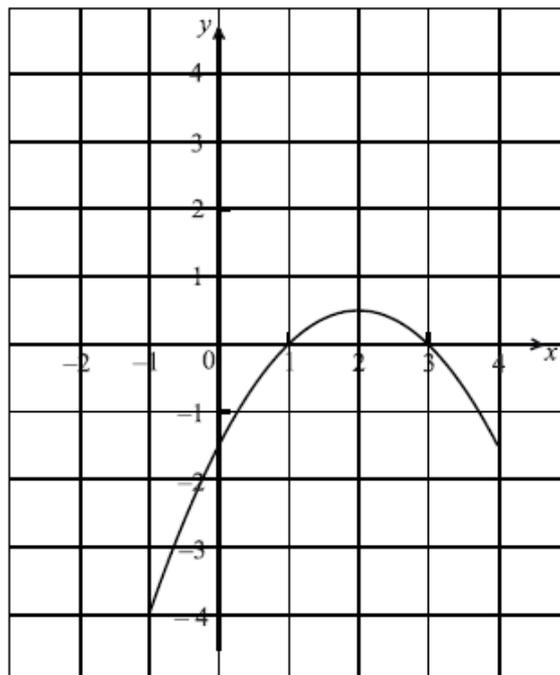
a)  $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$     b)  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$     c)  $f(x) = e^{-3x}$     d)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2x+3}}$   
 e)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+2}$     f)  $f(x) = \sqrt[5]{-x}$     g)  $f(x) = \ln(3x+2)$     h)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$

- 26** El diagrama adjunto muestra parte de la función  $f(x)$ , el resto de la gráfica sigue la tendencia mostrada. Contesta las siguientes preguntas:
- Halla su dominio y recorrido
  - Escribe la ecuación de sus asíntotas.
  - ¿Tiene extremos relativos? ¿Y absolutos?
  - Halla los intervalos de monotonía
  - Describe su curvatura.



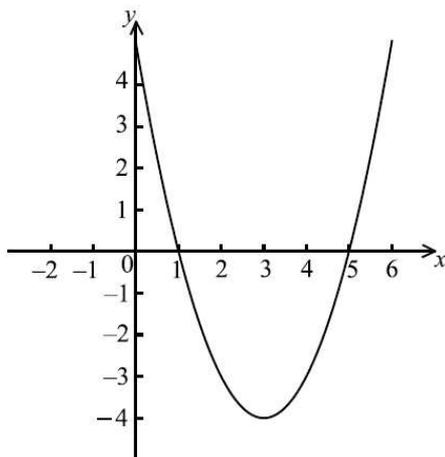
- 27** Sea  $f(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $x \geq -4$  y  $g(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Halle  $(g \circ f)(3)$ .
  - Halle  $f^{-1}(x)$ .
  - Escriba el dominio de  $f^{-1}$ .

- 28** Part of the graph of a function  $f$  is shown in the diagram below.



- On the same diagram sketch the graph of  $y = -f(x)$ .
- Let  $g(x) = f(x+3)$ .
  - Find  $g(-3)$ .
  - Describe fully the transformation that maps the graph of  $f$  to the graph of  $g$ .

- 29** The following diagram shows part of the graph of a quadratic function, with equation in the form  $y = (x-p)(x-q)$ , where  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

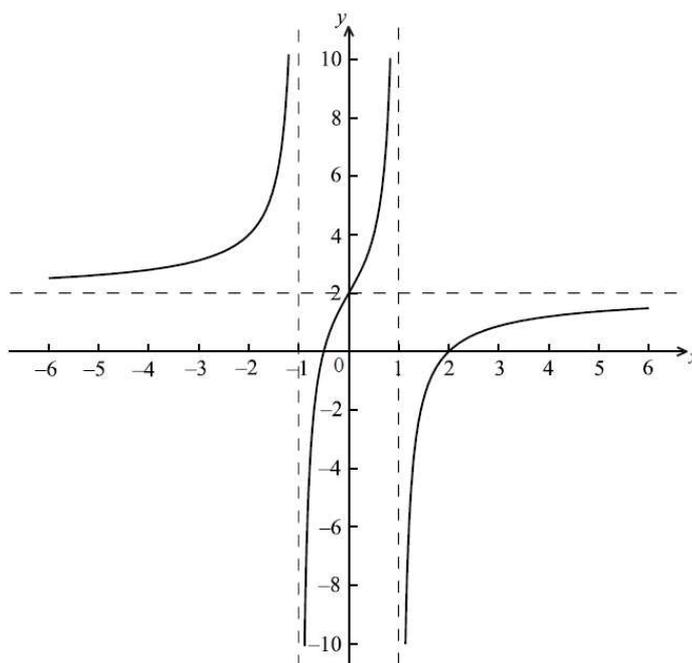


- (a) Write down
- the value of  $p$  and of  $q$ ;
  - the equation of the axis of symmetry of the curve.
- (b) Find the equation of the function in the form  $y = (x-h)^2 + k$ , where  $h, k \in \mathbb{Z}$ .

**30**

Sea  $f(x) = p - \frac{3x}{x^2 - q^2}$ , donde  $p, q \in \mathbb{R}^+$ .

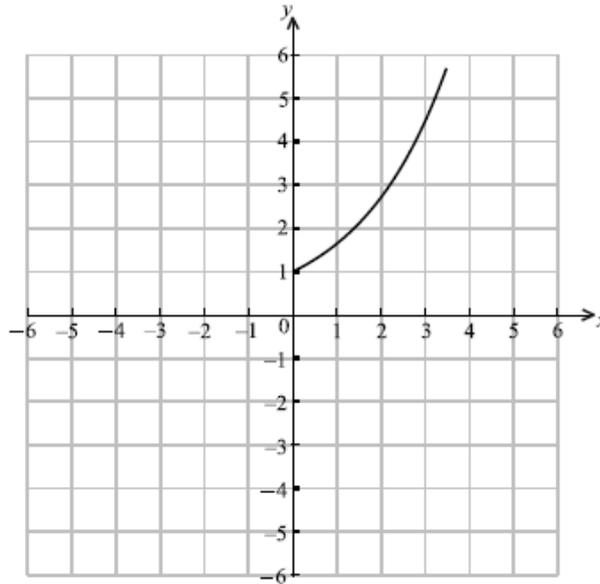
A continuación se muestra una parte de la gráfica de  $f$ , incluyendo las asíntotas.



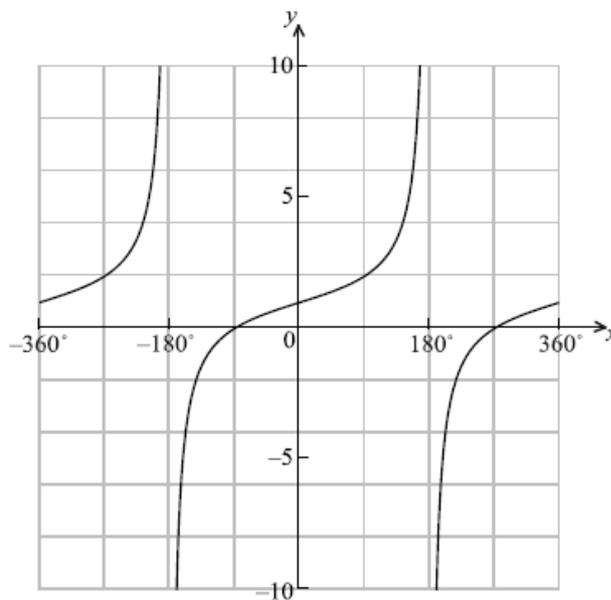
- (a) Las ecuaciones de las asíntotas son, respectivamente,  $x=1$ ,  $x=-1$ ,  $y=2$ .  
Escriba el valor de
- $p$ ;
  - $q$ .
- (b) Sea  $R$  la región delimitada por la gráfica de  $f$ , el eje  $x$  y el eje  $y$ .
- Halle la intersección de  $f$  con el semieje  $x$  negativo.



- 34 Let  $f$  be the function given by  $f(x) = e^{0.5x}$ ,  $0 \leq x \leq 3.5$ . The diagram shows the graph of  $f$ .



- (a) On the same diagram, sketch the graph of  $f^{-1}$ .
- (b) Write down the range of  $f^{-1}$ .
- (c) Find  $f^{-1}(x)$ .
- 35 The diagram below shows the graph of  $f(x) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  for  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .

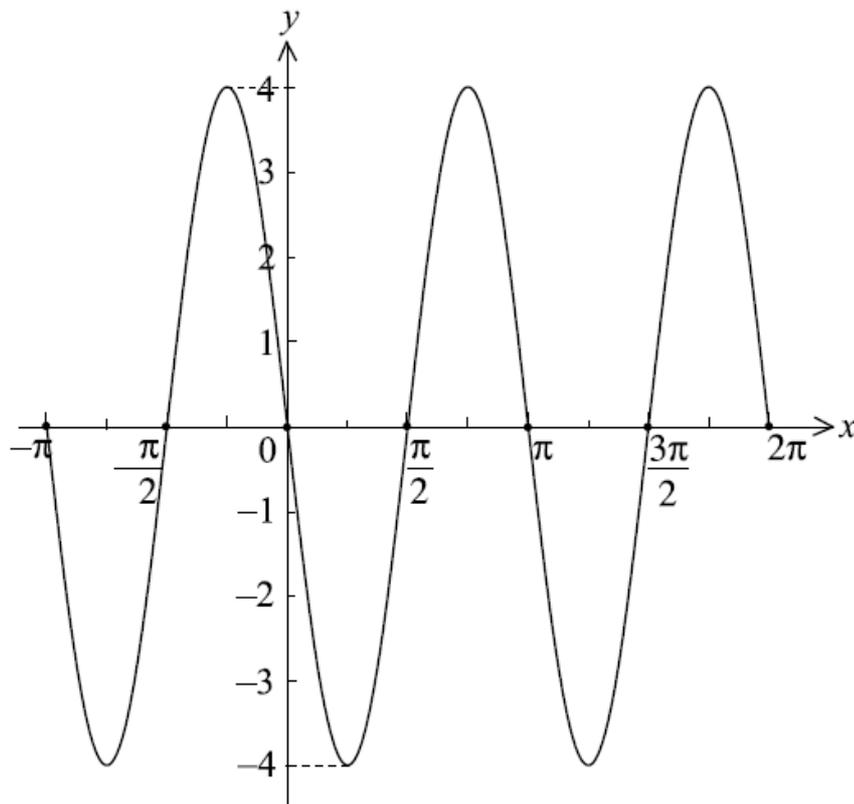


- (a) On the same diagram, draw the asymptotes.
- (b) Write down
- (i) the period of the function;
  - (ii) the value of  $f(90^\circ)$ .
- (c) Solve  $f(x) = 0$  for  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .

36 Let  $f(x) = a(x-4)^2 + 8$ .

- Write down the coordinates of the vertex of the curve of  $f$ .
- Given that  $f(7) = -10$ , find the value of  $a$ .
- Hence find the  $y$ -intercept of the curve of  $f$ .
- Halla los puntos de intersección con el eje X

37 Let  $f(x) = a \sin b(x-c)$ . Part of the graph of  $f$  is given below.

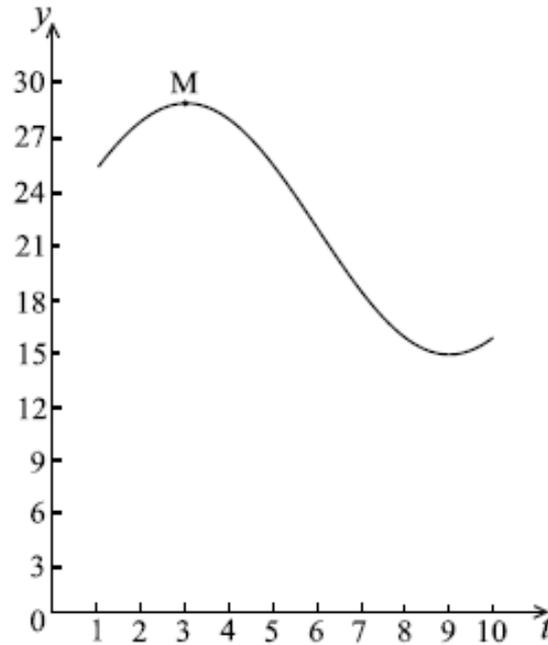


Given that  $a$ ,  $b$  and  $c$  are positive, find the value of  $a$ , of  $b$  and of  $c$ .

38 A spring is suspended from the ceiling. It is pulled down and released, and then oscillates up and down. Its length,  $l$  centimetres, is modelled by the function  $l = 33 + 5 \cos((720t)^\circ)$ , where  $t$  is time in seconds after release.

- Find the length of the spring after 1 second.
- Find the minimum length of the spring.
- Find the first time at which the length is 33 cm.
- What is the period of the motion?

- 39 Let  $f(t) = a \cos b(t-c) + d$ ,  $t \geq 0$ . Part of the graph of  $y = f(t)$  is given below.



When  $t = 3$ , there is a maximum value of 29, at M.

When  $t = 9$ , there is a minimum value of 15.

- (a) (i) Find the value of  $a$ .
- (ii) Show that  $b = \frac{\pi}{6}$ .
- (iii) Find the value of  $d$ .
- (iv) Write down a value for  $c$ .

The transformation  $P$  is given by a horizontal stretch of a scale factor of  $\frac{1}{2}$ , followed by a translation of  $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ .

- (b) Let  $M'$  be the image of M under  $P$ . Find the coordinates of  $M'$ .

The graph of  $g$  is the image of the graph of  $f$  under  $P$ .

- (c) Find  $g(t)$  in the form  $g(t) = 7 \cos B(t-C) + D$ .
- (d) Give a full geometric description of the transformation that maps the graph of  $g$  to the graph of  $f$ .

40 Let  $f(x) = \log_3 \frac{x}{2} + \log_3 16 - \log_3 4$ , for  $x > 0$ .

- (a) Show that  $f(x) = \log_3 2x$ .
- (b) Find the value of  $f(0.5)$  and of  $f(4.5)$ .

The function  $f$  can also be written in the form  $f(x) = \frac{\ln ax}{\ln b}$ .

- (c) (i) Write down the value of  $a$  and of  $b$ .
- (ii) Hence on graph paper, **sketch** the graph of  $f$ , for  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ , using a scale of 1 cm to 1 unit on each axis.
- (iii) Write down the equation of the asymptote.
- (d) Write down the value of  $f^{-1}(0)$ .

The point A lies on the graph of  $f$ . At A,  $x = 4.5$ .

- (e) On your diagram, sketch the graph of  $f^{-1}$ , noting clearly the image of point A.