Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato. Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Leticia González Pascual

Revisor: Álvaro Valdés Menéndez

Índice

Resumen

Se ha considerado un *milagro* que las Matemáticas sean tan útiles para el resto de las Ciencias. Si se quiere estudiar un fenómeno se construye un modelo matemático que lo explique. Antes del uso de los ordenadores estos modelos eran casi siempre lineales para hacer posibles los cálculos, pues si no lo eran se simplificaban linealizándolos.

En este capítulo vamos a aprender a resolver sistemas lineales. Lo haremos con sistemas de un número pequeño de incógnitas, pero los mismos procedimientos podríamos utilizar para resolver, por ejemplo, sistemas con un millón de ecuaciones y de variables. Ahora, de nuevo, debemos utilizar para ello los ordenadores.

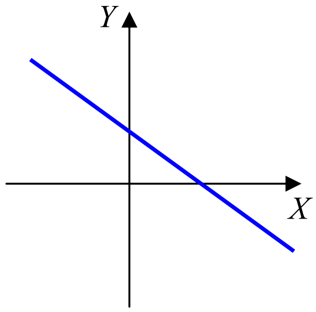
Imagina que estamos trabajando con la red eléctrica de un país, o las redes telefónicas, o las posibles rutas de una compañía de transportes. Toda simplificación que hagamos en el modelo puede representar un buen ahorro en tiempo de computación.

Una buena idea es sustituir los sistemas por sus coeficientes y trabajar con matrices. Otra buena idea es simplificar esas matrices consiguiendo que muchos coeficientes sean nulos, que es en lo que va a consistir el método de Gauss. Este método se puede implementar fácilmente en un ordenador.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

1. REPASO: SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

1.1. Ecuación lineal de dos incógnitas

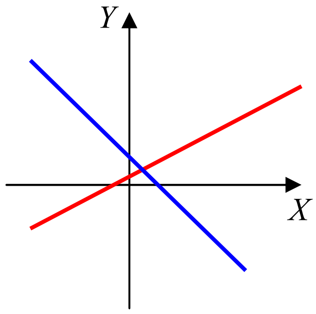


Una **ecuación lineal** con dos incógnitas, es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas y a, b y c son números reales, de los cuales a a y b se les denomina coeficientes y a c término independiente.

A todo par de números (x_0, y_0) que verifique la expresión anterior se le denomina **solución** de la ecuación.

La representación gráfica de todas las soluciones de dicha expresión será una **recta**.

1.2. Sistema de ecuaciones lineales.



Un **sistema de dos ecuaciones** lineales con dos incógnitas es una expresión del tipo:

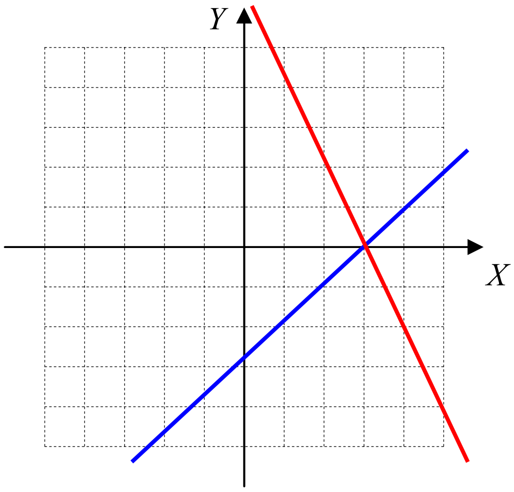
$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtendremos dos rectas. El **punto de corte** de ambas rectas, si existe, será la única **solución del sistema**.

Actividades resueltas

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

  Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtenemos dos rectas:



  Vemos que se cortan en el punto (3,0), que es la solución del sistema:

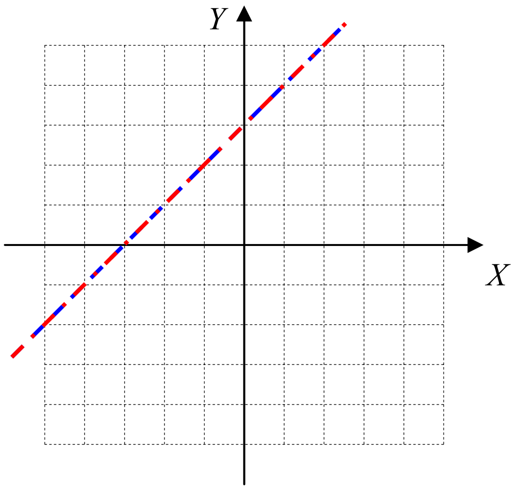
$$(x_0, y_0) = (3,0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Un **sistema de ecuaciones** que tiene una única solución se denomina **Compatible Determinado**.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$

En este caso obtenemos dos rectas **que se superponen**:

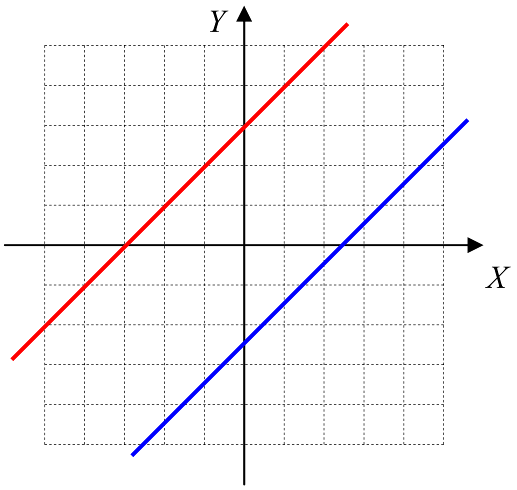


Esto quiere decir que toda solución de una ecuación es también solución de la otra. El sistema, en este caso, tiene **infinitas soluciones**, que son los infinitos puntos de la recta.

Un **sistema de ecuaciones** con infinitas soluciones se denomina **Compatible Indeterminado**.

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

En este caso obtenemos dos rectas **paralelas**:



Las rectas **NO** se cortan en ningún punto, por tanto el sistema no tiene solución.

Un **sistema de ecuaciones** que no tiene solución se denomina **Incompatible**.

Podemos formar el siguiente esquema para clasificar los sistemas atendiendo al número de soluciones:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible}\begin{cases} \text{Determinado (SCD) (tiene una solución)} \\ \text{Indeterminado (SCI) (tiene infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (SI) (no tiene solución)} \end{cases}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

1.3. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

El curso pasado estudiamos tres formas de resolver sistemas de ecuaciones lineales: reducción, sustitución e igualación. Resolvamos por reducción un sistema general de la forma

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda por a_1:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_2 a_1 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \end{cases}$$

Restamos miembro a miembro:

$$(a_2 a_1 - a_1 a_2) \cdot x + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \Rightarrow 0 \cdot x + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

Observamos que si el factor $(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ es distinto de cero, podemos despejar y como:

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

Operando del mismo modo, podemos hallar x:

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Fijándonos bien en ambas expresiones, podemos reconocer tanto en el numerador como en el denominador la forma característica de un determinante, lo que nos lleva al siguiente razonamiento:

Todo sistema de la forma $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ se puede expresar mediante el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

la primera formada por los coeficientes y que se denomina **matriz asociada del sistema**:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

y la **matriz de los términos independientes:**

$$B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Si retomamos las expresiones obtenidas para x e y vemos que necesitamos una tercera matriz:

Combinando A e B se obtiene la **matriz ampliada**:

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

Con ellas podemos deducir la solución del sistema original:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

2. SISTEMAS GENERALES DE ECUACIONES LINEALES

2.1. Definición de sistema de ecuaciones lineales

En general se denomina **sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas** a un conjunto de relaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, \cdots x_n$ son las incógnitas, los números a_{ij} son los coeficientes de las incógnitas y los b_i son los términos independientes.

El conjunto de números reales ordenados $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ será **solución del sistema** si satisface todas las ecuaciones del mismo.

Independientemente del número de incógnitas y ecuaciones, estos sistemas pueden clasificarse del mismo modo que los de (2 × 2):

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible}\begin{cases} \text{Determinado (S.C.D.)} \\ \text{Indeterminado (S.C.I.)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (S.I.)} \end{cases}$$

Ejemplos:

- *El sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$

Solo tiene una solución: $x = y = z = 1$, y es **compatible determinado**.

- *El sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y \quad =-1 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; aparte de la anterior: $x = y = z = 1$, podemos encontrar $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$, o $x = 2$, $y = 3/2$, $z = -1/2$ y muchas más. Es, por tanto, **compatible indeterminado**.

- El sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

No puede tener solución, ya que la tercera ecuación se *contradice* con la primera (no pueden verificarse simultáneamente). Es, por tanto, un sistema **incompatible**.

La diferencia fundamental estriba en la **interpretación geométrica** de los sistemas. Si una ecuación lineal en x e y es una *recta en el plano*, al aumentar el número de incógnitas la figura geométrica cambia, pasando a ser un *plano en el espacio de tres dimensiones*:

$$\pi : a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z = d$$

y un *hiperplano* en dimensiones superiores.

2.2. Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **HOMOGÉNEO** cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero; es decir, $b_i = 0 \quad \forall\, i$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogéneo es **compatible**, pues tiene al menos una solución, $x_i = 0\ \forall\ i$.

Se llama **solución trivial** de un sistema homogéneo a la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En general, la solución trivial no suele tener interés.

Si el sistema es compatible indeterminado se suele trabajar para dejar la solución en forma paramétrica, es decir, haciendo que una (o más) de las incógnitas se comporte como un parámetro libre y expresando a las demás en función de ella.

Ejemplo:

- *El sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y \quad\ = 0 \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; aparte de la trivial: $x = y = z = 0$, podemos encontrar $x = -2$, $y = -1$, $z = 3$, o $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$ y es, como antes, **indeterminado**.

Para expresarlo en forma paramétrica elegimos la incógnita que se pueda despejar más fácilmente, en este caso x. Simplemente sumando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y \quad\ = 0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x \quad + 2z = 0 \\ x - 2y \quad\ = 0 \end{cases}$$

y podemos despejar y y z en función de x:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot x \\ z = -\frac{3}{2} \cdot x \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \cdot t \\ z = -\frac{3}{2} \cdot t \end{cases}$$

2.3. Sistemas equivalentes

Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.

Ejemplo:

- *Los sistemas*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x+3y-2z=4 \\ x-y-3z=-3 \\ x+4y-3z=2 \end{cases}$$

Tiene ambos la misma solución: $x = y = z = 1$.

Para pasar de un sistema a otro equivalente, se pueden usar las siguientes **Transformaciones de Gauss**:

a) *Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema*.

b) *Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero*.

c) *Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás*.

d) *Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número real cualquiera.*

e) *Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida, en la combinación lineal, sea distinto de cero.*

Esta última transformación se conoce como **Teorema Fundamental de equivalencia de sistemas.**

Ejemplo:

- *Transformemos el sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to 2F_1 - F_3}]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ y-4z=-3 \\ 3y+z=4 \end{cases}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS:

3.1. Método de Gauss o de eliminaciones sucesivas:

Este método consiste en sustituir el sistema dado por otro equivalente, aplicando las transformaciones de Gauss, hasta conseguir un sistema escalonado, en el cual los coeficientes de las incógnitas que quedan por debajo de la diagonal del sistema sean nulos. Así, por ejemplo, del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ llegaríamos al sistema: } \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema no tenemos más que ir sustituyendo el valor de la variable obtenida en una ecuación en la ecuación anterior, y así sucesivamente.

Este método nos permite saber además, según las ecuaciones que obtengamos, si el sistema tiene o no solución y cuantas tiene.

Actividades resueltas

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \xrightarrow{E_2 - 2E_1} \\ 5x - y + 3z = 16 \xrightarrow{E_3 - 5E_1} \end{cases} \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 \xrightarrow{E_3 + 4E_2} \end{cases} \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$$

El último sistema, como se ve, es escalonado. De la última ecuación obtenemos que $z = 1$, y sustituyendo sucesivamente en la segunda y en la primera obtenemos $y = 2$, $x = 3$. Se trata de un sistema compatible determinado (SCD).

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \xrightarrow{E_2 - 2E_1} \\ 3x - 2y + 2z = 10 \xrightarrow{E_3 - 3E_1} \end{cases} \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ y - 7z = -2 \xrightarrow{E_3 - E_2} \end{cases} \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En este caso, después de realizar las transformaciones de Gauss, resulta un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, un sistema compatible indeterminado (SCI).
Se trata de un sistema uniparamétrico, donde una de las incógnitas hace de parámetro y puede tomar cualquier valor. Las otras incógnitas tomarán valores dependiendo del valor que le demos al parámetro. Las soluciones se presentan de la forma:

$$\begin{cases} x = 2 + 4z \\ y = -2 + 7z \end{cases} \to \begin{cases} z = k \\ x = 2 + 4k \\ y = -2 + 7k \end{cases}$$

(También podríamos haber observado que la tercera ecuación es suma de las otras dos)

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \xrightarrow{E_2 - 2E_1} \\ 4x - 2y + 6z = 9 \xrightarrow{E_3 - 4E_1} \end{cases} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = -3 \xrightarrow{E_3 - 2E_2} \end{cases} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 0 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Como se ve la última ecuación es imposible, por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible (SI).

(También podríamos haber observado que los coeficientes de la tercera ecuación son el doble de los de la segunda, pero el término independiente no está duplicado, lo que genera un absurdo).

Se ha obtenido en los tres casos tres sistemas escalonados pero de distinto tipo:

- En el caso A, tenemos tantas ecuaciones como incógnitas, y la última ecuación tiene solución. Se trata pues de un sistema compatible determinado (SCD), que tendrá una única solución.
- En el segundo caso, sistema B, tenemos más incógnitas que ecuaciones. Se trata de un sistema compatible indeterminado (SCI) y tendrá infinitas soluciones. En este caso, las soluciones vienen dadas en función de un solo parámetro, aunque puede haber sistemas con más de un parámetro.
- En el tercer caso, sistema C, la última ecuación es imposible, por tanto el sistema no tiene solución. Se trata de un sistema incompatible (SI).

Para discutir el sistema tendremos en cuenta la forma de la última ecuación transformada:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

A la hora de despejar x_n tenemos tres situaciones diferentes:

$$a'_{nn}x_n = b'_n \rightarrow \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \Rightarrow x_n = {b'_n}/{a'_{nn}} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = 0 \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = b'_n \end{cases}$$

- La primera es trivial y no merece más explicación, el sistema puede resolverse.
- En la segunda vemos que cualquier valor de x_n satisface la ecuación. Por tanto hay infinitas soluciones y el sistema es indeterminado.
- Vemos que la última es claramente imposible (ningún valor multiplicado por cero puede dar un resultado diferente de cero) y el sistema es incompatible.

Por tanto, el análisis de la última ecuación queda:

$$a'_{nn}x_3 = b'_n \rightarrow \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \text{SCD} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \text{SCI} \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \text{SI} \end{cases}$$

Esto es precisamente lo que vimos en los tres ejemplos anteriores y que nos daban lugar a los tres tipos de sistemas. Por tanto tendremos que ver qué hacen que el coeficiente de x_n sea nulo y si esos valores coinciden o no con los valores que hacen que el término independiente sea nulo.

Actividades propuestas

1. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

4. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES:

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

podemos expresarlo como producto de matrices en la forma $A{\cdot}X = B$, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que se denomina **expresión matricial de un sistema**.

A recibe el nombre de **matriz de coeficientes** o **matriz del sistema**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

B se denomina **matriz de los términos independientes**:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Y llamamos matriz X a la matriz columna formada por las incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A partir de las matrices A y B definimos la matriz ampliada:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Actividad resuelta

- *Plantea matricialmente el sistema* $\begin{cases} 6x + m\,y = 15 \\ 3x + 2m\,y = 8 \end{cases}$

  Simplemente escribimos: $A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & m \\ 2 & 2m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$

- Plantea el sistema cuyas matrices de coeficientes y de sus términos independientes son:

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Como A y B son matrices de dimensiones (2×2) y (2×1), la matriz de incógnitas debe ser:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Planteamos la ecuación matricial $A·X = B$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

operamos:

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot x + (-2) \cdot y \\ a \cdot x + (a-1) \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e igualamos los términos de las matrices para obtener el siguiente sistema:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{cases} a\,x - \quad 2\,y = 4 \\ a\,x + (a-1)\,y = 4 \end{cases}$$

4.1. Resolución de sistemas mediante la matriz inversa

La expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales, nos ofrece otro mecanismo de resolución del sistema a partir de la matriz inversa de la matriz de los coeficientes:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow \quad X = A^{-1} B$$

Para ello debe cumplirse:

- $m = n$: el sistema tiene que tener tantas ecuaciones como incógnitas, es decir, la matriz de los coeficientes debe ser cuadrada.
- $|A| \neq 0$: el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero, para que la matriz tenga inversa.

Estas condiciones no son triviales, pues nos muestran las condiciones necesarias para que el sistema tenga solución:

Para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tenga solución, el número de ecuaciones **linealmente independientes** debe coincidir con el número de incógnitas.

Actividad resuelta

- *Resuelve mediante la matriz inversa el sistema*

$$\begin{cases} 6x + y = 15 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial: $A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$

Calculando el determinante de A vemos que vale $|A| = 10$, por tanto podemos hallar la inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda: $X = A^{-1} B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/10 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$

4.2. Teorema de Rouchè-Fröbenius

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Para el que las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

El **teorema de Rouchè-Fröbenius** dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".

Si estudiamos los rangos de las matrices nos podemos encontrar con las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{Sist. Compatible} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{Sist. Incompatible} \end{cases}$$

Aplicación a Sistemas Homogéneos:

Un sistema homogéneo tendrá siempre solución, ya que el rango de A será siempre igual al rango de A*, pues la última columna de la matriz ampliada son ceros. La solución será única (la trivial) si el rango de A es igual al número de incógnitas. Y tendrá infinitas soluciones si el rango de A es menor que el número de incógnitas.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema homogéneo es siempre COMPATIBLE.

Un sistema homogéneo tendrá sólo la solución trivial si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

4.3. Método de Gauss y expresión matricial

Utilizando las matrices asociada y ampliada podemos simplificar el método de Gauss visto antes.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3-2F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

En este sistema la última ecuación, que corresponde a la última fila de la matriz, es $-2z=0 \Rightarrow z=0$. Por tanto el sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-4 \\ z=0 \end{cases}$$

El método de Gauss también nos permite ***discutir*** los sistemas en función de los distintos valores que tome un parámetro determinado ya que, como vimos, es un método para determinar rangos.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3-aF_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

De la última ecuación $(2-a-a^2)z=1-a$ deducimos los valores del parámetro *a* que nos pueden hacer que el sistema tenga o no solución, y en el caso de que tenga solución de que sea o no una única solución.

4.4. Análisis de un sistema por el método de Gauss

Analicemos de forma genérica un sistema en forma matricial. Comentábamos antes que estamos intentando convertir el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

en el sistema equivalente:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

En forma matricial se trata de convertir la matriz ampliada en:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Antes explicamos que para discutir el sistema analizamos la última ecuación. En este caso, analizamos la última fila, y llegamos a dos situaciones diferentes:

- Caso 1:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) \quad \text{con } a'_{mn} \neq 0$$

Observamos que **los rangos** de las matrices A y A^* son iguales, e iguales al número de ecuaciones y todo dependerá del número de incógnitas.

- Caso 2:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right)$$

Observamos que **los rangos** de las matrices A y A^* no coinciden.

Recuperemos el ejemplo anterior:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Analizamos el último término, que corresponde a la ecuación $(2-a-a^2)z=1-a$, y deducimos los valores del parámetro *a* que nos pueden dar una solución válida. Como vimos, todo depende de cuándo ese parámetro es nulo, por tanto:

$$2-a-a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Con lo que deducimos:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado (SCD), ya que el coeficiente de z es distinto de cero, y

$$z = \frac{1-a}{2-a-a^2}$$

- Si $a=1$, la última ecuación es de la forma $0 = 0$ (en este caso también la segunda ecuación) por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

  En este caso se trata de un sistema biparamétrico, dos de las incógnitas hacen de parámetros y la tercera toma valores en función de ellas (SCI).

- Si $a=-2$, la última ecuación queda $0 = 3$, por lo que es imposible y el sistema no tiene solución (SI)

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

4.5. Regla de Cramer:

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema de Cramer** si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y además el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero.

Ejemplos:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0$$ **NO** es sistema de Cramer

$$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3\neq 0$$ **SÍ** es sistema de Cramer.

La **Regla de Cramer** dice que: "un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, en el cual el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, admite una solución y sólo una, es decir, es un sistema compatible determinado".

Vamos a ver como se calcula esta solución por el **método de Cramer**: Consideremos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema de Cramer, el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero y por tanto admite inversa, A^{-1}. Multiplicando los dos miembros de la ecuación por la inversa de A, tenemos:

$$A\cdot X = B \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Operando las matrices e igualando los términos correspondientes tenemos:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{|A|}$$

hasta llegar a la última incógnita:

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{|A|}$$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

Observamos que los numeradores de estas fracciones son los desarrollos de determinantes por los elementos de una línea, con lo cual tenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ \ldots. \ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

En cada una de las fracciones el determinante del numerador es el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas cambiando, en cada caso, la columna correspondiente a la incógnita x_i por los términos independientes. El denominador en todos los casos es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Podemos simplificar esas expresiones si representamos por Δ_1, Δ_2,… Δ_n, a los determinantes de los numeradores, la solución genérica de un sistema de Cramer puede representarse como:

La **solución de un sistema de Cramer** puede calcularse como:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$$

Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i–ésima por la matriz de términos independientes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Esta nomenclatura genérica queda más clara cuando tenemos los sistemas con las incógnitas habituales $(x, y, z, \ldots)$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

en el que podemos hallar las soluciones como:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{|A|} \quad , \quad z = \frac{\Delta_z}{|A|}$$

siendo:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

En ocasiones se representa por Δ al determinante del sistema, que sabemos que no puede ser nulo:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Actividades resueltas

- *Expresa en forma matricial los siguientes sistemas y comprueba que son sistemas de Cramer.*

$$a)\ \begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$$

Resuélvelos utilizando aplicando la regla de Cramer.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De donde, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada quedan:

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos si es un sistema de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=16-9=7\neq 0 \Rightarrow \text{es un sistema de Cramer}$$

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{7}=\frac{20-6}{7}=\frac{14}{7}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{-8+15}{7}=\frac{7}{7}=1$$

La solución es: $\{x=2\ ;\ y=1\}$

(b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases} \Rightarrow A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Veamos si es un sistema de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=12-(2-8)=12-(-6)=12+6=18\neq 0 \Rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}=36 \quad , \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-18 \quad , \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-18$$

Finalmente:

$$x=\frac{36}{18}=2 \quad , \quad y=\frac{-18}{18}=-1 \quad , \quad z=\frac{-18}{18}=-1$$

Es decir, la solución del sistema queda:

$$\{x=2\,,\,y=-1\,,\,z=-2\}$$

Planteamiento de problemas

En este tema es **fundamental** saber plantear un problema a partir de un enunciado de texto. La clave para ello es saber **LEER** y **TRADUCIR** adecuadamente toda la información que se da en un problema, **ESCRIBIENDO** correctamente lo que estamos leyendo. Nunca se escribe demasiado y nunca un problema está demasiado explicado a la hora de intentar resolverlo.

Ejemplo:

Una determinada empresa hace una prueba de selección que consiste en un test de 90 preguntas. Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2,5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos y que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos?

Empezamos definiendo (y lo escribimos claramente):

x = nº de preguntas contestadas correctamente

y = nº de preguntas contestadas erróneamente

z = nº de preguntas no contestadas

A continuación, vamos *troceando* el problema:

- El test consta de 90 preguntas, por tanto deducimos que: $x + y + z = 90$
- Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2,5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1,5 puntos:

$$6 \cdot x - 2{,}5 \cdot y - 1{,}5 \cdot z = 210$$

- Para que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos:

$$x + z = 2y \Rightarrow x - 2y + z = 0$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x - 2{,}5y - 1{,}5z = 210 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

y, desde este momento, sólo tenemos que aplicar lo aprendido en el tema:

- Planteamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.
- Comprobamos si es un sistema de Cramer (que el determinante del sistema no sea nulo)
- Resolvemos con el método de Cramer.

Actividad propuesta

2. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

CURIOSIDADES. REVISTA

Algunas biografías

Gabriel Cramer

Gabriel Cramer nació en Ginebra el 31 de julio de 1704 y murió el 4 de enero de 1752.

Mostró gran precocidad en matemática, a los 18 años se doctoró con una tesis sobre la teoría del sonido, y a los 20 años era profesor adjunto de matemáticas.

Fue profesor de matemática de la Universidad suiza de Ginebra durante el periodo 1724-27. En 1750 ocupó la cátedra de filosofía en dicha universidad.

En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.

Gabriel Cramer (1704-1752).

Visitó varios países para conocer y trabajar con matemáticos de su época: Euler, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Halley, de Moivre, Stirling, y otros matemáticos. Sus conversaciones y posterior correspondencia son de gran interés.

La **Regla de Cramer** es un teorema en álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de **determinantes**. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer, que publicó la regla en su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750, obra en la que desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos. Aunque **Colin Maclaurin** también publicó el método en su *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729). Los determinantes ya habían sido usados por

Eugène Rouché

Eugène Rouché (1832-1910) nació en Sommières al sur de Francia, el 18 de agosto de 1832 y murió en Lunel en 1910. Era hijo de un terrateniente. Estudio en la "Ècole Polytechnique" donde consiguió el doctorado en ciencias. Fue un famoso matemático francés, profesor en el *"Lycée Chalemagne*" y en el Conservatorio de Artes y Oficios en París. En 1873 fue nombrado presidente de la *Societé Mathematique* de Francia y más tarde en 1896 fue elegido de la Academia de Ciencias francesa. Es conocido por ser el autor del Teorema de Rouché sobre análisis complejo y coautor del **Teorema de Rouché–Frobenius** en los países de habla hispana. Se conoce poco de su vida, pero se sabe que escribió varios artículos publicados en prestigiosas revistas, además de libros de texto y obras didácticas como: *Traité de géométrie élémentaire* (1874), *Éléments de Statique Graphique* (1889), *Coupe des pierres: précédée des principes du trait de stéréotomie* (1893), *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs* (1900-02). Uno de esos artículos es el que publicó en "*Journal of the Ècole Polytchnique*" en 1862, donde aparece su célebre teorema sin demostrar. Por tanto fue el primero en enunciarlo, aunque otros autores, como Georges Fontené también enunció este teorema y reivindicó su autoría.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

F.G. FROBENIUS

Ferdinand Georg Frobenius

Ferdinand Georg Frobenius nació en el lujoso barrio berlinés de Charlottemburg el 26 de octubre de 1849, hijo de un pastor protestante, y murió en Berlín, el 3 de agosto 1917.

Estudió en Joachimsthal Gymnasium en 1860 donde se graduó, fue a la universidad de Göttingen, y siguió sus estudios en la universidad de Universidad Humboldt de Berlín donde obtuvo su doctorado con una tesis sobre la solución de las ecuaciones diferenciales bajo la dirección de Karl Weierstrass.

Fue profesor en distintos sitios, en Berlín, Zürich…

Matemático alemán reconocido por sus aportes a la teoría de las ecuaciones diferenciales y a la teoría de grupos; y su aportación al teorema planteado por Eugène Rouché que conoces con el nombre de teorema de Rouché-Frobenius.

El matemático Fröbenius en 1905 discrepó del teorema, tanto del enunciado por Rouché como del enunciado y demostrado por Fontené y propuso una demostración alternativa.

Otras obras suyas en el campo del álgebra han contribuido a establecer la llamada ley de reciprocidad de Frobenius y los grupos de Frobenius, versando principalmente en la teoría algebráica de los grupos finitos y la sistematización del álgebra mediante procedimientos de lógica matemática y axiomática.

El nombre de teorema de Rouché – Fröbenius se debe al matemático español ***Julio Rey Pastor***.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Cuadrados mágicos

Se pueden usar sistemas de ecuaciones para confeccionar cuadrados mágicos.

En un cuadro de Durero y en la Sagrada Familia de Barcelona tienes un cuadrado mágico.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

RESUMEN

		Ejemplos
Sistema de ecuaciones lineales	Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto de relaciones: $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistema homogéneo	Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistemas equivalentes	Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ Verifican $x = 1$; $y = 2$
Expresión matricial de un sistema	Todo sistema puede expresarse como producto de matrices en la forma $A{\cdot}X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x+y=15 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $A\cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Resolución por inversa	$A\cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A\cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}B \Rightarrow\ X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El **teorema de Rouchè-Fröbenius** dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".	$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La **solución de un sistema** puede calcularse como: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\lvert A \rvert}$ Si $\lvert A \rvert \neq 0$ Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i–ésima por la matriz de términos independientes.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \dfrac{20}{10} = 2 \quad y = \dfrac{10}{10} = 1$

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

2. – Dados los sistemas:

a) $\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y=3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.

b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

a) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$

6. – Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x+(a-1)y-z=3 \\ ax-y+z=3 \\ x+ay-z=1 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a=-1$.

7. – Dadas las ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$$

se pide:

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

8. – Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

se pide:

a) Discute y resuelve, cuando sea posible.

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución

ii) muchas soluciones

iii) no tenga solución

9. – Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases}$

10. – Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A·B$, $E·D$, $D·E$.

b) Si $C-2AB=-D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

11. – Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a=0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
   - Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
   - Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
   - Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

   Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

18. – Una persona invirtió 72000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

   a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

   b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

   c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son ”m” euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de ”m”) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de ”m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2z+2y=5 \\ 2y-x+z=11 \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y+z=3x \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $x+y+z=7$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.
b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.
c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.
d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$$

a) Obtén su matriz de coeficientes.

b) Calcula el determinante de la matriz anterior.

c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

(2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

a) Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación.

b) Calcula el determinante de la matriz del sistema.

(3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres.

a) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior.

b) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en a).

c) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?

(4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1150 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución?

b) Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?

(5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?

b) Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

(6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a *m* Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h?

b) Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?

(7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de *m* alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan *m* euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 euros al mes?

b) Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?

(8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene *m* hijos más que Juan y *m* veces los de Luis.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de hijos de Juan y Luis. ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

(9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

(10) Considere el sistema

$$\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$$

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a.

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso $a = 1$.

(11) Dado el sistema

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

a) Estudie su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvalo cuando $a = 0$.

Autora: Leticia González Pascual
Revisor: Álvaro Valdés

(12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Obtener las ecuaciones del sistema.

b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.

c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

(13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?

b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a? ¿Tenía más soluciones el sistema?

c) Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.

(14) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$

b) Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

c) Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?

d) Encontrar, si es posible, una solución.

(15) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde a es desconocido.

a) Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B. ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?

b) Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C, ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

(16) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} \quad , \quad D=10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A·B$, $D·E$, $E·B$.

b) Si $AB+C=D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

(17) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

a) Si $AB-C=D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a.

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a=1$ con $y \neq 1$

(18) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

(19) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

(20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno