(1)

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{2n}{2n-1}$ c) $a_n = n!$

d) $a_n = \frac{3^n}{3n}$ e) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$ f) $a_n = 4^{n-1}$

(2)

$\left.\begin{array}{l} a_4 = 16 \\ a_{10} = 88 \end{array}\right|$ $\begin{array}{l} a_1 + 3d = 16 \\ a_1 + 9d = 88 \\ \hline 6d = 72 \end{array}$ $\Rightarrow \boxed{d = 12} \rightarrow \boxed{a_1 = -20}$

(3)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ d = 3 \\ S_n = 175 \end{array}\right|$ $175 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $350 = (4 + 4 + 3(n-1))n$; $350 = (3n+5)n$;

$3n^2 + 5n - 350 = 0$

$n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4200}}{6} = \frac{-5 \pm 65}{6}$ $\begin{cases} \boxed{10} \\ \cancel{-35/3} \end{cases}$

(4)

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = 1681$

$1681 = \frac{\cancel{1} + 2n - \cancel{1}}{2} \cdot n$; $1681 = n^2$; $n = 41$ | Debemos sumar los 41 números impares primeros |

(5)

$16 < 7n < 200$

$\frac{16}{7} = 2'2857....$ El primer múltiplo de 7 será $7 \times 3 = 21$

$\frac{200}{7} = 28'5714...$ El último " " " " $7 \times 28 = 196$

$\underbrace{21 + 28 + \cdots + 196}_{\text{Son } 28-3+1 = \boxed{26 \text{ sumandos}}} = \frac{21 + 196}{2} \times 26 = \boxed{2821}$

(6)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 40° \\ S_6 = 720 \end{array}\right|$ $\frac{40 + a_6}{2} \cdot 6 = 720$

$180 \times 4 = 720°$

$(40 + 40 + 5d) \cdot 3 = 720$

$80 + 5d = 240 \Rightarrow d = 32° \longrightarrow \boxed{40°, 72°, 104°, 136°, 168°, 200°}$

(7)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ r = 1'05 \end{array}\right|$ $a_n = 2 \cdot 1'05^{n-1}$; $a_n \geq 500 \Rightarrow 2 \cdot 1'05^{n-1} > 500$

$1'05^{n-1} > 250$

$\log 1'05^{n-1} > \log 250$

$(n-1) \log 1'05 > \log 250 \Rightarrow n - 1 > \frac{\log 250}{\log 1'05} = 113'1675$

$n > 114'1675 \rightarrow n = 115$

$a_{115} = 2 \cdot 1'05^{115-1} = \boxed{520'7270}$

(8)

$\left.\begin{array}{l} a_2 = 9 \\ a_6 = \frac{1}{9} \end{array}\right|$ $\begin{array}{l} a_1 \cdot r = 9 \longrightarrow a_1 = \frac{9}{r} \\ a_1 r^5 = 1/9 \end{array}$ $\longrightarrow \frac{9}{r} r^5 = \frac{1}{9}$; $r^4 = \frac{1}{81}$; $r = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r}$ $\begin{cases} \boxed{27} \\ \boxed{-27} \end{cases}$

(9) $x+2,\ 3x+1,\ 7x-1$

$r=\frac{3x+1}{x+2}=\frac{7x-1}{3x+1} \Rightarrow (3x+1)^2=(7x-1)(x+2)$; $9x^2+6x+1=7x^2+14x-x-2$;

$2x^2-7x+3=0$; $x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm5}{4}$ $\begin{cases} 3 \to 5,\ 10,\ 20 \\ 1/2 \to \frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2} \end{cases}$

(10) $a_2=-\frac{40}{3} \to a_1 r=-\frac{40}{3} \to 12(1-r)r=-\frac{40}{3}$; $36(r-r^2)=-40$;

$S_\infty=12 \to \frac{a_1}{1-r}=12 \to a_1=12(1-r)$

$0=36r^2-36r-40$; $0=9r^2-9r-10$; $r=\frac{9\pm\sqrt{81+360}}{18}=\frac{9\pm21}{18}$ $\begin{cases} \cancel{5/3} \\ -\frac{2}{3} \to a_1=\frac{a_2}{r}=\boxed{20} \end{cases}$

Para que exista S_∞ debe ser $|r|<1$

(11) $a_1\cdot a_2\cdot a_3=512 \to \frac{a_2}{\cancel{r}}\cdot a_2\cdot a_2\cancel{r}=512$; $a_2^3=512$; $\boxed{a_2=8}$

$a_1+a_2+a_3=42$

$\frac{8}{r}+8+8r=42$; $8+8r+8r^2=42r$; $8r^2-34r+8=0$;

$4r^2-17r+4=0$; $r=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}=\frac{17\pm15}{8}$ $\begin{cases} 4 \to a_1=\frac{8}{4}=2 \ ;\ a_3=8\cdot4=32 \\ \frac{1}{4} \to a_1=\frac{8}{1/4}=32 \ ;\ a_3=8\cdot\frac{1}{4}=2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Son } 2,\ 8,\ 32}$

(12) $a_1=7a_3+6a_4$

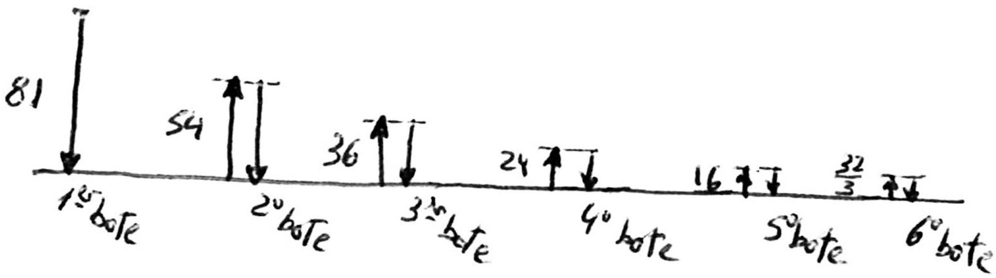
$a_1=7a_1r^2+6\cdot a_1r^3$; $1=7r^2+6r^3$; $0=6r^3+7r^2-1$ ✓

	6	7	0	-1
-1		-6	-1	1
	6	1	-1	0

$6r^2+r-1=0$ $\quad r=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm5}{12}$ $\begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$

$\boxed{r= -1,\ 1/3,\ -1/2}$

(13)



a) $81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\boxed{\frac{32}{3}\,m}$

b) $81+54+54+36+36+24+24+16+16+\frac{32}{3}+\frac{32}{3}=$

$=81+2\left(54+36+24+16+\frac{32}{3}\right)=\boxed{\frac{1087}{3}\,m}$

c) $81+2(54+36+----)=81+2\cdot\frac{54}{1-\frac{2}{3}}=81+\frac{108}{1/3}=\boxed{405\,m}$

(14) **1er Método**

Distinguiremos tres casos: las cantidades múltiplos de 3
las " " " " más 1
las " " " " menos 1

- Las cantidades múltiplos de 3 las pagaremos únicamente con monedas de tres unidades.

  $C = 3m \longrightarrow$ $\boxed{\text{'m' monedas de tres}}$.

- Las cantidades múltiplos de 3 más 1 las pagaremos con:

  $C = 3m+1 = 3m+10-9 = 3(m-3)+2\cdot 5 \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{'m-3' monedas de tres}\\ \text{2 monedas de cinco}\end{array}}$

  No hay problema con la resta 'm-3' porque como la cantidad es mayor que 8, m debe ser mayor o igual que 3.

- Las cantidades múltiplos de 3 menos 1 las pagaremos con:

  $C = 3m-1 = 3m-(6-5) = 3(m-2)+5 \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{'m-2' monedas de tres}\\ \text{1 moneda de cinco}\end{array}}$

2º Método

En cada cantidad contabilizamos por separado las unidades, decenas, centenas etc. Las decenas, centenas, etc, las pagaríamos con monedas de cinco.
Por ejemplo: 70 serían 14 monedas de cinco
200 " 40 " " "

Para las unidades observamos que los múltiplos de 3 cubren todas las posibilidades del 1 a 9:

$3\cdot1=\underline{\underline{3}}$, $3\cdot2=\underline{\underline{6}}$, $3\cdot3=\underline{\underline{9}}$, $3\cdot4=1\underline{\underline{2}}$, $3\cdot5=1\underline{\underline{5}}$, $3\cdot6=1\underline{\underline{8}}$, $3\cdot7=2\underline{\underline{1}}$, $3\cdot8=2\underline{\underline{4}}$, $3\cdot9=2\underline{\underline{7}}$

Por lo tanto, para pagar las unidades, ajustaríamos el múltiplo de 3 correspondiente y, a continuación, veríamos las decenas, centenas etc con los múltiplos de 5.

Ejemplo: $476 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 94 \text{ " " cinco}\end{cases}$

Ejemplo: $478 = 460+18 = \begin{cases} 6 \text{ monedas de tres} \\ 92 \text{ " " cinco}\end{cases}$

Quedarían unos pocos casos sueltos sin justificar: 8, 11, 14 y 17

$8 = \begin{cases} 1 \text{ moneda de tres} \\ 1 \text{ " " cinco}\end{cases}$ $11 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco}\end{cases}$ $14 = \begin{cases} 3 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco}\end{cases}$ $17 = \begin{cases} 4 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco}\end{cases}$

3er Método (Inducción)

fase I) $C = 8 = 5+3$, pagaremos con $\begin{cases} 1 \text{ moneda de tres} \\ 1 \text{ " " cinco}\end{cases}$ ✓

fase II) Suponiendo que hemos conseguido pagar una cantidad C con 'a' monedas de tres y 'b' monedas de cinco, demostraremos que también podremos pagar la cantidad C+1 con monedas de tres y cinco:
$C = 3a+5b$
Distinguiremos dos casos: $b=0$ y $b>0$ $(1,2,3,\dots)$

$b=0$: $C=3a \rightarrow C+1 = 3a+10-9 = 3(a-3)+5\cdot 2$

Es decir, si pagamos C con $\{$ 'a' monedas de tres

pagaríamos $C+1$ con $\begin{cases} a-3 & \text{'' '' tres} \\ 2 & \text{'' '' cinco} \end{cases}$

$b>0$: $C=3a+5b \rightarrow C+1 = 3a+5b+6-5 = 3(a+2)+5(b-1)$

Es decir, si pagamos C con $\begin{cases} a & \text{monedas de tres} \\ b & \text{'' '' cinco} \end{cases}$

pagaríamos $C+1$ con $\begin{cases} a+2 & \text{'' '' tres} \\ b-1 & \text{'' '' cinco} \end{cases}$

(15) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

fase 1 | $\underline{\underline{n=1}}$ $\quad 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$; $1=\dfrac{2^2}{4}$; $1=1$

fase 2 | $\underline{\underline{n=K}}$ Suponiendo cierto que $1^3+2^3+\dots+K^3 = \dfrac{K^2(K+1)^2}{4}$ demostraremos que $1^3+2^3+\dots\dots+(K+1)^3 = \dfrac{(K+1)^2(K+2)^2}{4}$

$$1^3+2^3+\dots+(K+1)^3 = \frac{K^2(K+1)^2}{4}+(K+1)^3 = \frac{K^2(K+1)^2+4(K+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(K+1)^2\cdot[K^2+4(K+1)]}{4} = \frac{(K+1)^2(K^2+4K+4)}{4} = \frac{(K+1)^2(K+2)^2}{4}$$

(16) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$

fase 1 | $\underline{\underline{n=1}}$ $\quad 1+\frac{1}{1} = 1+1$; $2=2$

fase 2 | $\underline{\underline{n=K}}$ Suponiendo cierto que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{K}\right) = K+1$ demostraremos que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{K+1}\right) = K+2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{K+1}\right) = (K+1)\cdot\left(1+\frac{1}{K+1}\right) = K+1+\frac{\cancel{K+1}}{\cancel{K+1}} = K+1+1 = K+2$$

(17) $2^{2n}-3n-1 = \dot{9}$

fase 1 | $\underline{\underline{n=1}}$ $\quad 2^{2\cdot 1}-3\cdot 1-1 = 4-3-1 = 0$ que es divisible entre 9

fase 2 | $\underline{\underline{n=K}}$ Suponiendo que $2^{2K}-3K-1$ es divisible entre 9 demostraremos que $2^{2(K+1)}-3(K+1)-1$ es también divisible entre 9

$$2^{2(K+1)}-3(K+1)-1 = 2^{2K}\cdot 2^2-3K-3-1 = 4\cdot 2^{2K}-3K-4 =$$

$$= 4\cdot\left[2^{2K}-3K-1+3K+1\right]-3K-4 = 4\left[2^{2K}-3K-1\right]+12K+\cancel{4}-3K-\cancel{4} =$$

$$= \underbrace{4\cdot\{2^{2K}-3K-1\}}_{\text{divisible entre 9}}+\underbrace{9K}_{\text{divisible entre 9}}$$