MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO INTERNACIONAL NIVEL MEDIO – Serie 9: Funciones - Soluciones

1 Sean $f(x) = 4x - 2$ y $g(x) = -2x^2 + 8$.

(a) Halle $f^{-1}(x)$.

(b) Halle $(f \circ g)(1)$.

a) $y = 4x - 2 \rightarrow x = 4y - 2$; $x + 2 = 4y$; $y = \frac{x+2}{4}$; $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+2}{4}}$

b) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-2 \cdot 1^2 + 8) = f(6) = 4 \cdot 6 - 2 = \boxed{22}$

También: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x^2 + 8) = 4 \cdot (-2x^2 + 8) - 2 = -8x^2 + 30$

$(f \circ g)(1) = -8 \cdot 1^2 + 30 = 22$ ✓

2 Sea $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$ y $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $(g \circ f)(3)$.

(b) Halle $f^{-1}(x)$.

(c) Escriba el dominio de f^{-1}.

a) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(\sqrt{3+4}) = g(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = \boxed{7}$

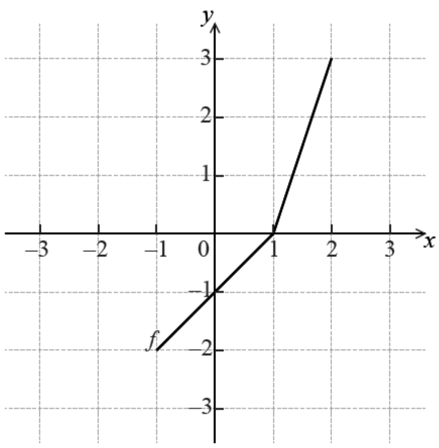
También: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+4}) = (\sqrt{x+4})^2 = x + 4$

$(g \circ f)(3) = 3 + 4 = 7$ ✓

b) $y = \sqrt{x+4} \rightarrow x = \sqrt{y+4}$; $x^2 = y + 4$; $y = x^2 - 4$; $\boxed{f^{-1}(x) = x^2 - 4}$

c) $f(x) = \sqrt{x+4}$ tiene de recorrido: $\operatorname{im} f = [0, +\infty)$ por lo que su función inversa f^{-1}, tendrá dicho intervalo como dominio: $\boxed{\operatorname{dom} f^{-1} = [0, +\infty)}$

3 La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de una función f, para $-1 \leq x \leq 2$.



(a) Escriba el valor de

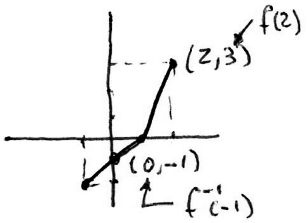
(i) $f(2)$;

(ii) $f^{-1}(-1)$.

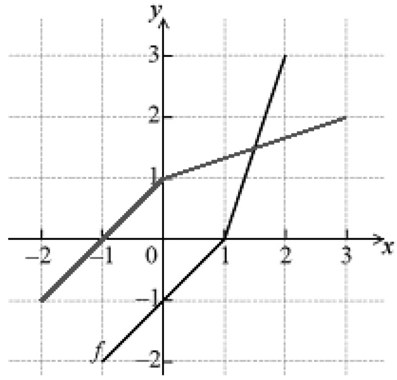
(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f^{-1} en la cuadrícula

a) $f(2) = \boxed{3}$

$f^{-1}(-1) = \boxed{0}$



b)



4 Razona cuáles de las siguientes funciones son pares / impares:

a) $y = 2x$ **b)** $y = -x^2$ **c)** $y = x^4 - x^2$ **d)** $y = \dfrac{6}{x}$ **e)** $y = x^3 + x^2$ **f)** $y = 5$

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x \\ f(-x) = -2x \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{IMPAR}}$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 \\ f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

c) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - x^2 \\ f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

d) $\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{6}{x} \\ f(-x) = \frac{6}{-x} \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{IMPAR}}$

e) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{array}$ no es ni PAR, ni IMPAR

f) $\left.\begin{array}{l} f(x) = 5 \\ f(-x) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

5 Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{10}{10^{3x}}$ **d)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ **g)** $f(x) = \log(x+2)$ **h)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 5x + 6}$

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3}$; $2x+3=0$; $x = -3/2$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-3/2\}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$

x^2-1: $+$ | -1 | $-$ | 1 | $+$

$\boxed{\text{dom} f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}$

c) $f(x) = \dfrac{10}{10^{3x}}$; $10^{3x} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$; $x-1=0$; $x=1$; $x+3=0$; $x=-3$

$\frac{x-1}{x+3}$: $+$ | -3 | $-$ | 1 | $+$

$\boxed{\text{dom} f = (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)}$

se anula el denominador

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $x^2+1=0$; $x^2 = -1$ ∄ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

g) $f(x) = \log(x+2)$ $x+2>0$; $x>-2$; $\boxed{\text{dom} f = (-2, +\infty)}$

h) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{2, 3\}}$

6 Considere las funciones f y g donde $f(x)=3x-5$ y $g(x)=x-2$.

(a) Halle la función inversa, f^{-1}.

(b) Dado que $g^{-1}(x)=x+2$, halle $(g^{-1}\circ f)(x)$.

(c) Dado también que $(f^{-1}\circ g)(x)=\dfrac{x+3}{3}$, resuelva $(f^{-1}\circ g)(x)=(g^{-1}\circ f)(x)$.

$f(x)=3x-5 \qquad g(x)=x-2$

a) $y=3x-5 \longrightarrow x=3y-5\ ;\ y=\dfrac{x+5}{3} \qquad \boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}}$

b) $g^{-1}(x)=x+2$

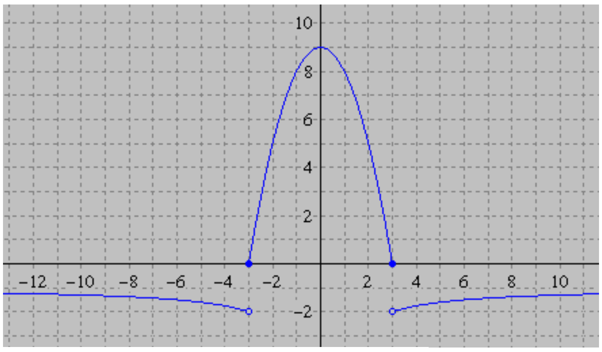
$g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(3x-5) = 3x-5+2 = \boxed{3x-3}$

c) $(f^{-1}\circ g)(x) = (g^{-1}\circ f^{-1})(x)$

$\left.\begin{array}{l}(f^{-1}\circ g)(x) = \dfrac{x+3}{3}\\ (g^{-1}\circ f)(x) = 3x-3\end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{x+3}{3}=3x-3\ ;\ x+3=9x-9\ ;\ 12=8x\ ;\ x=\dfrac{12}{8}=\boxed{1'5}$

7 Observa la función del dibujo y contesta a las siguientes preguntas:

a) Halla su dominio y recorrido
b) escribe la ecuación de sus asíntotas
c) ¿Es simétrica? ¿De qué tipo?
d) ¿Tiene extremos relativos? ¿Y absolutos?
e) Halla los intervalos de monotonía
f) Describe su curvatura.



a) $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$ $\boxed{\text{im} f = (-2,-1)\cup[0,9]}$

b) Asíntota Horizontal $\boxed{y=-1}$

c) Es simétrica respecto del eje y $\Rightarrow$ $\boxed{\text{PAR}}$

d) No tiene mínimo absoluto ni relativo

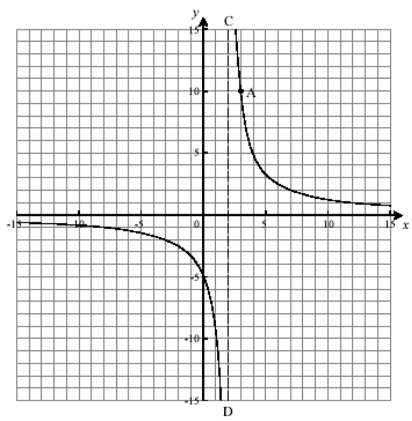
Tiene un máximo relativo, que es absoluto, en $x=0$ $\longrightarrow$ $\boxed{(0,9)}$

e) $f(x)$ es creciente en $(-3,0)\cup(3,+\infty)$
" " decreciente en $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

f) $f(x)$ es $\boxed{\text{convexa en } \mathbb{R}-\{-3,3\}}$

8 La siguiente figura muestra parte de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{q}{x-p}$. La curva pasa por el punto A(3, 10).

La recta (CD) es una asíntota. Halle los valores de ***p*** y ***q***

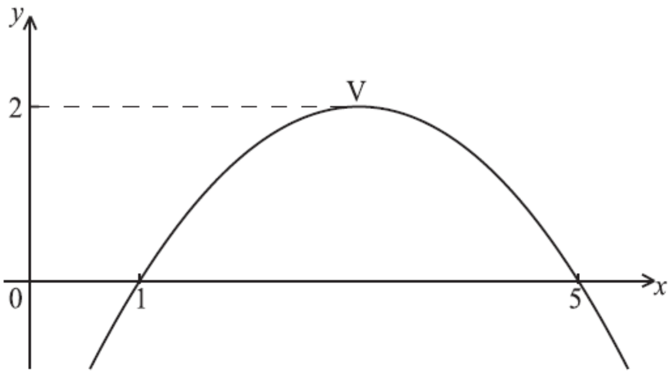


Asíntota $x=2$ $\Rightarrow$ $\boxed{p=2}$

$f(x)=\dfrac{q}{x-2}$

$A(3,10) \Rightarrow \quad 10=\dfrac{q}{3-2}\ ;\ \boxed{q=10}$

9 Part of the graph of the function $y = d(x-m)^2 + p$ is given in the diagram below. The x-intercepts are $(1, 0)$ and $(5, 0)$. The vertex is $V(m, 2)$.



(a) Write down the value of

(i) m;

(ii) p.

(b) Find d.

$V(m,2)$ $\quad m = \frac{1+5}{2} = \boxed{3}$

$V(3,2) \Rightarrow y = d(x-3)^2+2 \Rightarrow \boxed{p=2}$ $\quad y = d(x-3)^2+2$

$P(1,0) \Rightarrow 0 = d(1-3)^2+2 \; ; \quad 0 = 4d+2 \; ; \quad \boxed{d = -\frac{1}{2}}$

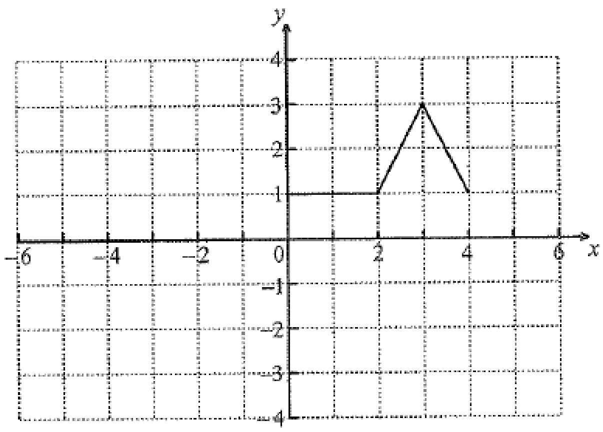
10 La función $f(x) = kx^2 + 3x + 1$ corta al eje X en un único punto. Halle el valor de k.

$f(x) = Kx^2+3x+1$

$y=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4K}}{2}$

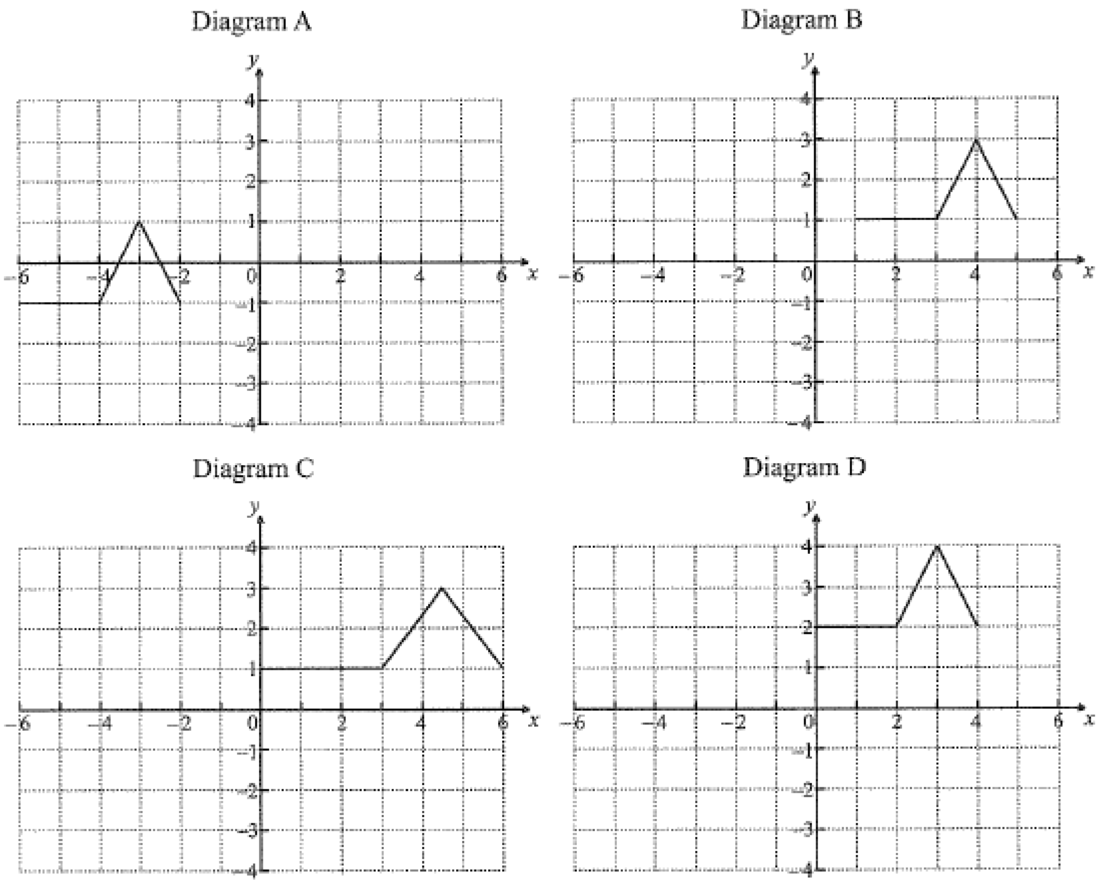
- $9-4K>0 \rightarrow$ 2 puntos
- $9-4K=0 \rightarrow$ 1 punto $\Rightarrow \boxed{K = 9/4}$
- $9-4K<0 \rightarrow$ Ningún punto

11 Consider the graph of f shown below.



(a) On the **same** grid sketch the graph of $y = f(-x)$.

The following four diagrams show **images** of f under different transformations.

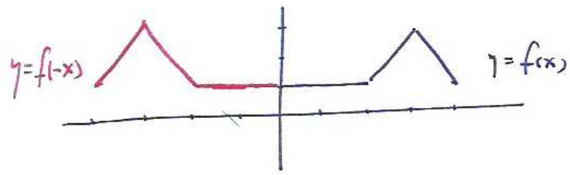


(b) Complete the following table.

Description of transformation	**Diagram letter**
Horizontal stretch with scale factor 1.5	
Maps f to $f(x)+1$	

(c) Give a full geometric description of the transformation that gives the image in Diagram A.

a]



b] Deformación Horizontal con factor 1.5 : $\boxed{C}$
Traslación Vertical de 1 unidad : $\boxed{D}$

c] A es una Traslación de la figura inicial siguiendo el vector $\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$, es decir 6 unidades a la izquierda, 2 hacia abajo.

12 (a) Exprese $y = 2x^2 - 12x + 23$ en la forma $y = 2(x-c)^2 + d$.

La gráfica de $y = x^2$ se transforma en la gráfica de $y = 2x^2 - 12x + 23$ mediante las transformaciones

un estiramiento vertical de razón k **seguido de**
una traslación horizontal de p unidades **seguida de**
una traslación vertical de q unidades.

(b) Escriba el valor de

(i) k;

(ii) p;

(iii) q.

$y = 2x^2 - 12x + 23$

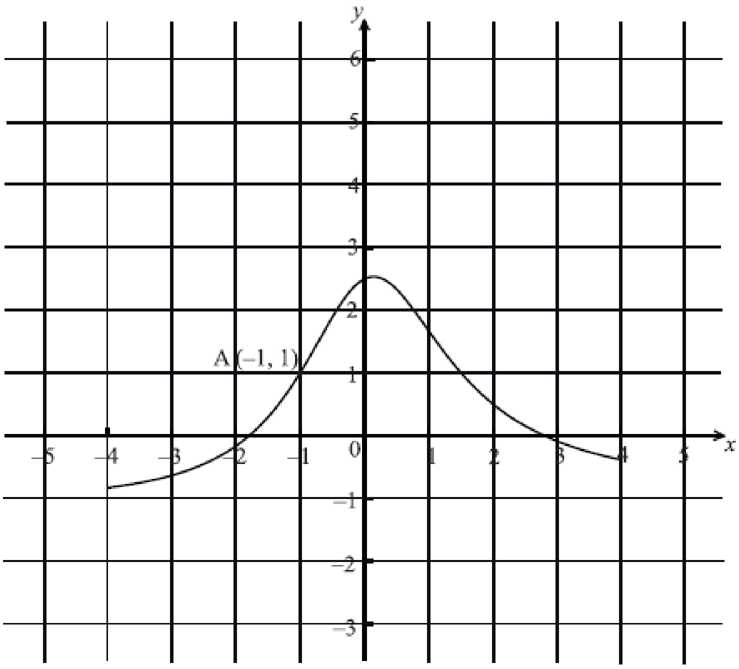
$x_v = \frac{12}{4} = 3 \longrightarrow y_v = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 23 = 18 - 36 + 23 = 5$

$\boxed{y = 2(x-3)^2 + 5}$

$y = x^2 \longrightarrow y = 2x^2 \longrightarrow y = 2(x-3)^2 \longrightarrow y = 2(x-3)^2 + 5$

Estiramiento vertical razón $\boxed{k=2}$ — Traslación Horizontal de $\boxed{p=3}$ unidades — Traslación Vertical de $\boxed{q=5}$ unidades

13 El siguiente diagrama muestra la gráfica de una función f. El punto A(−1, 1) pertenece a la gráfica, e $y = -1$ es una asíntota horizontal.



(a) Sea $g(x) = f(x-1) + 2$. Dibuje aproximadamente la gráfica de g en el diagrama anterior.

(b) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal de g.

(c) Sea A′ el punto en la gráfica de g que se corresponde con el punto A. Escriba las coordenadas de A′.

a) $g(x) = f(x-1)+2$

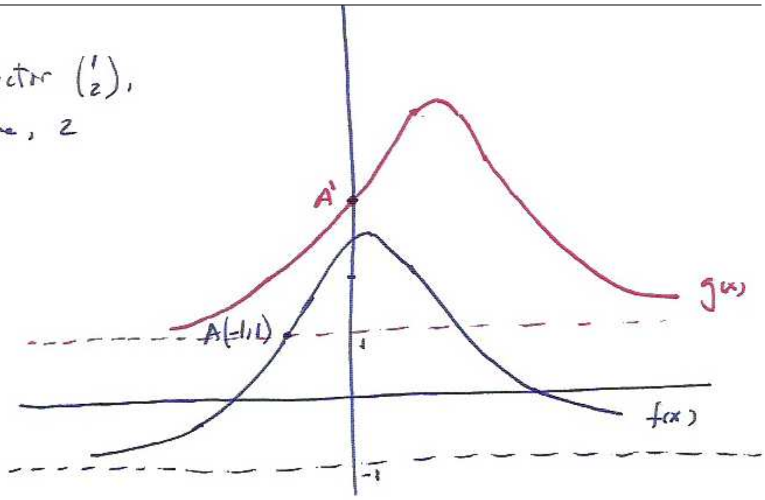
Es una Traslación según el vector $\binom{1}{2}$, es decir, 1 unidad a la derecha, 2 unidades hacia arriba

b) $y = -1+2 = 1$

$\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y = 1}$

c) $A(-1,1)$

$\left.\begin{array}{l} x = -1+1 = 0 \\ y = 1+2 = 3 \end{array}\right\}$ $\boxed{A'(0,3)}$

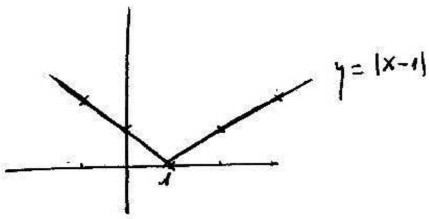


14 Representa: a) y = | x - 1 | b) $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$

a) $y = |x-1|$

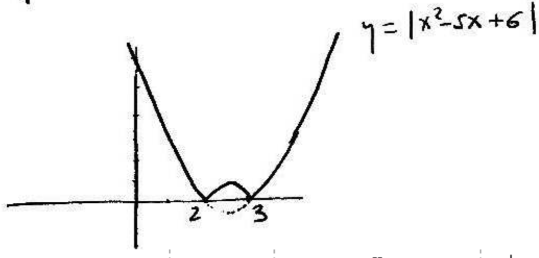
$x-1=0 \rightarrow x=1$

x	y
-1	2
0	1
1	0
2	1
3	2



b) $y = |x^2-5x+6|$

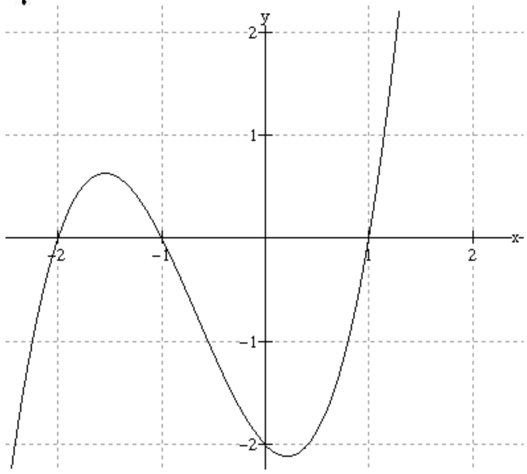
$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$



15

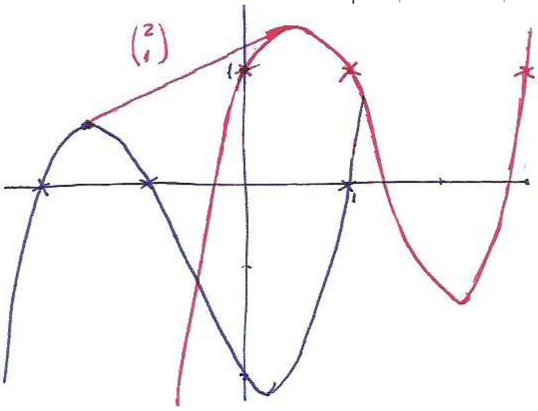
En el diagrama se observa parte del gráfico de la función $y = f(x)$

Representa en el mismo diagrama la gráfica de: $y = f(x-2)+1$



$y = f(x-2)+1$

Se trata de una Traslación 2 unidades a la derecha, 1 unidad hacia arriba



16 Let $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

(a) Sketch the graph of f.

The graph of f is transformed to the graph of g by a translation of $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) Find an expression for $g(x)$.

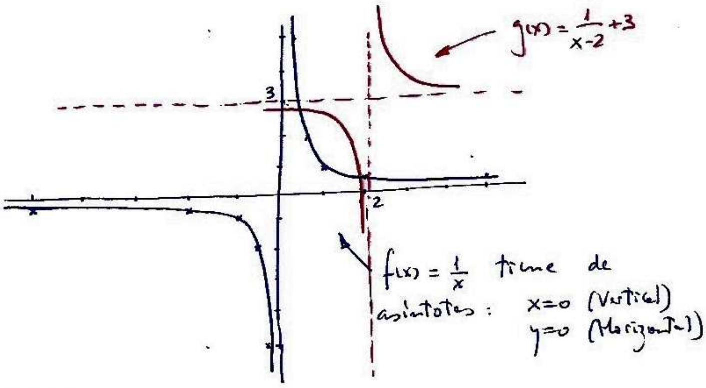
(c) (i) Find the intercepts of g.

(ii) Write down the equations of the asymptotes of g.

(iii) Sketch the graph of g.

a) $y = \dfrac{1}{x}$

x	y
-5	-0'2
-2	-0'5
-1	-1
-0'5	-2
-0'2	-5
0'2	5
0'5	2
1	1
2	0'5
5	0'2



b) $g(x) = \boxed{\dfrac{1}{x-2} + 3} = \boxed{\dfrac{3x-5}{x-2}}$

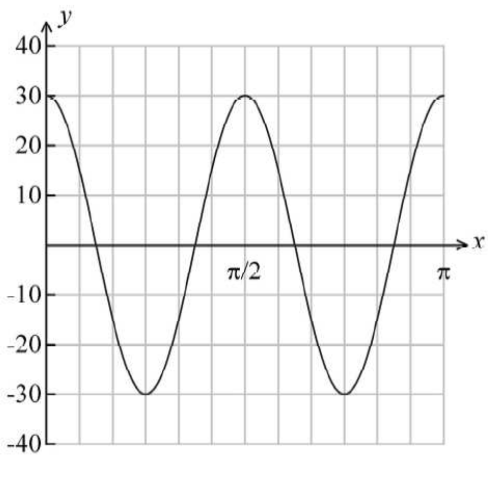
c) $x=0 \rightarrow y = \frac{-5}{-2} = 2'5$ $\boxed{(0, 2'5)}$

$y=0 \rightarrow \frac{3x-5}{x-2} = 0$; $3x-5=0$: $x = 5/3$ $\boxed{(5/3, 0)}$

Asíntota Vertical : $x = 0+2 \rightarrow \boxed{x=2}$

Asíntota Horizontal : $y = 0+3 \rightarrow \boxed{y=3}$

17 The graph of a function of the form $y = p\cos qx$ is given in the diagram below.



(a) Write down the value of p.

(b) Calculate the value of q.

$y = p \cos qx$

a) $\boxed{p = 30}$ Porque la curva toma valores entre -30 y 30.

b) El periodo de $y = p\cos qx$ es $\frac{\pi}{2}$, según se ve en su gráfico; como debería de ser de 2π:

$q \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{q = 4}$

18

Let $f(x)=\dfrac{3x}{2}+1$, $g(x)=4\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)-1$. Let $h(x)=(g\circ f)(x)$.

(a) Find an expression for $h(x)$.

(b) Write down the period of h.

(c) Write down the range of h.

a) $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x}{2}+1\right) = 4\cos\dfrac{\frac{3x}{2}+1}{3} - 1 = \boxed{4\cos\dfrac{3x+2}{6} - 1}$

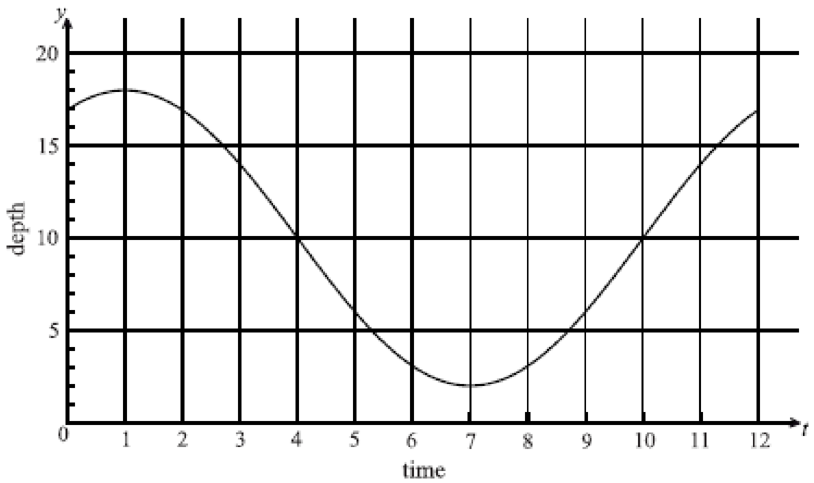
b) $\frac{3x}{6} = 360° \Rightarrow x = 720°$ $\boxed{\text{periodo de } g(x) = 720° = 4\pi \text{ rad}}$

c) $-1 \le \cos\alpha \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\cos\alpha \le 4 \Rightarrow -4-1 \le 4\cos\alpha - 1 \le 4-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5 \le 4\cos\alpha - 1 \le 3$

$\boxed{\text{Recorrido} = [-5, 3]}$

19 The following graph shows the depth of water, y metres, at a point P, during one day. The time t is given in hours, from midnight to noon.



(a) Use the graph to write down an estimate of the value of t when

(i) the depth of water is minimum;

(ii) the depth of water is maximum;

(iii) the depth of the water is increasing most rapidly.

(b) The depth of water can be modelled by the function $y = A\cos(B(t-1)) + C$.

(i) Show that $A = 8$.

(ii) Write down the value of C.

(iii) Find the value of B.

(c) A sailor knows that he cannot sail past P when the depth of the water is less than 12 m. Calculate the values of t between which he cannot sail past P.

a) En $t = 7$h la profundidad es mínima (2 m)
En $t = 1$h la profundidad es máxima (18 m)
En $t = 10$h la profundidad crece con mayor rapidez.

b) $y = A\cos(B(t-1)) + C$

La curva oscila entre 2m y 18 m $\rightarrow$ $18-2 = 16$; $\frac{16}{2} = \boxed{8}$
$\rightarrow$ $\frac{18+2}{2} = \boxed{10}$ $\rightarrow$ $10+8 = 18$, $10-8 = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = 8}$; $\boxed{C = 10}$

Entre el máximo (1 h) y el mínimo (7 h) pasan 6h, luego el periodo es : $2 \cdot 6 = \boxed{12h}$

Como el periodo del coseno es 360° :

$B \cdot 12 = 360 \Rightarrow \boxed{B = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}}$

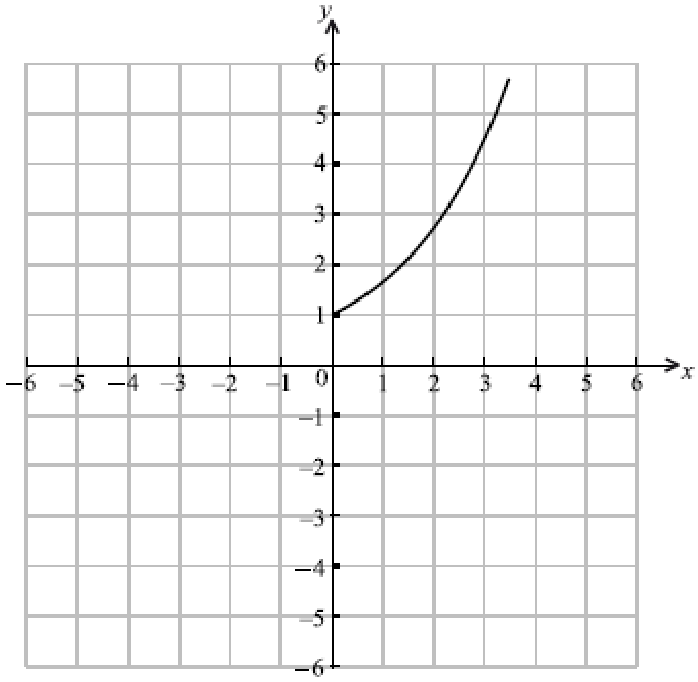
c) $y = 8\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-1)\right] + 10$

$y = 12$ m $\Rightarrow$ $12 = 8\cos\frac{\pi(t-1)}{6} + 10$; $2 = 8\cos\frac{\pi(t-1)}{6}$; $0'25 = \cos\frac{\pi(t-1)}{6}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi(t-1)}{6} = \begin{cases} 1'318 \text{ rad} \Rightarrow t = 1 + \frac{6 \cdot 1'318}{\pi} = \boxed{3'52\text{ h}} \\ 4'965 \text{ rad} \Rightarrow t = 1 + \frac{6 \cdot 4'965}{\pi} = \boxed{10'5\text{ h}} \end{cases}$$

También se puede hacer en grados :

20 Let f be the function given by $f(x) = e^{0.5x}$, $0 \le x \le 3.5$. The diagram shows the graph of f.



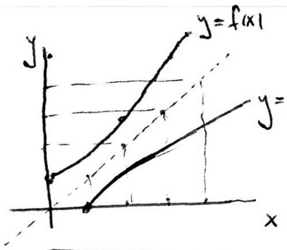
(a) On the same diagram, sketch the graph of f^{-1}.

(b) Write down the range of f^{-1}.

(c) Find $f^{-1}(x)$.

b) $\text{dom} f = [0, 3'5] \Rightarrow \boxed{\text{Im} f^{-1} = [0, 3'5]}$

a)



← Son simétricas respecto de la bisectriz del 1er/3er cuadrantes.

c) $y = e^{0'5x}$

$\downarrow$

$x = e^{0'5y}$; $\ln x = 0'5 \cdot y$; $y = \frac{1}{0'5} \ln x = 2 \ln x$; $\boxed{f^{-1}(x) = 2 \ln x}$

21 Considere la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de f, para $-1 \le x \le 5$.

Esta función también se puede escribir de la forma $f(x) = (x-p)^2 - 3$.

(b) Escriba el valor de p.

La gráfica de g se obtiene realizando una simetría de la gráfica de f respecto al eje x, seguida de una traslación de $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) Compruebe que $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Las gráficas de f y g se cortan en dos puntos.

(d) Escriba la coordenada x de cada uno de estos dos puntos.

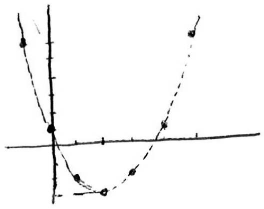
a) $y = x^2 - 4x + 1$

$x_v = \frac{+4}{2} = 2 \longrightarrow y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

$y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

x	y
-1	6
0	1
1	-2
V 2	-3
3	-2
4	1
5	6



b) $V = (2, -3) \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 - 3$; $\boxed{p = 2}$

c) $x^2 - 4x + 1 \xrightarrow[\text{respecto eje } X]{\text{Simetría}} -(x^2 - 4x + 1) = -x^2 + 4x - 1 \xrightarrow[\text{vector } (0,6)]{\text{Traslación}} -x^2 + 4x - 1 + 6 = -x^2 + 4x + 5$ ✓

d) $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = -x^2 + 4x + 5 \end{array}\right\}$ $x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 4x + 5$; $2x^2 - 8x - 4 = 0$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{6}}$

22 Sean $f(x) = 3\ln x$ y $g(x) = \ln 5x^3$.

(a) Exprese $g(x)$ de la forma $f(x) + \ln a$, donde $a \in \mathbb{Z}^+$.

(b) La gráfica de g es una transformación de la gráfica de f. Dé una descripción geométrica completa de esta transformación.

a) $g(x) = \ln(5x^3) = \ln 5 + \ln x^3 = \ln 5 + \underbrace{3\ln x} = \underbrace{f(x)} + \ln 5$ ✓ $\boxed{a = 5}$

b) $g(x) = f(x) + \ln 5$

$g(x)$ es la función que resulta al trasladar $f(x)$ mediante el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \ln 5 \end{pmatrix}$

23 Sea g una función cuadrática tal que $g(0)=5$. La recta $x=2$ es el eje de simetría de la gráfica de g.

(b) Halle $g(4)$.

La función g se puede expresar de la forma $g(x)=a(x-h)^2+3$.

(c) (i) Escriba el valor de h.

(ii) Halle el valor de a.

$g(x) = ax^2+bx+c$

b) Si $x=2$ es el eje de simetría, $g(0)=g(4) \Rightarrow \boxed{g(4)=5}$

c) Si $x=2$ es el eje de simetría, $x_v=2 \Rightarrow \boxed{g(x)=a(x-2)^2+3}$ $\boxed{h=2}$

$g(0)=5 \Rightarrow 5=a\cdot(-2)^2+3$; $2=4a$; $\boxed{a=1/2}$

24 Razona cuáles de las siguientes funciones son pares / impares:

a) $y=2-3x$ **b)** $y=3-x^2$ **c)** $y=3x^4-x^2+1$ **d)** $y=\dfrac{6}{x}$ **e)** $y=2x^2-x^3$ **f)** $y=-4$

a) $f(x)=2-3x$, $f(-x)=2+3x$

$f(x)\neq f(-x) \Rightarrow$ No es par

$f(x)\neq -f(-x) \Rightarrow$ No es impar

b) $f(x)=3-x^2$, $f(-x)=3-(-x)^2=3-x^2$

$f(x)=f(-x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

c) $f(x)=3x^4-x^2+1$, $f(-x)=3(-x)^4-(-x)^2+1=3x^4-x^2+1$

$f(x)=f(-x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

d) $f(x)=\dfrac{6}{x}$, $f(-x)=\dfrac{6}{-x}=-\dfrac{6}{x}$

$f(x)=-f(-x) \Rightarrow \boxed{\text{IMPAR}}$

e) $f(x)=2x^2-x^3$, $f(-x)=2(-x)^2-(-x)^3=2x^2+x^3$

$f(x)\neq f(-x) \Rightarrow$ no es par

$f(x)\neq -f(-x) \Rightarrow$ no es impar

f) $f(x)=-4$, $f(-x)=-4$

$f(x)=f(-x) \Rightarrow \boxed{\text{PAR}}$

25 Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-5}$ **b)** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ **c)** $f(x)=e^{-3x}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{2x+3}}$

e) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+2}$ **f)** $f(x)=\sqrt[5]{-x}$ **g)** $f(x)=\ln(3x+2)$ **h)** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x-5}$

$2x-5=0 \rightarrow x = 5/2 \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{5/2\}}$

b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$9-x^2=0 \rightarrow x = \pm 3$

Signo $9-x^2$: $\quad - \;\big|_{-3}\; + \;\big|_{3}\; - \quad \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = [-3,3]}$

c) $f(x) = e^{-3x} \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$ por ser exponencial.

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{2x+3}}$

$x-4=0 \rightarrow x=4$

$2x+3=0 \rightarrow x=-3/2$

Signo $\dfrac{x-4}{2x+3}$: $\quad + \;\big|_{-3/2}\; - \;\big|_{4}\; + \quad \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = (-\infty, -3/2) \cup [4, +\infty)}$

abierto porque se anula el denominador

e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x+2}$

$x^2+x+2=0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \;\nexists \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

f) $f(x) = \sqrt[5]{-x} \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$ porque el índice es impar.

g) $f(x) = \ln(3x+2)$

$3x+2=0 \rightarrow x = -2/3$

Signo $3x+2$: $\quad - \;\big|_{-2/3}\; + \quad \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = (-2/3, +\infty)}$

abierto porque no existe $\ln 0$

h) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$

$x^2-x-6=0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{3, -2\}}$

26 El diagrama adjunto muestra parte de la función f(x), el resto de la gráfica sigue la tendencia mostrada. Contesta las siguientes preguntas:

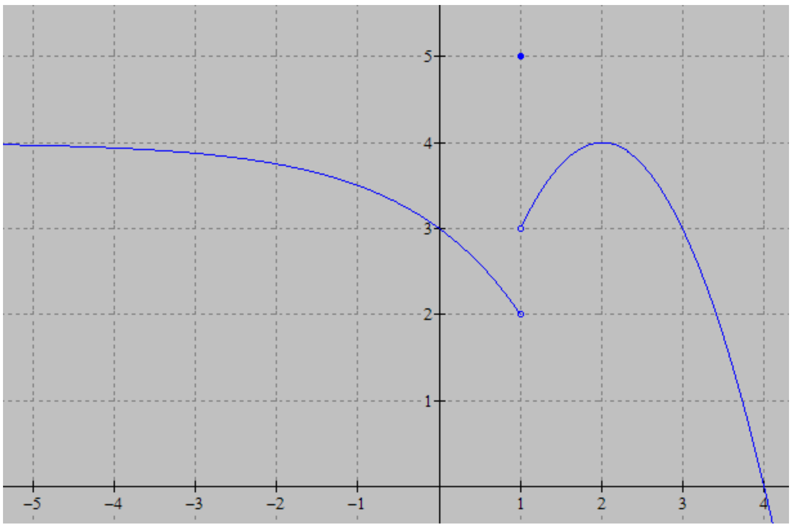
a) Halla su dominio y recorrido

b) Escribe la ecuación de sus asíntotas.

c) ¿Tiene extremos relativos? ¿Y absolutos?

d) Halla los intervalos de monotonía

e) Describe su curvatura.



a) dom $f = \mathbb{R}$; im $f = (-\infty, 4] \cup \{5\}$

b) Asíntota Horizontal $y=4$ cuando $x \to -\infty$

c) Tiene un máximo relativo en $x=2$
No tiene mínimos relativos
No tiene mínimo absoluto
Tiene máximo absoluto en $x=1$

d) $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
$f(x)$ es creciente en $(1, 2)$

e) $f(x)$ es convexa en $\mathbb{R} - \{1\}$

27 Sea $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$ y $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $(g \circ f)(3)$.

(b) Halle $f^{-1}(x)$.

(c) Escriba el dominio de f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x+4}$; $g(x) = x^2$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+4}) = (\sqrt{x+4})^2 = \boxed{x+4}$

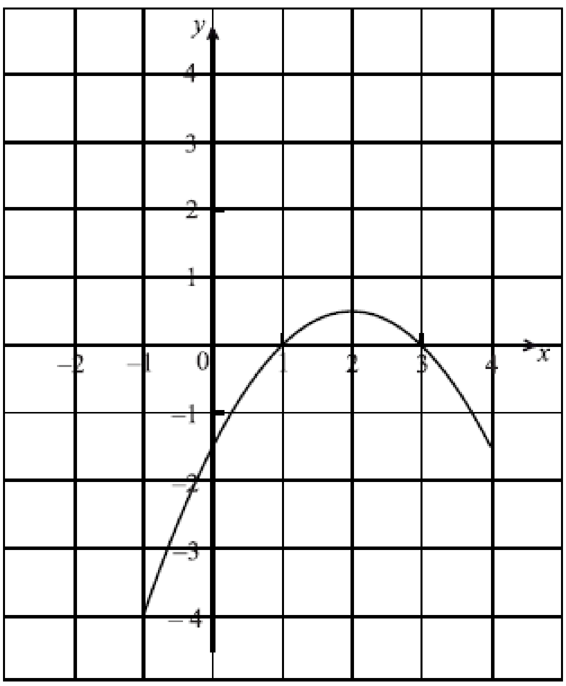
$(g \circ f)(3) = 3+4 = \boxed{7}$

b) $y = \sqrt{x+4}$

$x = \sqrt{y+4}$; $x^2 = y+4$; $y = x^2 - 4 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = x^2 - 4}$

c) $f(x) = \sqrt{x+4}$ tiene: dom $f = [-4, +\infty)$ y recorrido $= [0, +\infty)$
por lo que $f^{-1}(x) = x^2 - 4$ tendrá de $\boxed{\text{dominio } [0, +\infty)}$ y $[-4, +\infty)$ de recorrido

28 Part of the graph of a function f is shown in the diagram below.



(a) On the same diagram sketch the graph of $y = -f(x)$.

(b) Let $g(x) = f(x+3)$.

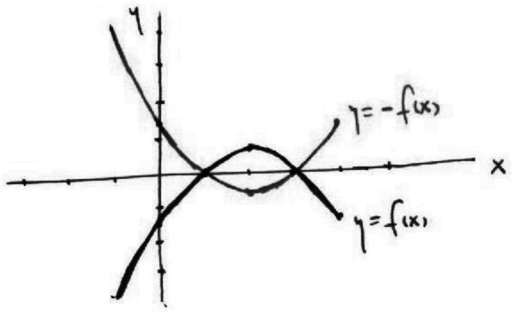
(i) Find $g(-3)$.

(ii) Describe **fully** the transformation that maps the graph of f to the graph of g.

b) $g(x) = f(x+3)$

$g(-3) = f(-3+3) = f(0) = \boxed{-1'5}$

a)



$g(-4) = f(-4+3) = f(-1) = -4$

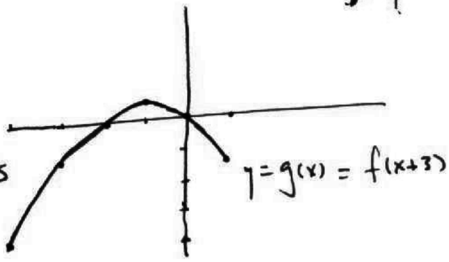
$g(-3) = -1'5$

$g(-2) = f(-2+3) = f(1) = 0$

$g(-1) = f(-1+3) = f(2) = 0'5$

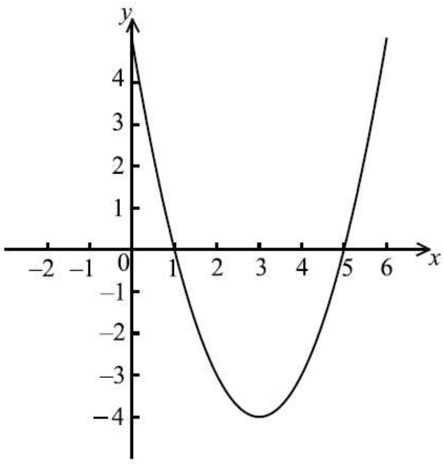
$g(0) = f(0+3) = f(3) = 0$

$g(1) = f(1+3) = f(4) = -1'5$



Es una traslación de la función f(x) mediante el vector (-3,0)

29 The following diagram shows part of the graph of a quadratic function, with equation in the form $y = (x-p)(x-q)$, where $p, q \in \mathbb{Z}$.



(a) Write down

(i) the value of p and of q;

(ii) the equation of the axis of symmetry of the curve.

(b) Find the equation of the function in the form $y = (x-h)^2 + k$, where $h, k \in \mathbb{Z}$.

a) i) $\boxed{\begin{matrix} p=1 \\ q=5 \end{matrix}}$

ii) Eje de simetría : $\boxed{x=3}$

b) $y=(x-1)(x-5) = x^2-5x-x+5 = x^2-6x+5 = x^2-6x+9-9+5 = (x-3)^2-4 \Downarrow \boxed{\begin{matrix} h=3 \\ k=-4 \end{matrix}}$

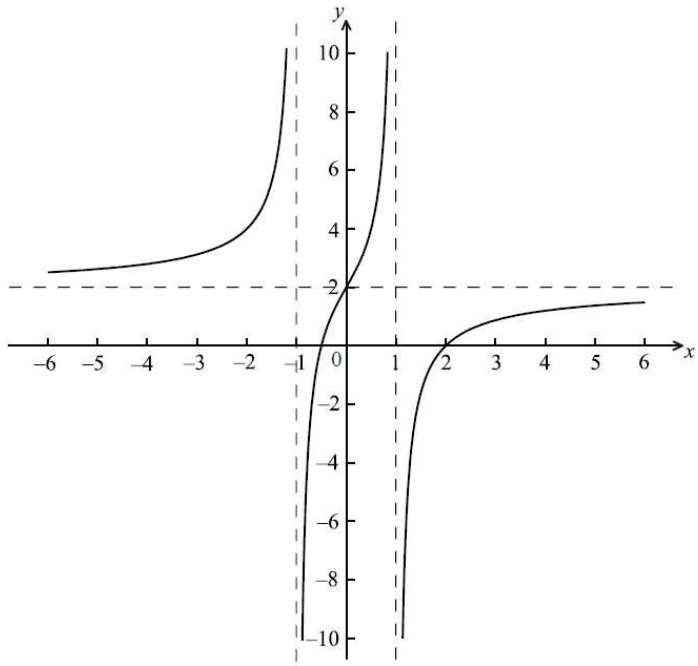
También se puede hacer con el vértice:

$V(3,-4) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} h=3 \\ k=-4 \end{matrix}}$

30

Sea $f(x) = p - \dfrac{3x}{x^2-q^2}$, donde $p,\ q \in \mathbb{R}^+$.

A continuación se muestra una parte de la gráfica de f, incluyendo las asíntotas.



(a) Las ecuaciones de las asíntotas son, respectivamente, $x=1$, $x=-1$, $y=2$. Escriba el valor de

(i) p;

(ii) q.

(b) Sea R la región delimitada por la gráfica de f, el eje x y el eje y.

(i) Halle la intersección de f con el semieje x negativo.

a) $x^2-q^2=0$; $x=\pm q$

Asíntotas Verticales $\left.\begin{matrix} x=1 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{q=1}$

Asíntota Horizontal $y=2 \Rightarrow \boxed{p=2}$

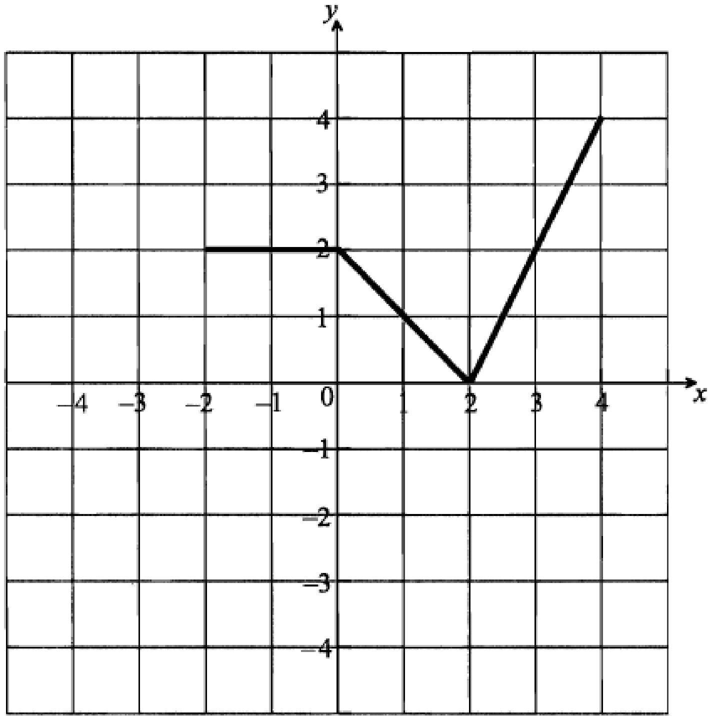
b) $f(x) = 2 - \dfrac{3x}{x^2-1}$

$y=0 \Rightarrow 2-\dfrac{3x}{x^2-1}=0$; $2 = \dfrac{3x}{x^2-1}$; $2x^2-2=3x$; $2x^2-3x-2=0$

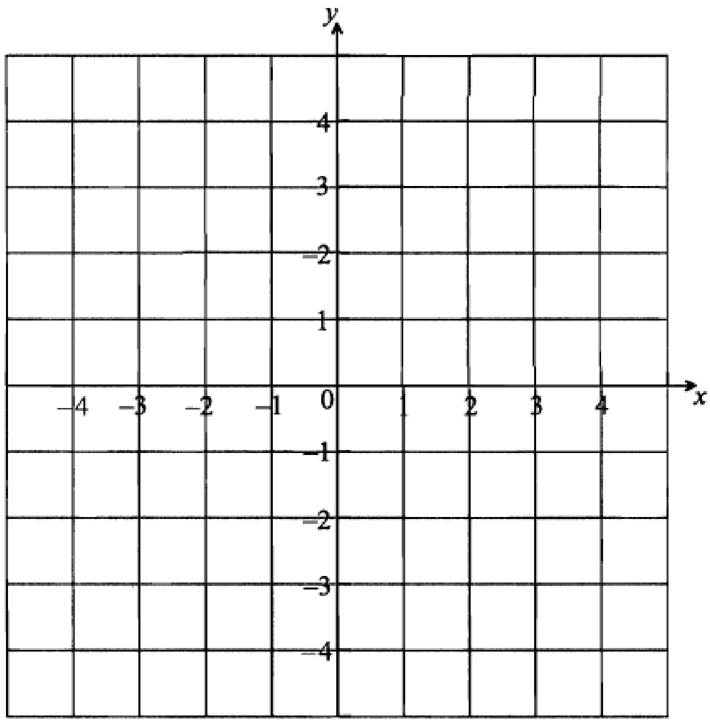
$x = \dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3\pm5}{4} \begin{cases} 2 \\ -1/2 \end{cases}$

$f(x)$ corta al eje X en los puntos $(2,0)$, $\boxed{(-1/2,0)}$

31 The diagram below shows the graph of a function $f(x)$, for $-2 \le x \le 4$.

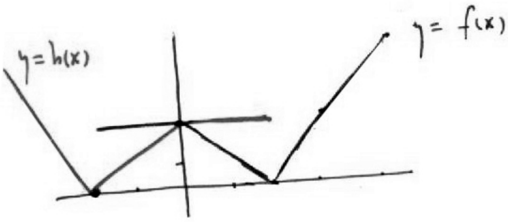


(a) Let $h(x) = f(-x)$. Sketch the graph of h on the grid below.



(b) Let $g(x) = \frac{1}{2} f(x-1)$. The point A$(3, 2)$ on the graph of f is transformed to the point P on the graph of g. Find the coordinates of P.

a)



b) $g(x) = \frac{1}{2} f(x-1)$

$f(x-1)$ significa trasladar horizontalmente una unidad a la derecha.

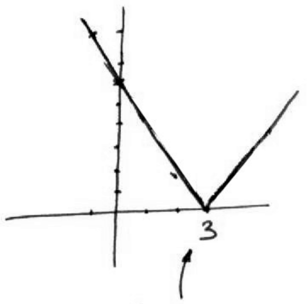
$\frac{1}{2}\cdot$ significa comprimir verticalmente a la mitad.

En consecuencia $P(3,2)$ se convierte en: $3+1=4$, $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ $\boxed{P(4,1)}$

32 Representa: a) $y = |6-2x|$ b) $y = |2x^2 - 5x - 7|$

a) $y = |6-2x|$

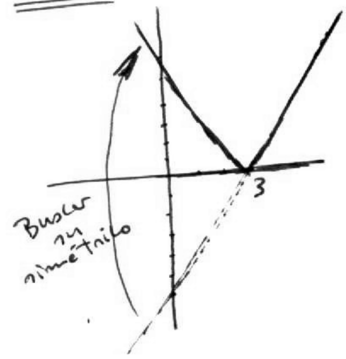
x	y
-1	8
0	6
1	4
2	2
3	0
4	2
5	4



$6-2x=0$

$x=3$

También:



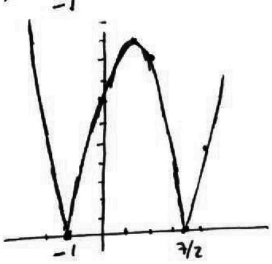
b) $y = |2x^2 - 5x - 7|$

$2x^2 - 5x - 7 = 0$

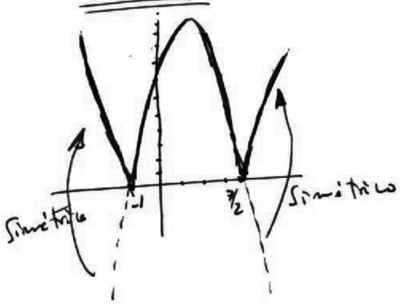
$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4}$ ↗ $7/2$ ↘ -1

Vértice: $x_v = \frac{5}{4} \rightarrow y_v = |2\cdot(\frac{5}{4})^2 - 5\cdot(\frac{5}{4}) - 7| = 10'125$

x	y
-3	26
-2	11
-1	0
0	7
1	10
2	9
3	4
7/2	0
4	5
5	12



También:



33 Halla el conjunto de los valores de k para los que la parábola $f(x) = 2x^2 + kx + 2$ corta al eje X exactamente en dos puntos.

$f(x) = 2x^2 + kx + 2$

$y=0 \rightarrow x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 16}}{2}$

- Si $k^2 - 16 < 0 \rightarrow$ No corta al eje X
- Si $k^2 - 16 = 0 \rightarrow$ Corta al eje X en sólo 1 punto
- Si $k^2 - 16 > 0 \rightarrow$ Corta al eje X en dos puntos.

$k^2 - 16 > 0$

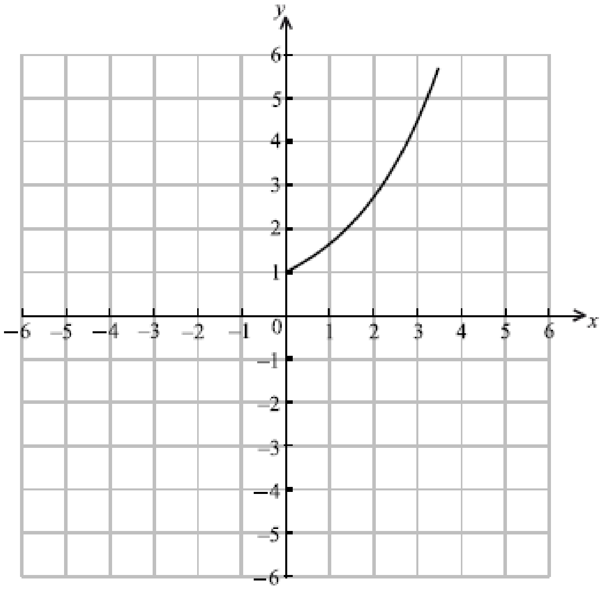
$k^2 - 16 = 0$

$k = \pm 4$

	-4		4	
Signo k^2-16	+	|	-	|	+

$\Rightarrow \boxed{k \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)}$

34 Let f be the function given by $f(x)=e^{0.5x}$, $0 \le x \le 3.5$. The diagram shows the graph of f.



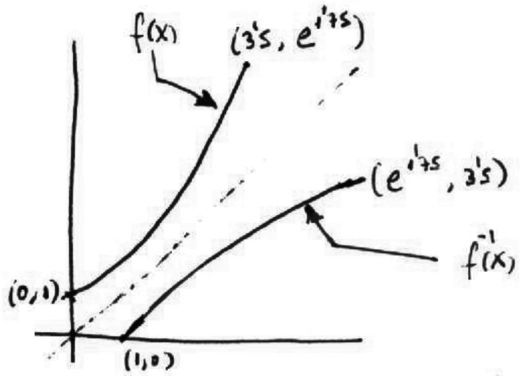
(a) On the same diagram, sketch the graph of f^{-1}.

(b) Write down the range of f^{-1}.

(c) Find $f^{-1}(x)$.

$f(x) = e^{0'5x}$

$x \in [0, 3'5]$



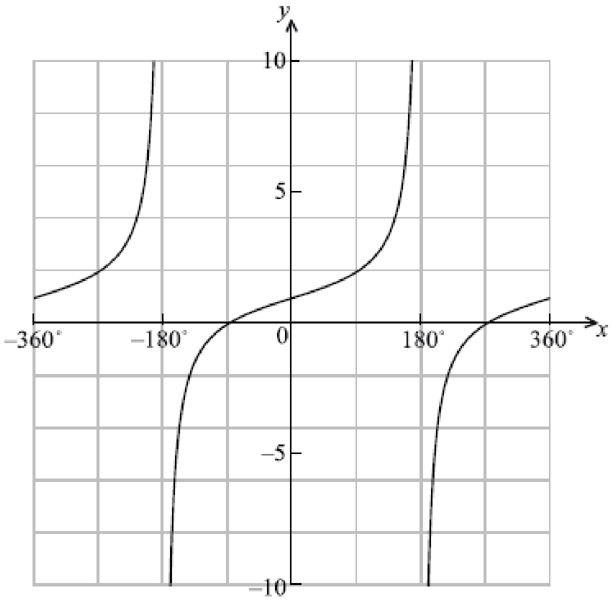
b) $f: \begin{cases} \text{dominio} = [0, 3'5] \\ \text{recorrido} = [1, e^{1'75}] \end{cases} \Rightarrow f^{-1}: \begin{cases} \text{dominio} = [1, e^{1'75}] \\ \text{recorrido} = [0, 3'5] \end{cases}$

c) $y = e^{0'5x}$

$x = e^{0'5y} \rightarrow \ln x = 0'5y \Rightarrow y = 2\ln x \quad \boxed{f^{-1}(x) = 2\ln x}$

35

The diagram below shows the graph of $f(x) = 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ for $-360^\circ \le x \le 360^\circ$.



(a) On the same diagram, draw the asymptotes.

(b) Write down

(i) the period of the function;

(ii) the value of $f(90^\circ)$.

(c) Solve $f(x) = 0$ for $-360^\circ \le x \le 360^\circ$.

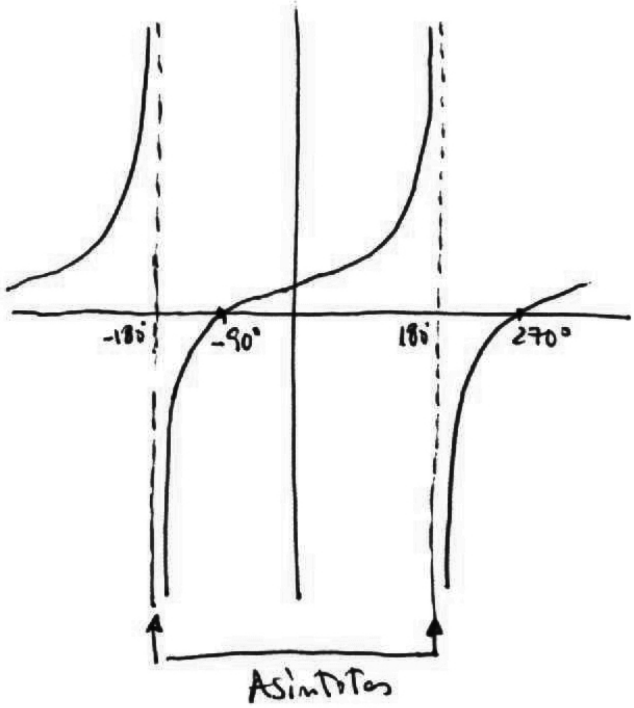
b) Periodo = 360°

$f(90^\circ) = 1 + tg\left(\frac{90}{2}\right) =$

$= 1 + tg\,45^\circ = 1 + 1 = \boxed{2}$

c) $f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} -90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}}$

a)



36 Let $f(x) = a(x-4)^2 + 8$.

(a) Write down the coordinates of the vertex of the curve of f.

(b) Given that $f(7) = -10$, find the value of a.

(c) Hence find the y-intercept of the curve of f.

(d) Halla los puntos de intersección con el eje X

$f(x) = a(x-4)^2 + 8$

a) $\boxed{\text{Vértice } (4,8)}$

b) $f(7) = -10 \longrightarrow -10 = a(7-4)^2 + 8$; $-10 = 9a + 8$; $\boxed{a = -2}$

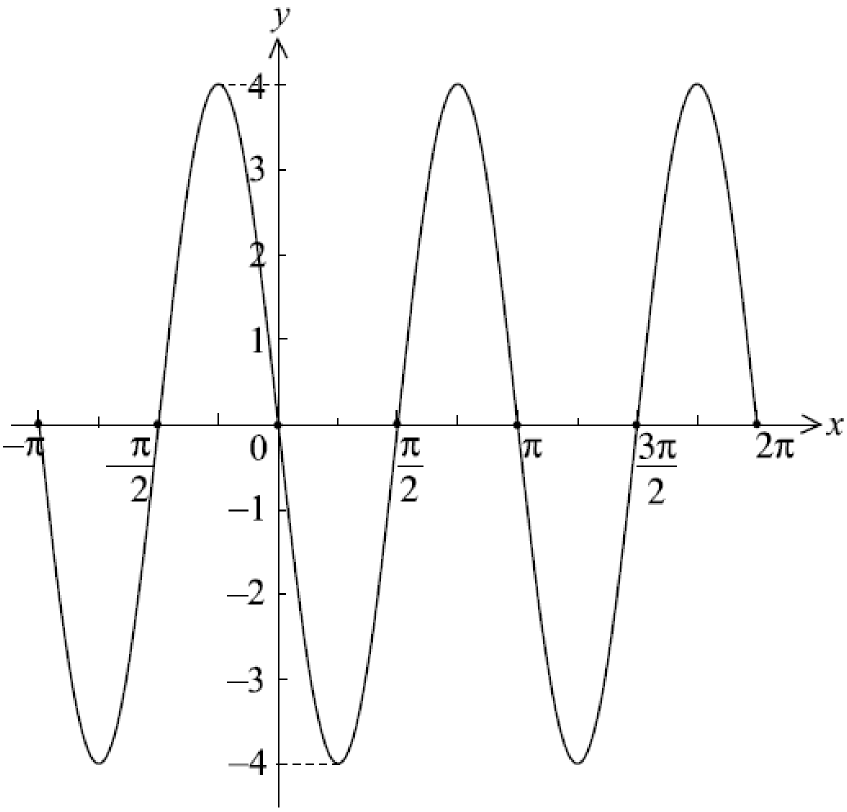
c) $y = -2(x-4)^2 + 8$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -2(x-4)^2 + 8$; $2(x-4)^2 = 8$; $(x-4)^2 = 4$; $x - 4 = \pm 2$; $x = 4 \pm 2 \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Corte al eje X en los puntos } (6,0) \ (2,0)}$

d) $x = 0 \Rightarrow y = -2\cdot(-4)^2 + 8 = -24$ $\boxed{\text{Corte al eje y en el punto } (0,-24)}$

37 Let $f(x) = a \sin b(x-c)$. Part of the graph of f is given below.



Given that a, b and c are positive, find the value of a, of b and of c.

$f(x) = a \operatorname{sen} b(x-c)$

La sinusoide oscila entre -4 y 4 $\Rightarrow$ $\boxed{a=4}$

El periodo es de π radianes $\Rightarrow$ $\boxed{b=2}$

El origen $(0,0)$ de la función $\operatorname{sen} x$ se ha trasladado al punto $(\pi/2, 0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{c=\pi/2}$

38 A spring is suspended from the ceiling. It is pulled down and released, and then oscillates up and down. Its length, l centimetres, is modelled by the function $l = 33 + 5\cos\left((720t)^{\circ}\right)$, where t is time in seconds after release.

(a) Find the length of the spring after 1 second.

(b) Find the minimum length of the spring.

(c) Find the first time at which the length is 33 cm.

(d) What is the period of the motion?

$l = 33 + 5\cos(720t^{\circ})$

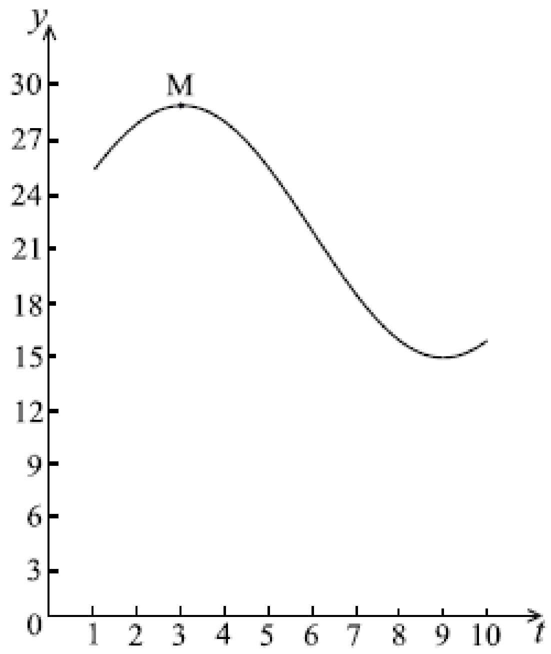
a) $t=1 \Rightarrow l = 33 + 5\cos 720^{\circ} = 33+5 = \boxed{38 \text{ cm}}$

b) $-1 \le \cos\alpha \le 1 \Rightarrow$ mínimo $l = 33 + 5\cdot(-1) = \boxed{28 \text{ cm}}$

c) $33 = 33 + 5\cdot\cos(720t) \Rightarrow \cos(720t) = 0 \Rightarrow 720t = 90 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{8} \text{ sg}}$

d) $720t = 360^{\circ} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2} \text{ sg}}$

39 Let $f(t)=a\cos b(t-c)+d$, $t\geq 0$. Part of the graph of $y=f(t)$ is given below.



When $t=3$, there is a maximum value of 29, at M.
When $t=9$, there is a minimum value of 15.

(a) (i) Find the value of a.

(ii) Show that $b=\frac{\pi}{6}$.

(iii) Find the value of d.

(iv) Write down a value for c.

The transformation P is given by a horizontal stretch of a scale factor of $\frac{1}{2}$, followed by a translation of $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

(b) Let M′ be the image of M under P. Find the coordinates of M′.

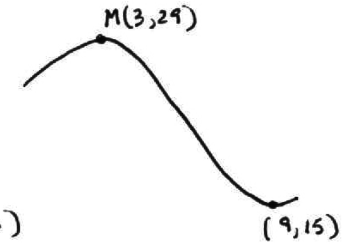
The graph of g is the image of the graph of f under P.

(c) Find $g(t)$ in the form $g(t)=7\cos B(t-C)+D$.

(d) Give a full geometric description of the transformation that maps the graph of g to the graph of f.

$f(t) = a\cos b(t-c)+d$

a) $-1 \le \cos\alpha \le 1$



Por lo tanto :

$a\cdot(-1)+d \le f(t) \le a\cdot 1 + d$

$d-a \le f(t) \le a+d$

$d-a$ ← 15 (del mínimo); $a+d$ ← 29 (del máximo)

$\left.\begin{array}{l} a+d=29 \\ d-a=15 \end{array}\right\} \Rightarrow 2d=44 \;;\; \boxed{d=22} \quad \boxed{a=7}$

Entre un máximo y un mínimo hay medio periodo, es decir, π.

por lo que : $b(9-c) - b(3-c) = \pi \;;\; 9b-\cancel{bc}-3b+\cancel{bc} = \pi \;;\; 6b=\pi$ $\boxed{b=\pi/6}$

$f(t) = 7\cos\frac{\pi}{6}(t-c)+22$

$M(3,29) \Rightarrow 29 = 7\cos\frac{\pi}{6}(3-c)+22 \;;\; 7 = 7\cos\frac{\pi}{6}(3-c) \;;\; 1=\cos\frac{\pi}{6}(3-c)$

$\Downarrow$

$\frac{\pi}{6}(3-c)=0 \;;\; \boxed{c=3}$

b) $M(3,29) \xrightarrow{\text{1/2 Contracción Horiz}} (1'5,\,29) \xrightarrow{\text{Traslación } \binom{3}{-10}} M'(1'5+3,\,29-10) = \boxed{(4'5,\,19)}$

c) $f(t) = 7\cos\frac{\pi(t-3)}{6}+22 \xrightarrow{\text{1/2 Contracción Horiz.}} 7\cos\frac{\pi(2t-3)}{6}+22 \xrightarrow{\text{traslación } \binom{3}{-10}}$

$\rightarrow g(t) = 7\cos\frac{\pi(2(t-3)-3)}{6}+22-10 = 7\cos\frac{\pi(2t-9)}{6}+12 = \boxed{7\cos\frac{2\pi}{6}\left(t-\frac{9}{2}\right)+12}$

$B=\frac{2\pi}{6}=\boxed{\frac{\pi}{3}} \quad C=\boxed{\frac{9}{2}} \quad D=\boxed{12}$

d) La gráfica se aprieta horizontalmente a la mitad, por ejemplo, del intervalo $[0,10]$ del dibujo, la gráfica quedaría apretada al intervalo $[0,5]$, ocupando alturas desde 15 a 29. A continuación se traslada horizontalmente 3 unidades a la derecha [el intervalo pasaría a ser el $[3,8]$] y bajaría 10 unidades, ocupando alturas desde 5 a 19.

40 Let $f(x) = \log_3 \frac{x}{2} + \log_3 16 - \log_3 4$, for $x > 0$.

(a) Show that $f(x) = \log_3 2x$.

(b) Find the value of $f(0.5)$ and of $f(4.5)$.

The function f can also be written in the form $f(x) = \frac{\ln ax}{\ln b}$.

(c) (i) Write down the value of a and of b.

(ii) Hence on graph paper, **sketch** the graph of f, for $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$, using a scale of 1 cm to 1 unit on each axis.

(iii) Write down the equation of the asymptote.

(d) Write down the value of $f^{-1}(0)$.

The point A lies on the graph of f. At A, $x = 4.5$.

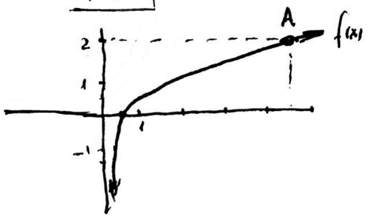
(e) On your diagram, sketch the graph of f^{-1}, noting clearly the image of point A.

a) $f(x) = \log_3 \frac{x}{2} + \log_3 16 - \log_3 4 = \log_3 \frac{\frac{x}{2}\cdot 16}{4} = \log_3 2x$ ✓

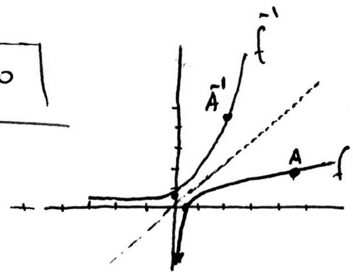
b) $f(0'5) = \log_3(2\cdot 0'5) = \log_3 1 = \boxed{0}$; $f(4'5) = \log_3(2\cdot 4'5) = \log_3 9 = \boxed{2}$

c) $f(x) = \log_3 2x = \boxed{\frac{\ln 2x}{\ln 3}}$ $\boxed{a=2,\ b=3}$

x	y
1/6	-1
0'5	0
4'5	2
13'5	3



$\boxed{\text{Asíntota Vertical } y=0}$



d) $f^{-1}(0) = 0'5$; $f(4'5) = 2 \rightarrow f^{-1}(2) = 4'5$